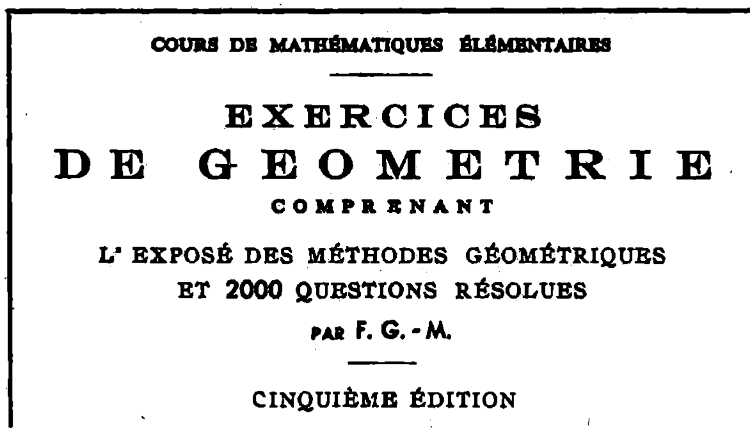
ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
(ΙΗΣΟΥΪΤΩΝ)

- ΛΥΣΕΙΣ 2000 ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ
- ΟΛΑΙ ΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΥΠΟ **F. G.-M.**

ΠΛΗΡΗΣ ΚΑΙ ΠΙΣΤΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΙΣ
ΕΚ ΤΗΣ Ε' ΓΑΛΛΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ
ΥΠΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ **Δ. ΓΚΙΟΚΑ**
Τ. ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

IV


COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

EXERCICES
DE GEOMETRIE
COMPRENANT
L' EXPOSÉ DES MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES
ET 2000 QUESTIONS RÉSOLUES
PAR F. G.-M.

CINQUIÈME ÉDITION

ΕΚΔΟΣΕΙΣ: Π. ΧΙΩΤΕΛΛΗΣ
ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 17 - ΑΘΗΝΑ

Τὰ τρίγωνα ΑΓ'Β, ΒΑ'Γ, ΓΒ'Α εἶναι ὀρθογώνια ἰσοσκελῆ. Ἤδη ἀπὸ τοῦ 1868 ὁ Lemoine εἶχεν προτείνει τὴν κατασκευὴν τριγώνου ἐκ τῶν κέντρων τῶν ἐπὶ τῶν πλευρῶν του κατασκευαζομένων ἰσοπλεύρων τριγώνων. Ὁ Kiepert (Βερολῖνον) ἐπέλυσεν τὸ πρόβλημα τοῦτο (N. A., τόμ. VIII, 1869, σ. 40).

1773ξ. Ὁ Vecten, τὸ 1817, ὑπῆρξε ὁ πρῶτος, νομίζομεν, ὅστις ἐμελέτησε τὸ σχῆμα ἑνὸς τριγώνου καὶ τῶν ἐπὶ τῶν πλευρῶν του τετραγώνων· ἀπὸ τῆς ἐποχῆς αὐτῆς, τὸ σύστημα τοῦτο προεκάλεσε τὸ ἐνδιαφέρον πλήθους μαθηματικῶν.

Τριάντα ἔτη μετὰ τὸν Vecten (1847), ὁ Grebe προεξέτεινεν τὰς ἐξωτερικὰς πλευρὰς τῶν τριῶν τετραγώνων, ἐσχημάτισε οὕτω τρίγωνον α, β, γ, ὁμοιόθετον τοῦ ΑΒΓ, καὶ ἀπέδειξεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι Αα, Ββ, Γγ τέμνονται εἰς τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας. Τὸ σημεῖον τοῦτο, συμβολιζόμενον διὰ τοῦ Κ, ἀπολαμβάνει πλήθους ἰδιοτήτων καὶ τὰς ὁποίους ἰδιαιτέρως ἐτόνισεν ὁ Lemoine.

Ἡ εὕρεσις αὐτοῦ προσέδωσεν ἀπροσδόκητον δόξαν εἰς τὸν Grebe, ἂν καὶ ἀργότερον, ὁ Lhuillier, ὁ Gauss, ὁ Hossard, ὡς καὶ ἄλλοι μαθηματικοὶ ἐπίσης, ἀνεῦρον αὐτὸ χωρὶς ὅμως καὶ νὰ τοῦ ἀποδώσουν μεγάλην σημασίαν.

Εἰς τὴν Γερμανίαν τὸ σημεῖον Κ ὀνομάζεται *σημεῖον τοῦ Grebe*· ἀλλαχοῦ, εἶναι γνωστὸν κυρίως ὑπὸ τὸ ὄνομα *σημεῖον τοῦ Lemoine*, ὡς ἐπωνόμασεν αὐτὸ ὁ J. Neuberg.

Τὸ σχῆμα, ἢ *σύστημα τοῦ Vecten*, τοῦ τριγώνου καὶ τῶν τριῶν τετραγώνων, ἐπέσυρε τὴν προσοχὴν μεγάλου πλήθους ἐρευνητῶν. Εἰς τὰς προηγουμένας σχετικὰς ἐργασίας προσθέτομεν καὶ τὴν τοῦ Van Aubel εἰς *N. C.*, τόμ. IV, 1878, σ. 40 καὶ *Mathesis*, τόμ. I, 1881, σ. 168, ζήτ. 72 καὶ τόμ. VI, 1886, σ. 39, ἀπάντησις ὑπὸ A. Lambert.

Εἰς τὴν ἔξοχον σπουδὴν τοῦ θέματος ὑπὸ τοῦ E. Collignon (βλ. ἀνωτέρω), ὁ μαθηματικὸς οὗτος μελετᾷ ὁλόκληρον σειρὰν τριγώνων ἀναλόγων τοῦ Α'Β'Γ' καὶ θεωρεῖ κατόπιν τὸ τετράπλευρον καὶ τὰ ἰσοσκελῆ ὀρθογώνια τρίγωνα ἅτινα κατασκευάζονται ἐπὶ τῶν πλευρῶν του (ὡς ἀν., σ. 53).

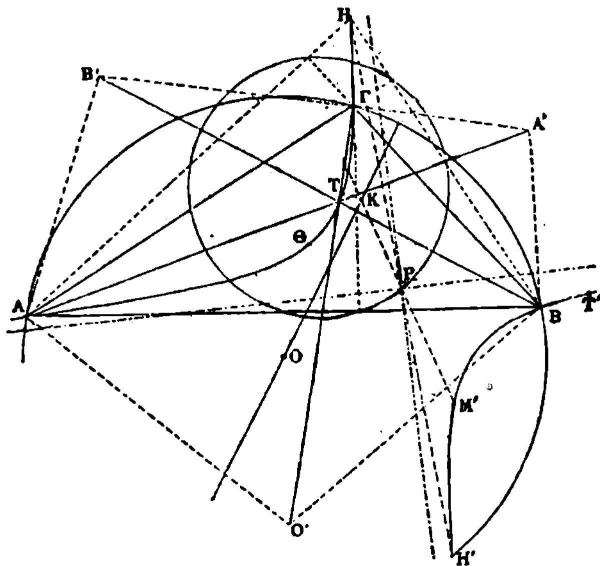
1773ο. Τόπος τῶν σημείων τομῆς τῶν εὐθειῶν ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', *τῶν συνδεουσῶν τὰς κορυφὰς τριγώνου* ΑΒΓ *πρὸς τὰς κορυφὰς* Α', Β', Γ', *τῶν ὁμοίων ἰσοσκελῶν τριγώνων, τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ* ΑΒΓ *καὶ πάντων πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν ἢ πάντων πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ.*

Τὸ σημεῖον Τ τοῦ Vecten ἀντιστοιχεῖ εἰς γωνίας α παρὰ τὰς βάσεις τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ἴσας πρὸς 45°. Ἐὰν $\alpha = 60°$, λαμβάνομεν τὸ *ἰσογώνιον σημεῖον* Μ, ἀφ' οὗ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ τριγώνου φαίνεται ὑπὸ γωνίαν 60°. Διὰ $\alpha = 90°$, εὑρίσκομεν τὸ ὀρθόκεντρον Η καὶ διὰ $\alpha = 0$, τὸ κέντρον βάρους Θ τοῦ τριγώνου.

Διὰ γωνίαν α ἀρνητικήν, τὰ τρίγωνα φέρονται πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Εὑρίσκομεν ἓν σημεῖον Τ' διὰ τὰ ἐσωτερικὰ τετράγωνα, ὡς καὶ τὸ δεύτερον *ἰσογώνιον κέντρον* Μ', ἀφ' οὗ δύο τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου φαίνονται ὑπὸ γωνίας 60° καὶ ἡ τρίτη ὑπὸ γωνίαν 120°.

Ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι *κωνικὴ τομὴ* καὶ δὴ ἰσοσκελὴς ὑπερβολὴ καλουμένη ἤδη ὑπερβολὴ τοῦ Kiepert (1869, N. A., σ. 42, 2). Ἡ σπουδὴ τῆς καμπύλης ταύτης ἀπέφερε ἐνδιαφερούσας ἐργασίας, ὡς λ. χ. τοῦ Brocard, ὅστις καθώρισε τὰ κύρια αὐτῆς σημεῖα, τὸ κέντρον, τὰς ἀσυμπτώτους (*J. M. S.*, 1884, σ. 197· 1885· σ. 12, 30 καὶ 58).

Βλέπε σχετικῶς: *A. F.*, 1885, σ. 15, n° 2, ἐπὶ διαλέξεως τοῦ Lemoine εἰς τὸ συνέδριον τῆς Limoges. *N. A.*, 1886, σ. 231, n° 15, E. Secaro· *Mathesis*, 1887, σ. 208 - 220, M'Cay· *A. F.*, 1887, Toulouse, σ. 113, Laisant· *Mathesis*, 1887, σ. 245, n° 11, 1888, σ. 81,



Σχ. 1152 β

Jerabeck καὶ Neuberg· *A. F.*, Paris, 1889, σ. 166, Gob καὶ Neuberg· *Mathesis*, 1892, σ. 241. Ἐπίσης § 1242 π, τοῦ παρόντος ἔργου.

1773 π. Ὁ τόπος τῶν ῥιζικοῦ κέντρου τῶν τριῶν περιφερειῶν, τῶν ἐχουσῶν ὡς χορδὰς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ *τριγώνου* ΑΒΓ *καὶ ἐκ τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ αὗται φαίνονται ὑπὸ γωνίας* Γ + φ, Α + φ, Β + φ, *ἀντιστοίχως, εἶναι ἡ εὐθεῖα* ΟΚ. (*Mathesis*, 1887, σ. 219, Tesch.).
Εἶναι, ἑπομένως, οἱ τόποι τῶν §§ 1773 ο καὶ 1773 π ἀντίστροφοι ἀλλήλων ἐν ἰσογωνίῳ ἀντιστροφῇ.

Ἀναφέρομεν ἐπίσης καὶ ἓν ὡραῖον ἄρθρον τοῦ Barisien (*N. A.*, 1911, σ. 87) ἐπὶ *ἓξ ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν ἑνὸς τριγώνου*.

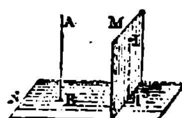
ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ V

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Θεώρημα 643

1774. Ἐὰν εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἐπίπεδον Μ εἶναι παράλληλα πρὸς ἄλληλα, πᾶν ἐπίπεδον Ν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Μ.

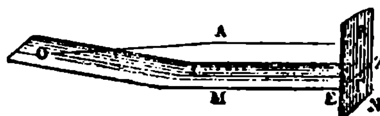


Σχ. 1153.

Διὰ τοῦ τυχόντος σημείου Ι τοῦ ἐπιπέδου Μ φέρομεν εὐθεῖαν ΙΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ· ἡ εὐθεῖα αὕτη ἀνήκει εἰς τὸ Μ καὶ εἶναι κάθετος, ὡς καὶ ἡ παράλληλός της ΑΒ, ἐπὶ τὸ Ν. Εἶναι ἑπομένως τὸ περιέχον τὴν εὐθεῖαν ΙΓ ἐπίπεδον Μ κάθετον ἐπὶ τὸ Ν.

Ἀντίστροφον Θεώρημα 643—Ι

1774 α. Ἐὰν ἐπίπεδον Ν εἶναι κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἐπίπεδον Μ, ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Μ.



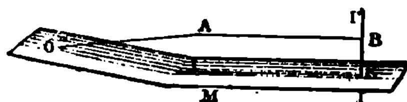
Σχ. 1154.

Πράγματι, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ ἐπίπεδον Μ εἶχον κοινὸν σημεῖον Ο, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἐφέρομεν κάθετον ΟΙΓ ἐκ τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τὴν τομὴν ΕΖ τῶν ἐπιπέδων Μ καὶ Ν. Ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ ἦτο κάθετος ἐπίσης καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ν καὶ θὰ εἴχομεν οὕτω δύο καθέτους ἐξ ἑνὸς σημείου ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον — ὅπερ ἄτοπον.

Εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΒ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Μ.

Θεώρημα 644

1775. **Ἐὰν εὐθεῖα ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἐπίπεδον Μ, ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Μ.**



Σχ. 1155.

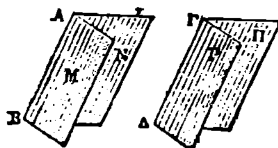
Πράγματι, ἐὰν ἡ ΑΒ καὶ τὸ ἐπίπεδον Μ εἶχον κοινὸν σημεῖον Ο, ἡ εὐθεῖα ΟΕ, ἡ συνδέουσα τὸ Ο μετὰ τοῦ ἴχνους Ε τῆς ΓΔ καὶ τοῦ Μ, θὰ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ.

Θὰ εἴχομεν δὲ τότε ἐκ τοῦ Ο δύο καθέτους ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ — ὅπερ ἄτοπον.

Εἶναι ἑπομένως ἡ ΑΒ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Μ.

Θεώρημα 645

1776. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, ἀντιστοίχως, πρὸς δύο ἄλλα τεμνόμενα, αἱ τομαὶ τῶν δύο ζευγῶν ἐπιπέδων εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.



Σχ. 1156.

Ἔστωσαν Μ, Ν δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰ Ρ καὶ Π, ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ τομὴ ΑΒ τῶν δύο πρώτων εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν ΓΔ τῶν δύο τελευταίων.

Ἐπειδὴ τὰ Μ καὶ Ρ εἶναι παράλληλα ἐπίπεδα, ἡ εὐθεῖα ΑΒ τοῦ πρώτου εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Ρ. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον, ἡ ἰδία εὐθεῖα ΑΒ, θεωρουμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ν, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π.

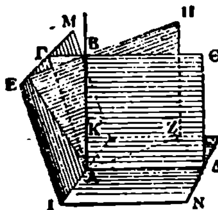
Εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΒ παράλληλος πρὸς ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα Ρ καὶ Π, ἄρα παράλληλος πρὸς τὴν τομήν των ΓΔ.

1776 α. Σημείωσις. Δυνάμεθα νὰ σπουδάσωμεν πολλὰς ἰδιότητας τῶν διέδρων καὶ τριέδρων γωνιῶν, ὡς καὶ ἄλλα ζητήματα τοῦ V Βιβλίου, παραλλήλως πρὸς ἰδιότητας τῶν γωνιῶν καὶ τριγώνων εἰς τὴν ἐπίπεδον Γεωμετρίαν. Ἰδὲ σχετικῶς τὰ *Nouveaux Éléments de Géométrie,* ὑπὸ Ch. Méray (3η ἔκδ., 1906).

Θεώρημα 646

1777. Δίδονται δίεδρος ΜΙΑΝ καὶ εὐθεῖα ΑΒ ἐσωτερικὴ τῆς διέδρου, κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν ΑΙ τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου καὶ πλαγία πρὸς αὐτάς.

Δείξατε ὅτι ἡ ἐλαχίστη ἐπίπεδος γωνία, καθ' ἣν τέμνει τὰς ἕδρας τῆς διέδρου ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ, εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου.



Σχ. 1157.

Ἔστω ΓΔ ἡ θέσις τοῦ κινητοῦ ἐπιπέδου, καθ' ἣν εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΑΙ, ΕΖ δὲ τυχοῦσα ἄλλη θέσις αὐτοῦ.

Ἡ ἀκμὴ ΑΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὰς εὐθείας αὐτοῦ ΑΓ, ΑΔ, προβολὰς τῆς ΑΒ ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία μιᾶς εὐθείας μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας αὐτῆς μετὰ πάσης ἄλλης εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, διερχομένης διὰ τοῦ ἴχνους της ἐπ' αὐτό, ἕπεται:

$$\widehat{BA\Gamma} < \widehat{BAE}$$

καὶ ὁμοίως $\widehat{ΒΑΔ} < \widehat{ΒΑΖ}$.

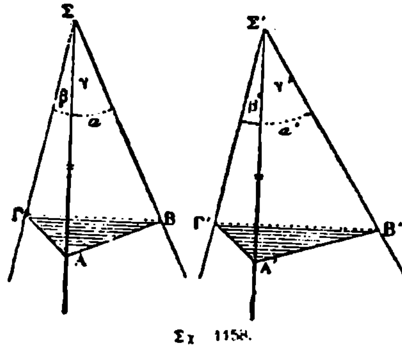
Ἄρα, διὰ προσθέσεως :

$$\widehat{ΓΑΔ} < \widehat{ΕΑΖ}.$$

Θεώρημα 647

1778. Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι Σ καὶ Σ′ ἔχουν δύο ἕδρας β, γ καὶ β′, γ′ ἴσας ἀντιστοίχως καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας διέδρους ἀνίσους, θὰ ἔχουν τὰς τρίτας αὐτῶν ἕδρας ἀνίσους καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐπὶ τῶν κοινῶν ἀκμῶν ΣΑ, ΣΑ′ τῶν ἑδρῶν β, γ καὶ β′, γ′ τῶν δύο τριέδρων λαμβάνομεν ἴσα μήκη ΣΑ, Σ′Α′ καὶ διὰ τῶν Α καὶ Α′ φέρομεν ἐπίπεδα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ κάθετα ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ἀκμὰς ταύτας. Ἡ εὐθεῖα ΣΑ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ καὶ ὁμοίως ἡ Σ′Α′ ἐπὶ τὰς Α′Β′ καὶ Α′Γ′.



Σχ. 1158.

Τὰ τρίγωνα ΣΑΓ καὶ Σ′Α′Γ′ εἶναι ἴσα, ὡς ὀρθογώνια ἔχοντα τὰς καθέτους πλευρὰς ΣΑ, Σ′Α′ ἴσας καὶ τὰς γωνίας β καὶ β′ ἴσας· ἄρα

$$ΑΓ = Α'Γ', \quad ΣΓ = Σ'Γ'$$

καὶ ὁμοίως $ΑΒ = Α'Β', \quad ΣΒ = Σ'Β'$.

1) Αἱ δίεδροι ΣΑ, Σ′Α′ ἔχουν μέτρα τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΓΑΒ καὶ Γ′Α′Β′· ἐὰν λοιπὸν δ/δρος ΣΑ < δ/δρου Σ′Α′, θὰ εἶναι

καὶ $\widehat{ΓΑΒ} < \widehat{Γ'Α'Β'}$, τὰ δὲ τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ θὰ ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν τρίτην ΓΒ < Γ′Β′. Ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα ΓΒΣ, Γ′Β′Σ′ θὰ ἔχουν δύο πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὴν τρίτην ΓΒ < Γ′Β′.

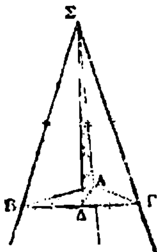
Εἶναι ἑπομένως ἡ τρίτη ἕδρα α τῆς τριέδρου Σ μικροτέρα τῆς ἀντιστοιχούσης α′ τῆς τριέδρου Σ′.

2) *Ἀντιστρόφως.* Ἔστω ὅτι α < α′. Τὰ τρίγωνα ΓΒΣ καὶ Γ′Β′Σ′ ἔχουν δύο πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὴν γωνίαν α < α′· θὰ εἶναι κατὰ συνέπειαν ΓΒ < Γ′Β′. Τὰ δὲ τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ ἔχουν δύο πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὰς τρίτας ΓΒ < Γ′Β′.

Θὰ εἶναι ἑπομένως: $\widehat{ΓΑΒ} < \widehat{Γ'Α'Β'}$ καὶ ἡ δίεδρος ΣΑ μικροτέρα τῆς διέδρου Σ′Α′.

Θεώρημα 648

1779. Ἐὰν δύο ἕδραι ΑΣΒ, ΑΣΓ μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν δίεδροι θὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως. (Τὸ τρίεδρον τοῦτο καλεῖται καὶ *ἰσοσκελὲς* ἢ *ἰσόεδρον*).



Σχ. 1159.

1) Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν τριῶν ἀκμῶν τῆς τριέδρου μήκη ἴσα ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ; φέρομεν τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, ὡς καὶ ἓν ἄλλο ΑΣΔ διὰ τῆς ἀκμῆς ΣΑ καὶ τοῦ μέσου Δ τῆς ΒΓ.

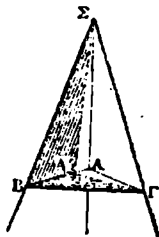
Τὸ τρίγωνον ΒΣΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ διὰ τῆς διαμέσου του ΣΔ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη· τὸ δὲ ἐπίπεδον ΑΣΔ διαιρεῖ τὴν τρίεδρον εἰς δύο ἴσας ἐπίσης τριέδρους, ὡς ἐχούσας τὰς ἕδρας των ἀντιστοίχως ἴσας.

Εἶναι, ἑπομένως, αἱ ὁμόλογοι τῶν τριέδρων τούτων δίεδροι γωνίαι ΣΒ καὶ ΣΓ ἴσαι.

2) *Ἀντιστρόφως.* Θὰ δείξωμεν ὅτι, ἐὰν αἱ δίεδροι ΣΒ, ΣΓ εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν ἕδραι θὰ εἶναι ἴσαι.

Ὑποθέσωμεν τὴν ἕδραν ΑΣΓ μικροτέραν τῆς ΑΣΒ· ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας ἕδρας γωνίαν Α'ΣΒ = ΑΣΓ καὶ φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον ΓΣΑ', σχηματίζεται τρίεδρον ΣΑ'ΒΓ, ἔχον μετὰ τοῦ ΣΑΒΓ μίαν δίεδρον ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ ἑδρῶν ἀντιστοίχως ἴσων.

Θὰ εἶναι ἑπομένως αἱ δύο τρίεδροι ΣΑΒΓ καὶ ΣΑ'ΒΓ ἴσαι— ὅπερ ἀδύνατον, ἀφοῦ ἡ δευτέρα τρίεδρος εἶναι μέρος τῆς πρώτης. Ἄρα...



Σχ. 1160.

1780. Παρατήρησις. 1) Μία ἰσόπλευρος (ἢ ἰσόεδρος) τρίεδρος εἶναι ἰσογώνιος· καὶ ἀντιστρόφως.

2) Εἰς τὴν ἰσοσκελῆ τρίεδρον ΣΑΒΓ (σχ. 1159), τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ ἄγεται διὰ τῆς ἀκμῆς—κορυφῆς—ΣΑ καὶ διὰ τῆς διχοτόμου ΣΔ τῆς ἀπέναντι ἕδρας—δυναμένης νὰ κληθῇ καὶ *βάσεως*. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο διαιρεῖ τὴν ὅλην τρίεδρον εἰς δύο ἄλλας ἴσας, καθὼς καὶ τὰς διέδρους μὲ κοινὴν ἀκμὴν ΣΑ· τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς διέδρους ἀκμῆς ΣΔ, αἵτινες ἄλλωστε εἶναι καὶ ὀρθαί.

Οὕτω, τὸ ἐπίπεδον ΑΣΔ πληροῖ τέσσαρας συνθήκας, ἐκ τῶν ὁποίων δύο ἀρκοῦν διὰ τὸν ὁρισμόν του. Ἐντεῦθεν ἀπορρέουν τέσσαρες προτάσεις, ἐκ τῶν ὁποίων τρεῖς τυχοῦσαι εἶναι συνέπειαι τῆς τετάρτης καὶ αἵτινες ἄλλωστε δύνανται νὰ ἀποδειχθοῦν καὶ ἀπ' εὐθείας. (G., nº 61).

Εἰς πᾶσαν ἰσοσκελῆ τρίεδρον :

1) ***Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ἀγόμενον διὰ τῆς ἀκμῆς - κορυφῆς καὶ διὰ τῆς διχοτόμου τῆς ἀπέναντι αὐτῆς ἕδρας εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ταύτην καὶ διχοτομεῖ τὴν δίεδρον τῆς κορυφῆς.***

2) ***Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ἀγόμενον διὰ τῆς ἀκμῆς - κορυφῆς καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἕδραν, διέρχεται διὰ τῆς διχοτόμου τῆς ἕδρας ταύτης καὶ διχοτομεῖ τὴν δίεδρον τῆς κορυφῆς.***

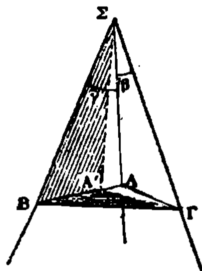
3) *Τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τὴν δίεδρον - κορυφὴν εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἕδραν καὶ διέρχεται διὰ τῆς διχοτόμου αὐτῆς.*

4) *Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ἀγόμενον διὰ τῆς διχοτόμου τῆς τελευταίας ἕδρας καὶ κάθετον ἐπ' αὐτήν, διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι δίεδρον εἰς δύο ἴσας διέδρους.*

Θεώρημα 649

1781. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν Σ, εἰς τὴν μεγαλυτέραν δίεδρον ἀντίκειται μεγαλυτέρα ἕδρα· καὶ ἀντιστρόφως.

1) Ἔστω δίεδρος ΣΒ < διέδρου ΣΓ. Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον ΣΓΑ', σχηματίζον μετὰ τῆς ἕδρας ΣΒΓ δίεδρον ἴσην πρὸς τὴν ΣΒ.



Σχ. 1161.

Ἡ τρίεδρος ΣΑ'ΒΓ θὰ εἶναι ἰσοσκελὴς καὶ ἡ ἕδρα της Α'ΣΒ ἴση πρὸς τὴν Α'ΣΓ (§ 1779, 2).

Ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου ΣΑΓΑ' ὑπάρχει ἡ σχέσις

ΑΣΓ < ΑΣΑ' + Α'ΣΓ = ΑΣΑ' + Α'ΣΒ = ΑΣΒ

ἕπεται ΑΣΓ < ΑΣΒ.

2) Ἀντιστρόφως. *Εἰς τὴν μεγαλυτέραν ἕδραν ἀντίκειται ἡ μεγαλυτέρα δίεδρος.*

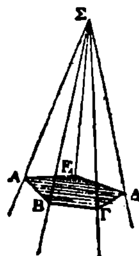
Εἰς τὴν τρίεδρον ΣΑΒΓ ἔστω ἕδρα γ > ἕδρας β. Θὰ δείξωμεν ὅτι: δίεδρος ΣΓ > διέδρου ΣΒ.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ἴσας τὰς δύο διέδρους καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν ἕδραι θὰ εἶναι ἴσαι (§ 1779, 2) — ὅπερ ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν τὴν δίεδρον ΣΓ μικροτέραν τῆς διέδρου ΣΒ, θὰ εἴχομεν, κατὰ τὸ πρῶτον μέρος τοῦ Θεωρήματος, τὴν συνέπειαν: ἕδρα γ < ἕδρας β, ἥτις πάλιν εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὴν ὑπόθεσιν.

Εἶναι ἑπομένως ἡ δίεδρος ΣΓ μεγαλυτέρα τῆς διέδρου ΣΒ.

Θεώρημα 650

1782. Ἐὰν πᾶσαι αἱ ἀκμαὶ μιᾶς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας τμηθοῦν ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὁριζομένων ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τῆς στερεᾶς γωνίας καὶ κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, εἶναι σταθερόν.



Σχ. 1162.

Ἔστω ν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν τῆς στερεᾶς γωνίας. Πᾶν ἐπίπεδον Π, τέμνον τὰς ἀκμὰς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κορυφῆς, ὁρίζει ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν ν τρίγωνα, διὰ τὰ ὁποῖα τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα τῶν γωνιῶν των εἶναι 2ν ὀρθαί.

Τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ δύο μερῶν· ἐκ τοῦ σταθεροῦ ἀθροίσματος Α τῶν γωνιῶν - ἑδρῶν τῆς στερεᾶς γωνίας καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος Β τῶν γωνιῶν τῶν κειμένων παρὰ τὸ τέμνον ἐπίπεδον καὶ ἄνωθεν αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα γωνιῶν εἶναι σταθερόν, ὡς καὶ τὸ πρῶτον μέρος Α τοῦ ἀθροίσματος τούτου, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ δεύτερον ἄθροισμα Β θὰ εἶναι ἐπίσης σταθερόν.

Ἐπειδὴ δὲ προσέτι, ἑκάστη τῶν παρὰ τὸ τέμνον ἐπίπεδον γωνιῶν καὶ κάτωθεν αὐτοῦ κειμένη εἶναι παραπληρωματικὴ καὶ μιᾶς ἄνωθεν αὐτοῦ εὑρισκομένης καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν παρὰ τὸ ἐπίπεδον γωνιῶν θὰ εἶναι ἴσον πρὸς 4 ν ὀρθάς, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα Β' ὅλων τῶν ὑπὸ τὸ ἐπίπεδον καὶ παρ' αὐτὸ κειμένων γωνιῶν θὰ εἶναι ἐπίσης σταθερόν. Ἀφοῦ θὰ εἶναι τοῦτο ἡ διαφορὰ τῶν 4 ν ὀρθῶν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος Β, προαποδειχθέντος ὡς σταθεροῦ.

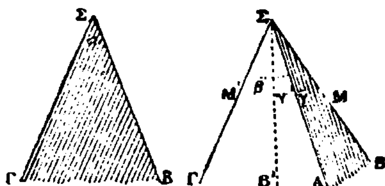
Θεώρημα 651

1783. **Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη διὰ τὴν κατασκευὴν τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἐχούσης δεδομένας ἕδρας α, β, γ, εἶναι ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων ἑδρῶν εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, ἡ μεγαλυτέρα δὲ αὐτῶν μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.**

1) Ἡ πρώτη συνθήκη ἕπεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ τρίεδρος εἶναι ἀναγκαίως κυρτὴ καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν της ἀναγκαίως ἐπίσης μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν.

2) Ἔστω α ἡ μεγαλυτέρα ἕδρα καὶ γ ἡ μικροτέρα. Ἂς παραθέσωμεν τὰς ἕδρας β καὶ γ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Μ καὶ κατὰ κοινὴν πλευρὰν ΣΑ.

Ἐὰν στρέψωμεν τὴν ἕδραν γ = ΑΣΒ περὶ τὴν ἀκμὴν ΣΑ καὶ κατὰ 180°, ἡ ἀκμὴ ΣΒ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΣΒ' ἐντὸς τῆς γωνίας ΓΣΑ = β > γ. Ἡ ὅλη γωνία ΓΣΒ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν β καὶ γ, ἡ δὲ γωνία ΓΣΒ' ἡ διαφορὰ αὐτῶν.



Σχ. 1163.

Ἐπειδὴ δὲ ἐδόθη, ὅτι ἡ ἕδρα α εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα ἑκάστης ἐξ αὐτῶν, κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν. Ἐὰν λοιπὸν μεταφέρωμεν τὴν ἕδραν α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΣΒ, ὥστε νὰ ἀποκτήσῃ κοινὴν πλευρὰν ΓΣ μετὰ τῆς ΓΣΑ, ἡ ἕδρα αὕτη α θὰ εἶναι πολὺ μεγάλη, ὥστε ἡ ἄλλη της πλευρὰ νὰ κεῖται πέραν τῆς ΣΒ καὶ πολὺ μικρά, ὥστε ἡ πλευρά της αὕτη νὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν ΣΓ καὶ ΣΒ'.

Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι, κατὰ τὴν στροφὴν τῆς ἕδρας ΑΣΒ περὶ τὴν ΣΑ, ἡ γωνία τῶν ΣΒ καὶ ΣΓ λαμβάνει πάσας τὰς ἐνδιαμέσους τιμὰς μεταξὺ τῶν τιμῶν τῶν γωνιῶν ΓΣΒ καὶ ΓΣΒ'. Θὰ ὑπάρχῃ ἑπομένως μία θέσις, κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ γωνία ΓΣΒ θὰ ἀποβῇ ἴση πρὸς τὴν ἕδραν α—ἐξ οὗ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ κατασκευὴ τῆς τριέδρου στερεᾶς γωνίας μὲ τὰ δεδομένα α, β, γ πληροῦντα τὰς τεθείσας συνθήκας εἶναι δυνατή.

Θεώρημα 652

1784. **Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη διὰ τὴν κατασκευὴν τριέδρου στερεᾶς γωνίας Σ' ἐχούσης δεδομένας διέδρους Α, Β, Γ, εἶναι ὅπως τὸ ἄρθροισμά των περιλαμβάνεται μεταξὺ 2 καὶ 6 ὀρθῶν, ἡ δὲ μικροτέρα δίεδρος αὐξηθεῖσα κατὰ δύο ὀρθὰς ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.**

Ἔστω Α ἡ μικροτέρα δίεδρος, α', β', γ' δὲ ἐπίπεδοι γωνίαι παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων Α, Β, Γ. Ἡ γωνία α' θὰ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἐκ τῶν τριῶν τούτων παραπληρωμάτων.

1) Αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι εἶναι ἀναγκαῖαι, ὡς ἰδιότητες πάσης τριέδρου κυρτῆς γωνίας.

2) Αἱ συνθῆκαι αὗται δύνανται νὰ συνοψισθοῦν εἰς τὰς ἀνισότητας :

$$6 \text{ ὀρθαὶ} > A + B + \Gamma > 2 \text{ ὀρθῶν}, \quad A + 2 \text{ ὀρθαὶ} > B + \Gamma.$$

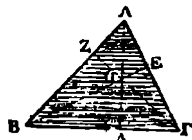
ἤ, ἀφοῦ $A = 2$ ὀρθαὶ $- \alpha'$, $B = 2$ ὀρθαὶ $- \beta'$, $\Gamma = 2$ ὀρθαὶ $- \gamma'$, εἰς τάς:

$$0 < \alpha' + \beta' + \gamma' < 4 \text{ ὀρθῶν} \quad \text{καὶ} \quad \alpha' < \beta' + \gamma'.$$

Εἶναι, ἑπομένως (§ 1783) κατασκευάσιμος ἡ τρίεδρος Σ μὲ ἕδρας τὰς α', β', γ' — ἄρα καὶ ἡ ἀρχικὴ Σ'· ἐπειδὴ αὕτη θὰ εἶναι ἡ παραπληρωματικὴ τρίεδρος τῆς Σ.

Θεώρημα 653

1785. **Τὰ τρία ἐπίπεδα, τὰ ἀγόμενα διὰ τῶν ἀκμῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας καθέτως ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἕδρας, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.**



Σχ. 1164.

Ἔστωσαν ΣΒΕ, ΣΓΖ δύο τῶν ἐπιπέδων τούτων (ὑποθέτομεν τὴν κορυφὴν Σ ὑπὲρ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ) καὶ ΣΟ ἡ τομὴ αὐτῶν. Ἐὰν τάμωμεν τὴν τρίεδρον διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, καθέτου ἐπὶ τὴν ΣΟ, ἡ εὐθεῖα αὕτη, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς εὐθείας αὐτοῦ ΒΕ καὶ ΓΖ.

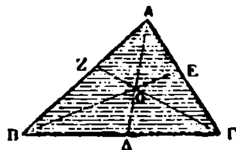
Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐπίπεδον ΣΒΕ, κάθετον ἐπ' ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ ΣΑΓ, θὰ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν των ΑΓ, τὸ ἴχνος αὐτοῦ ΒΕ μετὰ τοῦ ΑΒΓ θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ ἑπομένως ἓν τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ὁμοίως, ἡ εὐθεῖα ΓΖ θὰ εἶναι τὸ δεύτερον ὕψος τοῦ ἰδίου τριγώνου καὶ ἀναγκαίως ἡ ΑΟΔ τὸ τρίτον ὕψος αὐτοῦ. Εἶναι ἑπομένως (κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων), ἡ ΣΔ κάθετος ἐπίσης ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΣΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΣΒΓ.

Ὥστε . . .

Θεώρημα 654

1786. **Εἰς πᾶσαν τρίεδρον, τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς διέδρους τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Ταύτης πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχει τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου.**



Σχ. 1165.

Ἔστω πάλιν ἡ κορυφὴ Σ τῆς τριέδρου ὑπὲρ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ καὶ ΣΟ ἡ τομὴ τῶν διχοτομούντων ἐπιπέδων ΣΒΕ καὶ ΣΓΖ.

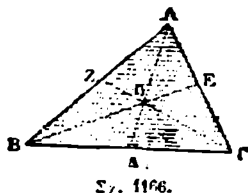
Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΣΟ ἀνήκει εἰς ἀμφότερα τὰ διχοτομοῦντα ταῦτα ἐπίπεδα, πᾶν σημεῖον αὐτῆς ἴσον ἀπέχει τῶν ἑδρῶν ΣΒΑ,

ΣΒΓ ἀφ' ἑνὸς καὶ ΣΑΓ, ΣΒΓ ἀφ' ἑτέρου — δηλ. ἴσον ἀπέχει καὶ τῶν τριῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου.

Κεῖται ἐπομένως ἡ εὐθεῖα ΣΟ καὶ ἐπὶ τοῦ τρίτου διχοτομοῦντος ἐπιπέδου ΣΑΔ. Ὥστε...

Θεώρημα 655

1787. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν, τὰ διὰ τῶν ἀκμῶν καὶ διχοτόμων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν διερχόμενα ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (διάμεσα ἐπίπεδα).



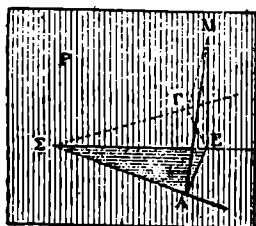
Σχ. 1166.

Ὑποθέσωμεν καὶ πάλιν τὴν κορυφὴν Σ ὑπὲρ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ. Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ἴσα μήκη ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ καὶ θεωρήσωμεν τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ.

Ἔστωσαν ΣΒΕ, ΣΓΖ δύο τῶν διαμέσων ἐπιπέδων. Αἱ ἀκμαὶ ΣΑ, ΣΓ εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον ΣΑΓ ἰσοσκελές, τὸ Ε μέσον τῆς ΑΓ καὶ ἡ ΒΕ διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ὁμοίως, αἱ ΓΖ καὶ ΑΔ εἶναι διάμεσοι τοῦ ΑΒΓ καὶ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο. Γίνεται ἐπομένως φανερὸν ὅτι τὰ τρία διάμεσα ἐπίπεδα ΣΒΕ, ΣΓΖ, ΣΑΔ ἔχουν κοινὴν εὐθεῖαν τὴν ΣΟ.

Θεώρημα 655—I

1788. Τὸ ἐπίπεδον Ρ, τὸ ἀγόμενον καθέτως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον γωνίας ΑΣΓ καὶ διὰ τῆς διχοτόμου αὐτῆς, εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.

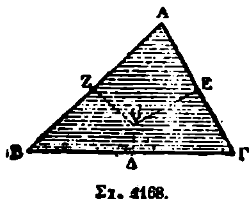


Σχ. 1167.

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ θεωρήματος *τῶν τριῶν καθέτων*.

Ἔστω, πράγματι, Μ ἓν τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Ρ, ΜΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΣΕ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας, καὶ ΜΑ, ΜΓ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτῆς. Κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, αἱ ΕΑ, ΕΓ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, ἄρα καὶ ἴσαι, ἀφοῦ τὸ Ε εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου αὐτῆς· εἶναι ἐπομένως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΕΑ, ΜΕΓ ἴσα καὶ ΜΑ = ΜΓ.

Θεώρημα 656



Σχ. 1168.

1789. Τὰ ἐπίπεδα, τὰ ἀγόμενα καθέτως ἐπὶ τὰς ἕδρας τριέδρου γωνίας καὶ διερχόμενα διὰ τῶν διχοτόμων αὐτῶν, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Ταύτης πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχει τῶν ἀκμῶν τῆς τριέδρου.

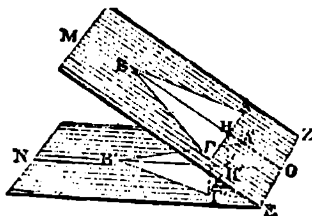
Ὑποθέσωμεν καὶ πάλιν τὴν κορυφὴν Σ τῆς τριέδρου ὑπὲρ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ καὶ ἔστω ΣΟ ἡ τομὴ δύο τῶν θεωρουμένων ἐπιπέδων, τῶν ΣΟΕ καὶ ΣΟΖ.

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΣΟ εἶναι κοινὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων, πᾶν σημεῖον αὐτῆς ἴσον θ' ἀπέχῃ τῶν ἀκμῶν ΣΑ, ΣΓ καὶ ΣΑ, ΣΒ. δηλ. ἴσον θὰ ἀπέχῃ καὶ τῶν τριῶν ἀκμῶν ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ἄρα καὶ τῶν ΣΓ, ΣΒ.

Κεῖται ἐπομένως ἡ εὐθεῖα ΣΟ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΣΟΔ - τόπου τῶν σημείων τῶν ἴσων ἀπεχόντων τῶν ἀκμῶν ΣΒ καὶ ΣΓ.

Θεώρημα 657

1790. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς μιᾶς ἐπιπέδου ἐπιφανείας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτῆς ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν δύο ἐπιπέδων.



Σχ. 1169.

1) Θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τρίγωνον ΑΒΓ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Μ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν ΕΖ τῶν δύο ἐπιπέδων. Ἡ προβολὴ Α'Γ' τῆς πλευρᾶς ταύτης ΑΓ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΒ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον Ν, τὸ δι' αὐτῆς καὶ καθέτως ἐπὶ τὴν ΕΖ ἀγόμενον ἐπίπεδον ΒΗΟΗ'Β' εἶναι κάθετον ἐπὶ τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ΕΖ εὐθείας ΑΓ, Α'Γ' καὶ ἐπομένως τὰ μήκη ΒΗ $= υ$ καὶ Β'Η' $= υ'$ ὕψη ἐπὶ τὰς ΑΓ, Α'Γ' πλευρὰς τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'.

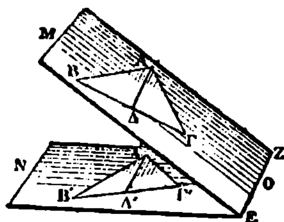
Ἀφ' ἑτέρου, εἰς τὸ ἐπίπεδον ΒΟΒ' θὰ ἔχωμεν

$$υ' = υ \text{ συν} \widehat{O}$$

καὶ ἐπομένως

$$(Α'Β'Γ') = \frac{Α'Γ' . υ'}{2} = \frac{ΑΓ . υ'}{2} = \frac{ΑΓ . υ}{2} . \text{ συν} \widehat{O} = (ΑΒΓ) \text{ συν} \widehat{O}.$$

2) Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ οὐδεμίαν πλευρὰν ἔχῃ παράλληλον πρὸς τὴν ΕΖ, δυνάμεθα πάντοτε νὰ φέρωμεν διά τινος κορυφῆς του Α εὐθεῖαν ΑΔ εἰς αὐτὸ διαιροῦσαν τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἄλλα ΑΔΒ, ΑΔΓ, ἔχοντα τὴν κοινὴν πλευράν των ΑΔ παράλληλον τῆς ΕΖ. Διὰ τὴν προβολὴν ἑκατέρου τῶν τριγώνων τούτων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ν θὰ ἔχωμεν:



Σχ. 1170

$$(Α'Β'Δ') = (ΑΒΔ) \text{ συν} \widehat{O}$$

$$(Α'Γ'Δ') = (ΑΓΔ) \text{ συν} \widehat{O}.$$

Ἐπομένως, διὰ προσθέσεως

$$(Α'Β'Γ') = (ΑΒΓ) \text{ συν} \widehat{O},$$

καὶ πάλιν.

3) Ἐπειδὴ ἓν τυχὸν πολύγωνον εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρίγωνα, τὸ θεώρημα ἰσχύει καὶ διὰ τὸ τυχὸν πολύγωνον, ὡς καὶ δι' ἐπιφανείας περικλειομένας ἐν ὅλῳ ἢ ἐν μέρει ὑπὸ καμπύλων γραμμῶν· ἐπειδὴ τὰ σχήματα ταῦτα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ὅρια ἐγγεγραμμένων εἰς αὐτὰ πολυγώνων.

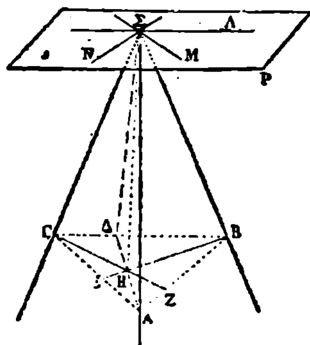
Παρατηρήσεις. 1) *Αἱ προβολαὶ ἐπὶ ἐπίπεδον δύο ἰσοδυνάμων ἐπιφανειῶν, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι ἰσοδύναμοι ἐπιφάνειαι.*

2) *Αἱ προβολαὶ ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον δύο ἐπιφανειῶν, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἔχουν λόγον ἐμβαδῶν ὃν καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν προβαλλομένων ἐπιφανειῶν.*

Θεώρημα 658

1791. Διὰ τῆς κορυφῆς τριέδρου γωνίας καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον ἑκάστης ἕδρας φέρομεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ἀπέναντι τῆς ἕδρας ἀκμήν. Δείξατε ὅτι αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἔστωσαν ΣΑΔ, ΣΒΕ, ΣΓΖ τὰ διὰ τῶν ἀκμῶν καθέτως ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἕδρας ἀγόμενα ἐπίπεδα καὶ τεμνόμενα, ὡς εἴδομεν (§ 1785), κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΣΗ. Φέρομεν ἐπίπεδον ΑΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΣΗ καὶ διὰ τῆς κορυφῆς Σ ἐπίπεδον Ρ παράλληλον πρὸς τὸ ΑΒΓ.



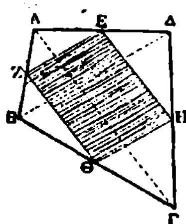
Σχ. 1171.

Ἡ εὐθεῖα ΓΒ, τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΓΑΒ, ΓΣΒ, καθέτων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΣΑΔ, εἶναι κάθετος ἐπίσης ἐπὶ τὸ ΣΑΔ.

Ἐὰν δὲ ΣΛ εἶναι ἡ τομὴ τῆς ἕδρας ΓΣΒ καὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΣΑΔ καὶ ἐπομένως καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτοῦ, καὶ ἀκμὴν τῆς τριέδρου, ΣΑ.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ἐπὶ τοῦ Ρ εὐθεῖαι ΣΜ, ΣΝ, αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΓ, ΑΒ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀκμὰς ΣΒ καὶ ΣΓ.

Κεῖνται ἐπομένως αἱ ἐν τῇ ἐκφωνήσει τοῦ θεωρήματος τρεῖς εὐθεῖαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τοῦ Ρ.



Σχ. 1172.

Θεώρημα 659

1792. Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

Στρεβλὸν τετράπλευρον λέγεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ τέσσαρες πλευραὶ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ αἱ διαγώνιοι ἐπομένως αὐτοῦ ΑΓ, ΒΔ δὲν τέμνονται.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως γίνεται ὅπως καὶ εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν (§ 542).

Ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΔ.

Ἡ ΘΗ εἶναι παράλληλος ἐπίσης καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΔ. Εἶναι ἐπομένως παράλληλοι καὶ ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΕΖ, ΘΗ καὶ τὸ σχῆμα ΕΖΘΗ παραλληλόγραμμον.

Θεώρημα 659—I

1793. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου, τέμνονται εἰς τὰ μέσα αὐτῶν.

Ἐπειδὴ εἶναι διαγώνιοι παραλληλογράμμου.

Θεώρημα 659—II

1794. Αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου καὶ αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων αὐτοῦ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἀλληλοδιχοτομοῦνται.

Ἡ ἀπόδειξις ὅπως καὶ εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν (§ 548).

Παρατηρητέον, ὅτι αἱ τρεῖς αὗται καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διερχόμεναι εὐθεῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐπειδή, ἄλλως, τὸ θεωρούμενον τετράπλευρον θὰ ἦτο ἐπίπεδον.

Θεώρημα 660

1795. Εἰς πᾶν στρεβλὸν τετράπλευρον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων, ηὐξημένον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ μέσα αὐτῶν.

Ἡ ἐπέκτασις αὐτὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ Euler ὀφείλεται εἰς τὸν Carnot καὶ ἀποδεικνύεται καθ' ὅμοιον τρόπον ὡς ἐν § 1205.

Θεώρημα 660—I

1796. Εἰς πᾶν στρεβλὸν τετράπλευρον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

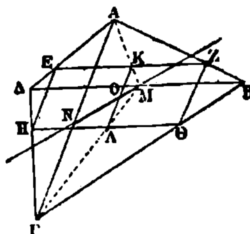
Ἡ ἀπόδειξις ὡς ἐν τῇ ἐπιπεδομετρίᾳ (§ 1204).

Θεώρημα 661

1797. Ἀπὸ δύο ἀντικειμένων κορυφῶν, Α καὶ Γ, ἀρχόμενοι, διαιροῦμεν τὰς πλευρὰς στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον:

$$\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{ΑΖ}{ΑΒ}=\frac{ΓΘ}{ΓΒ}=\frac{ΓΗ}{ΓΔ}=\frac{\mu}{\nu}.$$

Δείξατε ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα διαιρέσεως εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.



Σχ. 1173.

Ἡ πρότασις ἀποδεικνύεται ὡς εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν.

Ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ καὶ ἐπειδὴ προσέτι $\frac{ΕΖ}{ΒΔ}=\frac{\mu}{\nu}$, θὰ εἶναι καὶ

$$ΕΖ=ΒΔ\,.\,\frac{\mu}{\nu}.$$

Ὁμοίως, ἡ ΘΗ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΔ καὶ ἴση πρὸς ΒΔ . $\frac{\mu}{\nu}$. Εἶναι δηλ. τὸ σχῆμα ΕΖΘΗ παραλληλόγραμμον.

Παρατηρήσεις. 1) Ἐὰν τὰ σημεῖα Ε, Ζ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ΑΔ καὶ ΑΒ, τὸ τετράπλευρον τῶν σημείων διαιρέσεως εἶναι πάλιν παραλληλόγραμμον.

2) Ἐὰν ἐδίδετο:

$$\frac{ΑΕ}{ΕΔ} = \frac{\mu}{\nu},$$

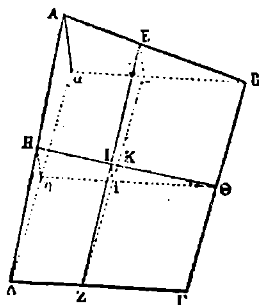
θὰ εἴχομεν

$$\frac{ΑΕ}{ΑΔ} = \frac{ΕΖ}{ΒΔ} = \frac{\mu}{\mu+\nu}, \quad ΕΖ = ΒΔ . \frac{\mu}{\mu+\nu} = ΗΘ.$$

3) Τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὁρίζουν τρεῖς τετράδας εὐθειῶν, ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ πλευραὶ τριῶν στρεβλῶν τετραπλεύρων: ΑΒΓΔ, ΑΒΔΓ, ΑΔΒΓ.

Θεώρημα 662

1789. Πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἑνὸς στρεβλοῦ τετραπλεύρου διαιρεῖ τὰς ἄλλας δύο πλευρὰς αὐτοῦ εἰς μέρη εὐθέως ἀνάλογα.



Σχ. 1174.

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ τετράπλευρον. Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΒΓΔ, φέρομεν τὰς Δα, Βα παραλλήλους πρὸς τὰς ΓΒ καὶ ΓΔ. Φέρομεν καὶ τὴν Αα, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος ἔστω λ.

Τὸ σχῆμα αΒΓΔ εἶναι *παραλληλόγραμμον*, ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους. Πᾶν δὲ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ, θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΔα· ἐπειδὴ θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς δύο εὐθείας αὐτοῦ, τὰς ΔΑ καὶ Δα.

Ἔστω ΕΖε ἓν τοιοῦτον ἐπίπεδον· ἡ εὐθεῖα Ζε θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Δα, ἡ Εε πρὸς τὴν Αα καὶ ἑπομένως

$$\frac{ΒΕ}{ΑΕ} = \frac{Βε}{αε} = \frac{ΓΖ}{ΔΖ}.$$

Παρατήρησις. Ἔστω $\frac{ΒΕ}{ΑΕ} = \frac{\mu}{\nu}$. Θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{ΒΕ}{ΑΒ} = \frac{\mu}{\mu+\nu} = \frac{Εε}{\lambda} \quad \text{καὶ } Εε = \frac{\lambda\mu}{\mu+\nu}.$$

Θεώρημα 663

***1799.* Πρὸς δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἑνὸς στρεβλοῦ τετραπλεύρου φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον καὶ τέμνον τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Φέρομεν ὕστερον δεύτερον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς**

τὸ δεύτερον ζεῦγος ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, τέμνον τὸ πρῶτον ζεῦγος εἰς τὰ σημεῖα Θ καὶ Η.

Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΘΗ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἔστω ΕΖε τὸ παράλληλον πρὸς τὸ ΑΔα ἐπίπεδον καὶ ΗΘη τὸ παράλληλον πρὸς τὸ ΑΒα ἐπίπεδον. Ὡς εἴδομεν, αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ διαιροῦνται κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ὡς καὶ αἱ ΓΒ καὶ ΔΑ (σχ. 1174).

Τὰ τέσσαρα ταῦτα καὶ παράλληλα ἀνὰ δύο ἐπίπεδα ὁρίζουν τέσσαρας εὐθείας παραλλήλους, τὰς Αα, Εε, Ηη καὶ Ιι.

Ἔστω Ι τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΕΖε καὶ ΗΘη συναντᾷ τὴν ΕΖ, Κ τὸ σημεῖον ὅπου ἡ *ἰδία τομὴ* συναντᾷ τὴν ΘΗ. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι Ιι = Κι· ἐπειδὴ τότε τὰ σημεῖα Ι καὶ Κ θὰ συμπίπτουν εἰς κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων ΕΖ καὶ ΘΗ.

Καλέσωμεν τοὺς λόγους $\frac{BE}{AE}$ καὶ $\frac{\Gamma\Theta}{B\Theta}$ $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{p}{q}$ ἀντιστοίχως· θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{BE}{AB}=\frac{\mu}{\mu+\nu}=\frac{E\varepsilon}{\lambda},\quad \text{ὅθεν } E\varepsilon=\frac{\lambda\mu}{\mu+\nu}. \tag{1}$$

$$\frac{\Gamma\Theta}{B\Gamma}=\frac{p}{p+q}=\frac{H\eta}{\lambda},\quad \text{ὅθεν } H\eta=\frac{\lambda p}{p+q}. \tag{2}$$

Ἀλλ' εἶναι:

$$\frac{Z\iota}{Z\varepsilon}=\frac{\Gamma\Theta}{\Gamma B} \text{ ἢ } \frac{I\iota}{E\varepsilon}=\frac{p}{p+q},\quad I\iota=E\varepsilon\cdot\frac{p}{p+q}=\frac{\lambda\mu p}{(\mu+\nu)(p+q)}$$

καὶ

$$\frac{\Theta\iota}{\Theta\eta}=\frac{\Gamma Z}{\Gamma\Delta} \text{ ἢ } \frac{K\iota}{H\eta}=\frac{\mu}{\mu+\nu},\quad K\iota=H\eta\cdot\frac{\mu}{\mu+\nu}=\frac{\lambda\mu p}{(\mu+\nu)(p+q)}.$$

Συμπίπτουν ἑπομένως τὰ σημεῖα Ι, Κ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΘΗ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ὡς ἔχουσαι κοινὸν σημεῖον.

Ἀντίστροφον θεώρημα 663—Ι

1800. **Πᾶν ἐπίπεδον ΕΖΘΗ, διερχόμενον διὰ δύο σημείων Ε, Ζ διαιρούντων κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον δύο ἀπέναντι πλευρὰς στρεβλοῦ τετραπλεύρου, διαιρεῖ καὶ τὰς ἄλλας δύο πλευρὰς αὐτοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον (διάφορον ἐν γένει τοῦ πρώτου). (Βλ. § 1855 α).**

Θεώρημα 664

1801. **Πᾶν ἐπίπεδον ΕΖΘΗ, διερχόμενον διὰ τῶν μέσων Ε, Ζ δύο ἀπέναντι πλευρῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου, διαιρεῖ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.**

Πρόκειται περὶ πορίσματος τῆς προηγουμένης προτάσεως (§ 1800)· ἐπειδὴ ὅμως εἶναι ἀρκετὰ συχνῆς χρήσεως θεώρημα, δίδομεν μίαν ἀπ' εὐθείας ἀπόδειξιν αὐτοῦ.

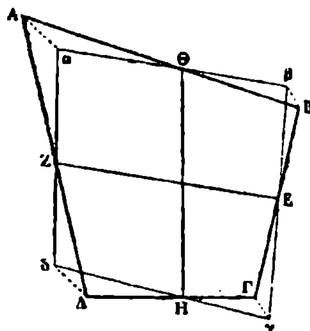
Ἔστω αβγδ (σχ. 1175) τὸ διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ ἀγόμενον ἐπίπεδον, τέμνον τὰς πλευρὰς ΑΓ, ΓΔ εἰς τὰ Θ καὶ Η σημεῖα, καὶ αβγδ ἐπίσης ἡ προβολὴ τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

'Επειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $BE = E\Gamma$, θὰ ἔχωμεν

$$\beta E = \gamma E, \quad B\beta = \Gamma\gamma$$

καθὼς καὶ $\alpha Z = \delta Z, \quad A\alpha = \Delta\delta.$

Αἱ προβάλλουσαι $A\alpha$, $B\beta$, $\Gamma\gamma$, $\Delta\delta$ εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι· ἑπομένως:



Σχ. 1175.

$$\frac{A\Theta}{B\Theta} = \frac{\alpha\Theta}{\beta\Theta} = \frac{A\alpha}{B\beta},$$

$$\frac{\Delta H}{\Gamma H} = \frac{\delta H}{\gamma H} = \frac{\Delta\delta}{\Gamma\gamma}.$$

'Αλλ' εἶναι

$$\frac{A\alpha}{B\beta} = \frac{\Delta\delta}{\Gamma\gamma}.$$

ἄρα

$$\frac{A\Theta}{B\Theta} = \frac{\Delta H}{\Gamma H}.$$

Παρατηρήσεις. Πᾶσα εὐθεῖα, ὡς ἡ ΘΗ, διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς ΕΖ. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμενοι, δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας καὶ τὸ προηγούμενον γενικώτερον ἀντίστροφον θεώρημα καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἀνωτέρω εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις.

Σημείωσις. Τὸ *στρεβλὸν τετράπλευρον* συναντᾶται συχνὰ εἰς τὰς ἐφαρμογάς· αἱ ἀπέναντι αὐτοῦ πλευραὶ κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν - γενετειρῶν, ἀνὰ δύο, τῶν δύο συστημάτων εὐθειῶν ἑνὸς ὑπερβολικοῦ παραβολοειδοῦς.

Βλέπε: *G.*, nos 923 - 943· *Ex. d. G. Descr.*, n° 712 κ. ἑπ. 'Επίσης, *N. A.*, 1892, σ. 41, ὡραίαν σχετικὴν μελέτην τοῦ F. Fargeon.

Θεώρημα 665

1802. Στρεβλὸν πολύγωνον τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου. Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων, τῶν ὁριζομένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου καὶ τῶν σημείων τομῆς καὶ τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουσιν κοινὰ πέρατα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ὑπολοίπων τμημάτων. (Carnot, Géométrie de position).

Διὰ προβολῆς τοῦ σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἀναγόμεθα εἰς γνωστὸν θεώρημα τῆς ἐπιπεδομετρίας (§ 181)· ἐπειδὴ εὑρίσκομεν ἐπίπεδον πολύγωνον αβγδ... τεμνόμενον ὑπὸ εὐθείας εἰς τὰ σημεῖα λ, μ, ν... Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha\lambda}{\beta\lambda}\cdot\frac{\beta\mu}{\gamma\mu}\cdot\frac{\gamma\nu}{\delta\nu}\ldots = 1.$$

ἀλλ' εἶναι:

$$\frac{A\Lambda}{B\Lambda} = \frac{\alpha\lambda}{\beta\lambda}, \quad \frac{BM}{\Gamma M} = \frac{\beta\mu}{\gamma\mu}\ldots$$

"Ωστε:

$$\frac{A\Lambda}{B\Lambda}\cdot\frac{BM}{\Gamma M}\cdot\frac{\Gamma N}{\Delta N}\ldots = 1.$$

Θεώρημα 665—I

1802 α. Πᾶν στρεβλὸν τετράπλευρον, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, εἶναι περιγράψιμον εἰς περιφέρειαν.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ εἴπωμεν: Ἐὰν ἓν στρεβλὸν τετράπλευρον εἶναι περιγεγραμμένον εἰς σφαῖραν, τὰ σημεῖα ἐπαφῆς κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου [95].

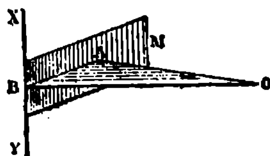
Λύσις ὑπὸ J.-B. Durrande (*A. d. G.*, 1811-1815, σ. 49 καὶ 52).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Τόπος 666

1803. Ἐκ σημείου Ο φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰ διάφορα ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ δοθείσης εὐθείας XY. Ποῖος ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν τούτων;

Ἔστω ΟΑ ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ τυχὸν διὰ τῆς XY ἐπίπεδον Μ καὶ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν XY. Ἕνεκα τοῦ θεωρήματος τῶν τριῶν καθέτων, ἡ εὐθεῖα ΟΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν XY καὶ ἡ τελευταία αὕτη εὐθεῖα, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὰς ΒΟ καὶ ΒΑ εὐθείας, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν των ΑΒΟ.



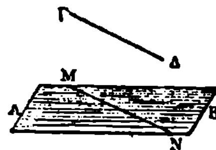
Σχ. 1176.

Εἶναι, ἑπομένως, ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν ΟΑ, *τὸ διὰ τοῦ σημείου* Ο *κάθετον ἐπίπεδον* (Π) *ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν* XY.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ ἡ ὑποτείνουσα ΟΒ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒΑ εἶναι σταθερὰ διὰ πᾶσαν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου Μ, ὁ τόπος τῶν ποδῶν Α τῶν ἐκ τοῦ Ο ἀγομένων καθέτων ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα Μ, εἶναι περιφέρεια κύκλου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἔχουσα διάμετρον τὴν ΟΒ.

Τόπος 667

1804. Δίδονται δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, τρίτη δὲ ΜΝ τέμνει τὴν πρώτην καὶ παραμένει παράλληλος πρὸς τὴν δευτέραν. Ποῖος ὁ τόπος τῆς εὐθείας ΜΝ;



Σχ. 1177.

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΜΝ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι, πᾶν ἐπίπεδον ἀγόμενον διὰ τῆς ΜΝ εἶναι παράλλη-

---

95. Σημ. μετ. Ἐπειδὴ ἂν Α', Β', Γ', Δ' εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς σφαίρας καὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως τοῦ τετραπλεύρου, θὰ εἶναι

$$AA' = A\Delta', \quad BA' = BB' \quad \text{κλπ.}$$

καὶ κατ' ἄμεσον ἐφαρμογὴν τοῦ προηγουμένου (§ 1802) θεωρήματος, ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ' κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου.

Παράβλ.: § 1943 α.

λον πρὸς τὴν ΓΔ· εἰς μίαν δὲ τυχοῦσαν θέσιν τῆς ΜΝ τὸ ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ΑΒ ὁριζόμενον ἐπίπεδον ΜΝΑΒ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ.

'Αλλὰ τὸ τελευταῖον τοῦτο ἐπίπεδον εἶναι σταθερόν· ἄρα τοῦτο εἶναι καὶ ὁ τόπος τῆς κινητῆς εὐθείας ΜΝ.

Τόπος 668

1805. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ;

Εἶναι ἐπίπεδον παράλληλον πρὸν αὐτὰ καὶ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς καθέτου ἀποστάσεως τῶν δύο ἐπιπέδων.

'Επειδὴ πᾶσα κάθετος ἐπὶ τὰ τρία ἐπίπεδα διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ μεσαίου εἰς δύο ἴσα μέρη.

Τόπος 669

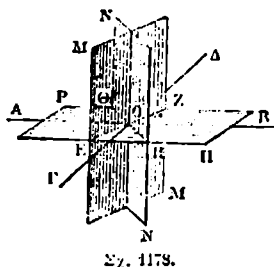
1806. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων δύο τεμνομένων ἐπιπέδων;

Εἶναι τὸ ζεῦγος τῶν διχοτομούντων ἐπιπέδων τὰς διέδρους τὰς ὁριζομένας ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων. 'Επειδὴ τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον δίεδρον εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου.

Τόπος 670

1807. Ποῖος ὁ τόπος τῶν παραλλήλων πρὸς ἐπίπεδον Π καὶ ἀγομένων ἐκ δοθέντος σημείου Ο;

Εἶναι τὸ διὰ τοῦ Ο παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς τὸ Π.



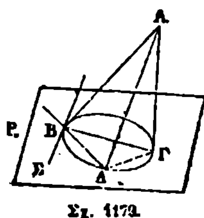
Σχ. 1178.

Τόπος 671

1808. Τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων δύο τεμνομένων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

Ἔστω ΡΠ τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν. 'Ο πλήρης τόπος ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ζεύγους τῶν ἐπιπέδων, τῶν ἀγομένων καθέτως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΡΠ καὶ διὰ τῶν διχοτόμων ΕΖ, ΘΗ τῶν γωνιῶν ἃς σχηματίζουν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι.

Τόπος 672



Σχ. 1179.

1809. Δίδεται ἐπίπεδον Ρ, σημεῖον Β αὐτοῦ καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου. Ποῖος ὁ τόπος τῶν προβολῶν τοῦ Α ἐπὶ τὰς διαφόρους εὐθείας τοῦ Ρ, τὰς διερχομένας διὰ τοῦ Β;

Ἔστω Γ ὁ πούς τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου ἐπὶ τὸ Ρ καὶ Δ ὁ πούς τῆς ἐπὶ τῆς τυχούσης διὰ τοῦ Β εὐθείας. Τὸ σημεῖον Γ ἀνήκει εἰς τὸν τόπον, ὡς καὶ τὸ σημεῖον Β. 'Επειδή, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν

καθέτων, ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΕ, καθέτου ἐπ τὴν ΑΓ.

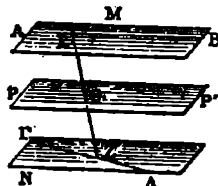
Ἐπειδὴ δέ, κατὰ τὸ ἴδιον θεώρημα, ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι ὀρθή, ὁ ζητούμενος τόπος ἀποτελεῖται ἐκ τῆς περιφερείας τοῦ ἐπιπέδου Ρ, τῆς ἐχούσης διάμετρον ΒΓ.

Τόπος 673

1810. **Τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα κεῖνται ἐπὶ δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ τοῦ χώρου (ἀσυμβάτων ἐν γένει).**

Διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ δυνάμεθα νὰ ἀγάγωμεν δύο ἐπίπεδα Μ, Ν παράλληλα.

Τὸ ἐπίπεδον Ρ, εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν Μ καὶ Ν, εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος· ἐπειδὴ ἐπὶ τούτου κεῖνται τὰ μέσα ὅλων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΕΖ, τῶν ἀγομένων ἀπὸ σημείων τοῦ ἐπιπέδου Μ πρὸς σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου Ν.

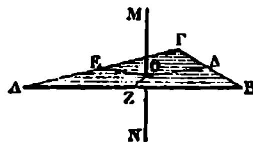


Σχ. 1180.

Τόπος 674

1811. **Τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων τριῶν σημείων Α, Β, Γ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων.**

Εἶναι ἡ κάθετος ΟΜ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἰς τὸ κέντρον Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.



Σχ. 1181.

1812. *Ἄλλος τρόπος ἀποδείξεως.* Φέρομεν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ εἰς τὰ μέσα αὐτῶν. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΟΜ.

Τόπος 675

1813. **Ποῖος ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν σταθεροῦ μήκους 2λ εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα κινοῦνται ἐπὶ δύο δοθεισῶν ὀρθογωνίων καὶ ἀσυμβάτων εὐθειῶν;**

Ἔστωσαν (ε) καὶ (η) αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι, $AB = 2\delta$ ἡ κοινὴ αὐτῶν κάθετος (η′), (ε′) αἱ ἐκ τῶν Α καὶ Β παράλληλοι πρὸς τὰς (η) καὶ (ε) εὐθείας, ἀντιστοίχως. Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Σ τῶν (ε), (η′) καὶ (ε′), (η) εἶναι παράλληλα.

Ἐὰν Μ′ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ ἄκρου Μ τοῦ κινητοῦ τμήματος ΜΝ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (η′), τὸ τρίγωνον ΜΜ′Ν εἶναι προφανῶς ὀρθογώνιον εἰς Μ′ καὶ σταθεροῦ μεγέθους, ἀφοῦ $MN = 2\lambda$ καὶ $MM' = 2\delta$. Εἶναι ἑπομένως καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ Μ′Ν σταθεροῦ μήκους, ἔστω 2μ.

Ἔστω τώρα Ρ τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΜΝ καὶ Ρ′ ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, δηλ. τὸ μέσον τῆς Μ′Ν. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ρ κεῖται προφανῶς ἐπὶ τοῦ παραλλήλου πρὸς τὰ Π καὶ Σ ἐπίπεδα καὶ καθέτου εἰς τὸ μέσον Ο τῆς ΑΒ ἐπιπέδου Τ, ἀφ'

ἑτέρου δὲ τὸ σχῆμα ΟΑΡ'Ρ εἶναι παραλληλόγραμμον, θὰ ἔχωμεν

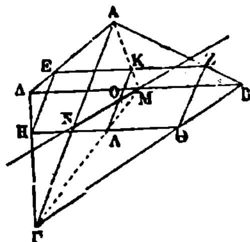
ΟΡ = ΑΡ' = μ,

ἀφοῦ ἡ ΑΡ' εἶναι διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Μ'ΑΝ.

Γράφει κατὰ συνέπειαν τὸ σημεῖον Ρ τὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Τ περιφέρειαν κύκλου, μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα μ ([96]).

Τόπος 676

1814. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν παραλληλογράμμων τῶν ἐγγραφομένων εἰς δοθὲν στρεβλὸν τετράπλευρον;



Σχ. 1183.

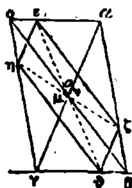
Εἶναι ἡ εὐθεῖα ΜΝ, ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόδειξις δὲν διαφέρει ἐκείνης τοῦ ἀντιστοίχου προβλήματος τῆς ἐπιπεδομετρίας. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΑΒ, ΔΒ, ΕΖ, ΑΜ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἡ διάμεσος, ἐπομένως, ΑΜ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Κ τῆς ΕΖ.

Ὁμοίως, ἡ ΓΜ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Λ τῆς ΘΗ.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ σημεῖον Ο, τομὴ τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου ΕΒΘΗ, εἶναι μέσον τῆς ΚΛ, παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΓ, εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ τόπος αὐτοῦ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΜΝ, διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΜΓ.

1815. Ἄλλη ἀπόδειξις. Προβάλλομεν τὸ σχῆμα ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ΜΝ καὶ διὰ τοῦ Ο διερχομένου.



Σχ. 1184.

Ἐπειδὴ αἱ προβολαὶ τμημάτων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἶναι ἀνάλογοι τῶν τμημάτων αὐτῶν, καὶ ΒΜ = ΔΜ, ΑΝ = ΓΝ, ἡ προβολὴ αβγδ τοῦ ΑΒΓΔ τετραπλεύρου θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον, μὲ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του τὸ Ο (σχ. 1184).

Ἀφ' ἑτέρου καὶ ἡ προβολὴ εζθη τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΘΗ θὰ εἶναι ἐπίσης παραλληλόγραμμον, ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ αβγδ καὶ μὲ πλευρὰς παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ αβγδ.

Τέμνονται ἄρα αἱ διαγώνιοι εθ, ηζ τοῦ παραλληλογράμμου τούτου εζθη εἰς τὸ σημεῖον Ο καὶ ἐπομένως καὶ αἱ διαγώνιοι ΕΘ, ΖΗ τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΘΗ θὰ τέμνωνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΜΟΝ, τῆς συνδεούσης τὰ μέσα Μ, Ν τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

1816. Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις διὰ τῶν προβολῶν δύναται νὰ χρησιμεύσῃ πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόπου, εἰς τὸ ἐπίπεδον, τῶν σημείων τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν ἐγγραφομένων εἰς δοθὲν τετράπλευρον παραλληλογράμμων.

---

96. Σημ. μετ. Ἐθεωρήσαμεν μᾶλλον ἐποπτικὴν τὴν ἀπόδειξιν ταύτην τῆς τοῦ κειμένου.

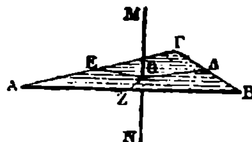
Ἐπειδὴ ὁ τόπος οὗτος εἶναι ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας ΜΟΝ ἐπὶ ἐπίπεδον (ἐφ' οὗ καὶ τὸ δοθὲν τετράπλευρον) μὴ κάθετον ἐπὶ τὴν ΜΟΝ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 677

1817. **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δοθέντος σημείου Μ ἀπὸ δοθέντος ἐπιπέδου Π.**

Τῇ βοηθείᾳ νήματος ἐπαρκοῦς μήκους καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον σταθεροποιοῦμεν εἰς τὸ σημεῖον Μ, σημειοῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ὑψοῦμεν καθέτους εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του, τεμνομένας εἰς σημεῖον Ο.



Σχ. 1185.

Ἡ εὐθεῖα ΜΟ εἶναι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις. Ἐπειδὴ οἱ πόδες τῶν ἴσων πλαγίων ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ ἴσον ἀπέχουν τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου· εἶναι δὲ τοῦτο τὸ σημεῖον Ο, ὡς τὸ μόνον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π δι' ὃ ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ. Εἶναι λοιπὸν ἡ ΜΟ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ τὸ μῆκος αὐτῆς ἡ ζητουμένη ἀπόστασις.

Πρόβλημα 678

1818. **Ἡ κορυφὴ ἑνὸς κωδωνοστασίου ἔχει σχῆμα κανονικῆς στερεᾶς ὀκταεδρικῆς γωνίας καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν εἶναι 90°. Ζητεῖται ἡ τιμὴ ἑκάστης τῶν παρὰ τὴν βάσιν τῆς γωνίας ταύτης γωνιῶν τῶν ἑδρῶν.**

Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν 8 τριγώνων . . . $2 \times 8 = 16$ ὀρθαί.

Ἄθροισμα τῶν 8 γωνιῶν εἰς τὴν κορυφὴν . . . 1 ὀρθή.

Ἄθροισμα τῶν 16 ἴσων γωνιῶν παρὰ τὴν βάσιν $16 - 1 = 15$ ὀρθ.

Τιμὴ ἑκάστης τούτων . . . $\frac{15}{16}$ ὀρθῆς ἢ 84°22'30''.

Πρόβλημα 679

1819. **Τὸ ἄθροισμα τῶν 8 ἑδρῶν τῆς στερεᾶς γωνίας εἰς τὴν κορυφὴν ἑνὸς κωδωνοστασίου δύναται νὰ μεταβάλλεται ἀπὸ 0° ἕως 360°. Ζητεῖται μεταξὺ τίνων ὁρίων μεταβάλλεται τὸ ἄθροισμα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τῶν ἑδρῶν.**

Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν 8 ἑδρῶν . . . $8 \times 2 = 16$ ὀρθαί.

» Σ τῶν 8 γωνιῶν εἰς τὴν κορυφὴν $0 < \Sigma < 4$ ὀρθῶν.

» S τῶν 16 γωνιῶν παρὰ τὴν βάσιν $12 < S < 16$ ὀρθῶν.

Δηλαδὴ $1080° < S < 1440°$.

Πρόβλημα 679—Ι

1820. Ποῖα τὰ ἴδια ὅρια εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν μιᾶς ν—ἑδρικῆς στερεᾶς γωνίας;

Ἄθροισμα γωνιῶν τῶν ν ἑδρῶν . . . 2ν ὀρθαί,

$$0 < \Sigma < 4 \text{ ὀρθῶν},$$

καὶ

$$2\nu - 4 < S < 2\nu \text{ ὀρθῶν}.$$

Πρόβλημα 680

1821. Ἀπὸ τῆς ὀροφῆς αἰθούσης ὕψους υ ἐξαρτῶμεν νῆμα μήκους $\lambda > \upsilon$. Διὰ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου τοῦ νήματος καὶ κρατοῦντες αὐτὸ τεταμένον, γράφομεν περιφέρειαν ἐπὶ τοῦ δαπέδου. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τούτου;

Ἔστω ρ ἡ ἀκτίς του. Ἐκ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τριγώνου, μὲ καθέτους πλευρὰς υ, ρ καὶ ὑποτείνουσαν λ, θὰ ἔχωμεν,

$$\rho^2 = \lambda^2 - \upsilon^2$$

καὶ

$$E = \pi\rho^2 = \pi(\lambda^2 - \upsilon^2)$$

Πρόβλημα 680—Ι

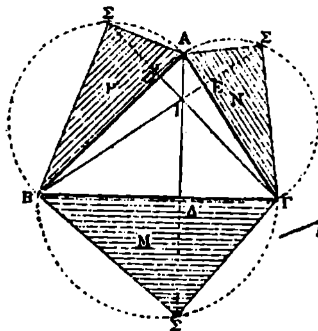
1821 α. Εὐθεῖα ΑΡ=υ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π εἰς τὸ σημεῖον Α αὐτοῦ. Μὲ κέντρον τὸν πόδα τῆς καθέτου γράφομεν εἰς τὸ Π περιφέρειαν ἀκτῖνος ρ καὶ εἰς σημεῖον Β τῆς περιφερείας ταύτης φέρομεν ἐφαπτόμενον τμῆμα ΒΓ μήκους τ. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις ΡΓ.

Θὰ ἔχωμεν

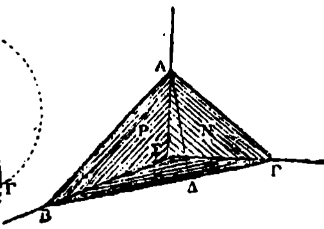
$$P\Gamma^2 = \upsilon^2 + A\Gamma^2 = \upsilon^2 + \rho^2 + \tau^2.$$

Πρόβλημα 681

1822. Νὰ τμηθῇ τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία κατὰ τρίγωνον ΑΒΓ ἴσον πρὸς δοθὲν ἄλλο Α΄Β΄Γ΄.



Σχ. 1166.



Σχ. 1167.

Τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία εἶναι τρίεδρος μὲ ἕδρας ὀρθὰς γωνίας.

Καταφεύγομεν εἰς τὸ *ἀντίθετον πρόβλημα* (§ 213).

Ἐπὶ τῆς ἕδρας Μ (σχ. 1187) φέρομεν εὐθεῖαν ΣΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, εἰς δὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν ΑΔ, κάθετον, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων, ἐπὶ τὴν ΒΓ. Εἶναι ἑπομένως ἡ ΑΔ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἡ ΣΔ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΣΒΓ.

Εἶναι οὕτω ὡρισμένον τελείως τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΣΓ, ἐπειδὴ εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ΒΓ καὶ ὁ πούς τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους Δ, ὡς συμπίπτοντα ἀντιστοίχως μὲ τὴν πλευρὰν Β'Γ' τοῦ δοθέντος τριγώνου καὶ τὸν πόδα Δ' τοῦ ἐπὶ τὴν Β'Γ' ὕψους αὐτοῦ.

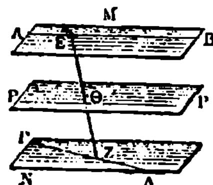
Μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου ΣΒΓ, μεταφέρομεν τὰ μήκη ΣΒ, ΣΓ ἐπὶ δύο τῶν ἀκμῶν τοῦ τριέδρου. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμενοι, εὑρίσκομεν καὶ τὴν τρίτην ἀκμὴν ΣΑ (σχ. 1186) καὶ οὕτω ἡ ζητουμένη τομὴ ΑΒΓ καὶ τοῦ δοθέντος τριέδρου εὑρίσκεται τελείως καθωρισμένη.

1823. Παρατήρησις. Τὸ *ἀντίθετον* πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἐχρειάσθη νὰ λύσωμεν προηγουμένως, παρουσιάζει μέγα ἐνδιαφέρον, ἐπειδὴ εἶναι θεμελιῶδες εἰς τὴν θεωρίαν τῆς *ἀξονομετρικῆς προοπτικῆς*. (*Géométrie Descriptive*, n° 601 καὶ ἑπμ.)

Ὑπάρχουν δύο μόνον λύσεις τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος καὶ συμμετρικαὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Πράγματι, ὁ τόπος τῶν σημείων Σ, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ γωνία ΑΣΒ εἶναι ὀρθή, εἶναι ἡ σφαῖρα μὲ διάμετρον ΑΒ. Ὁμοίως, τὸ σημεῖον Σ πρέπει νὰ ἀνήκῃ καὶ εἰς τὰς σφαίρας μὲ διαμέτρους ΒΓ καὶ ΓΑ, αἱ δὲ τρεῖς αὗται σφαῖραι τέμνονται ἀνὰ δύο κατὰ περιφερείας τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Αἱ τομαὶ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ τῆς τυχούσης τῶν τριῶν σφαιρῶν, ὁρίζουν δύο σημεῖα Σ, Σ', συμμετρικὰ πρὸς τὸ ΑΒΓ καὶ κορυφὰς δύο τρισορθογωνίων τριέδρων ΣΑΒΓ, Σ'ΑΒΓ, κατὰ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 682

1824. Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ ἐν τῷ χώρῳ, νὰ ἀχθῇ, ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς αὐτὰς καὶ ἴσον αὐτῶν ἀπέχον.



Σχ. 1188.

Διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς εὐθείας ΓΔ καὶ ΑΒ, ἀντιστοίχως.

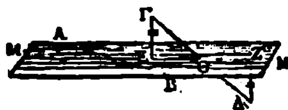
Ταῦτα εἶναι παράλληλα πρὸς ἄλληλα καὶ τὸ παράλληλον πρὸς αὐτὰ ἐπίπεδον ΡΡ καὶ ἰσαπέχον τούτων εἶναι τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα 683

1825. Δι' εὐθείας ΑΒ νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ δύο σημείων Γ καὶ Δ.

Ἔστω Μ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο· αἱ κάθετοι ΓΕ, ΔΖ πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἐπειδὴ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τὰ τρίγωνα ΓΕΘ, ΔΖΘ θὰ εἶναι προφανῶς ἴσα. Ἑπομένως ΓΘ = ΘΔ. Εἶναι ἄρα ὡρισμένον τὸ ἐπίπεδον Μ, ὡς διερ-

χόμενον διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ μέσου Θ τῆς ἀποστάσεως ΓΔ τῶν δοθέντων σημείων.



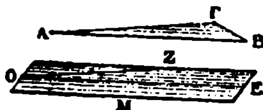
Σχ. 1189.

Ὑπάρχει φυσικὰ καὶ δευτέρα λύσις: τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀγόμενον διὰ τῆς ΑΒ καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ.

Πρόβλημα 684

1826. Διὰ δοθέντος σημείου Ο, νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τριῶν δοθέντων σημείων Α,Β,Γ.

Διὰ τοῦ σημείου Ο φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν τριῶν δοθέντων σημείων καὶ ἰσαπέχον ἑπομένως αὐτῶν.



Σχ. 1190.

Διερεύνησις. 1) Ἐὰν τὰ τέσσαρα δοθέντα σημεῖα κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, πᾶν ἐπίπεδον διὰ τῆς εὐθείας αὐτῶν ἀπαντᾷ εἰς τὸ πρόβλημα.

2) Ἐὰν τὰ τρία σημεῖα Α,Β,Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, πᾶν ἐπίπεδον διὰ τοῦ Ο καὶ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒΓ ἀπαντᾷ ἐπίσης εἰς τὸ πρόβλημα.

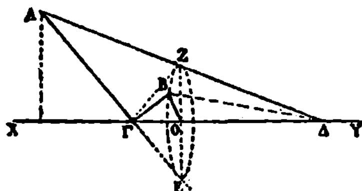
Εἰς τὰς δύο ταύτας περιπτώσεις τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον.

3) Ἐὰν τὰ τέσσαρα σημεῖα κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον.

4) Ἐὰν τὰ τέσσαρα σημεῖα εἶναι κορυφαὶ στρεβλοῦ τετραπλεύρου, ὑπάρχουν τέσσαρες λύσεις. Πρῶτον ἡ ἀνωτέρω δοθεῖσα καὶ ὕστερον τρεῖς ἄλλαι· ἑκάστη τῶν τελευταίων τούτων ὁρίζεται διὰ τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ἀγομένου διὰ τοῦ σημείου Ο καὶ μιᾶς ἐκ τῶν ἑνουσῶν εὐθειῶν τὰ μέσα δύο τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 685

1827. Δίδονται εὐθεῖαι ΧΥ καὶ δύο τυχόντα σημεῖα Α,Β τοῦ χώρου. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΧΥ σημεῖον Γ, δι' ὃ τὸ ἄθροισμα ΓΑ + ΓΒ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον, καὶ σημεῖον Δ, δι' ὃ ἡ διαφορὰ ΔΑ − ΔΒ νὰ εἶναι ἡ μεγίστη.



Σχ. 1191.

Ὑποθέτομεν τὰ σημεῖα Α, Β καὶ τὴν εὐθεῖαν ΧΥ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διὰ τοῦ σημείου Β φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΧΥ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα ΟΒ, τῆς ὁποίας ἔστω ΕΖ ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Α, ΧΥ) κειμένη διάμετρος.

Ἀναλόγως ἐργαζόμενοι πρὸς τὰ ὅμοια προβλήματα εἰς τὴν ἐπιπεδομετρίαν, φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΓΕ καὶ ΑΒΔ.

ΑΓ + ΓΕ ἢ ΑΓ + ΓΒ εἶναι τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα.

ΑΔ − ΖΔ ἢ ΑΔ − ΒΔ εἶναι ἡ μεγίστη διαφορὰ ΑΖ· ἐπειδή, διὰ πᾶν ἄλλο σημεῖον Τ τῆς ΧΥ θὰ ἐσχηματίζετο τρίγωνον ΑΤΖ δι' ὃ

$$AT - TZ < AZ.$$

Παρατήρησις. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα διὰ τὸν καθορισμὸν ἐπὶ τῆς XY σημείου, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰ A καὶ B θὰ εἶναι δοθὲν τετράγωνον k^2.

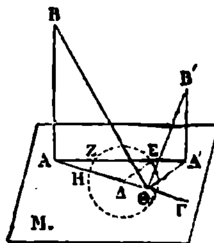
Γενικῶς, εἶναι προτιμότερον νὰ ὑποδεικνύωμεν τὴν λύσιν τῶν διαφόρων προβλημάτων εἰς τὸν χῶρον καὶ νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὴν παραστατικὴν Γεωμετρίαν διὰ τὰς κατασκευάς.

Πρόβλημα 685—I

1828. **Δύο εὐθεῖαι AB, A'B' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον M, εἰς δοθέντα σημεῖα A καὶ A' αὐτοῦ. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι τὸ μῆκος τῆς AB εἶναι διπλάσιον τοῦ μήκους τῆς A'B'.**

Διὰ τοῦ σημείου A φέρομεν εὐθεῖαν ΑΓ τοῦ M, σχηματίζουσαν μετὰ τῆς AA' γωνίαν δοθεῖσαν. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ σημεῖον Θ, ἐξ' οὗ τὰ τμήματα AA' καὶ BB' νὰ φαίνωνται ὑπὸ ἴσας γωνίας. Νὰ γίνῃ καὶ περιληπτικὴ διερεύνησις τοῦ προβλήματος.

(Εἰσαγωγικαὶ ἐξετάσεις εἰς τὴν École spéciale militaire, 1876).



Σχ. 1192.

Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Δ τῆς ΑΓ καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς ΑΔ, γράφομεν περιφέρειαν, τέμνουσαν τὴν AA' εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Z, καὶ διὰ τοῦ A' φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΕΔ.

Ἡ τομὴ Θ ταύτης καὶ τῆς ΑΔ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον. Πράγματι, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΔΕ, ΑΘΑ' προκύπτει ὅτι, ἀφοῦ $ΑΔ = 2\,ΔΕ$, θὰ εἶναι καὶ $ΑΘ = 2 . ΘΑ'$ καὶ ἑπομένως ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΘ καὶ Β'Α'Θ θὰ εἶναι ἐπίσης ὅμοια. Ἐπειδὴ θὰ εἶναι

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{1} = \frac{AΘ}{ΘA'},$$

καὶ κατὰ συνέπειαν $\widehat{AΘB} = \widehat{A'ΘB'}$.

Διερεύνησις. Ἡ γραφεῖσα περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς AA' ἐὰν $\widehat{ΓAA'} = φ = 30°$. Ἐὰν $φ < 30°$, ὑπάρχουν δύο λύσεις, μία ἐὰν $φ = 30°$ καὶ οὐδεμία διὰ $φ > 30°$.

Παρατήρησις. Γενικεύοντες, παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν ὁ λόγος τῶν μηκῶν A'B' καὶ AB ἦτο $\frac{μ}{ν}$, ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας (Δ) θὰ ἐλαμβάνετο ἴση πρὸς $ΑΔ . \frac{μ}{ν}$. Τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΘ, Β'Α'Θ θὰ ἦσαν πάλιν ὅμοια κλπ.

Πρόβλημα 685—II

1829. **Νὰ προβληθοῦν ἐπὶ ἐπίπεδον δύο ἐπίπεδα καὶ ὅμοια σχήματα, καθ' οἱανδήποτε θέσιν ἐν τῷ χώρῳ κείμενα, κατὰ δύο σχήματα ἐπίσης ὅμοια.**

Τὸ πρόβλημα ἐξετάζεται καὶ καταλλήλως ἀναπτύσσεται εἰς τὸ VI βιβλίον καὶ ὑπὸ μορφὴν θεωρήματος. (Ἄσκησις 699, I, II § 1846α, 1846 δ).

Ἐπίσης § 2515, 2, ὡς καὶ διαφόρους σχετικὰς σημειώσεις εἰς *J. d. M. Élémentaires et spéciales* τοῦ G. Longchamps (1895).

ΒΙΒΛΙΟΝ VI

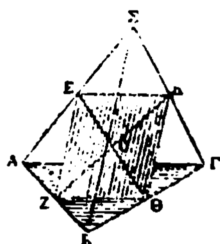
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Γεωμετρία Θέσεως

Θεώρημα 686

1830. **Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν παντὸς τετραέδρου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ἀλληλοδιχοτομοῦνται.**

Θεωροῦμεν κατ' ἀρχὰς δύο ἐξ αὐτῶν π. χ. τὰς ΔΖ καὶ ΕΘ. Φέρομεν τὰς ΔΕ καὶ ΖΘ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΣΓ ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς· ὁμοίως. εἰς τὸ τριγωνον ΑΒΓ ἡ εὐθεῖα ΖΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἴση πάλιν πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς.



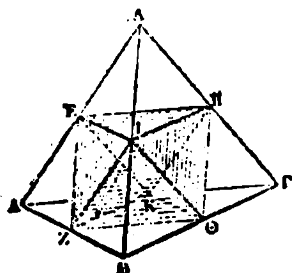
Σχ. 1193.

Ἐπομένως τὸ σχῆμα ΔΕΖΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, μὲ διαγωνίους τὰς ΔΖ καὶ ΕΘ καὶ ὡς ἐκ τούτου αἱ εὐθεῖαι αὗται θὰ ἀλληλοδιχοτομοῦνται· ἡ δὲ τρίτη εὐθεῖα, ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν ΣΒ καὶ ΑΓ, θὰ τάμη τὴν ΔΖ εἰς τὸ μεσον της. διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἐπομένως καὶ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Παρατήρησις. Αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΣ καὶ ΑΣ, αἵτινες δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἀποτελοῦν τὴν περίμετρον ἑνὸς στρεβλοῦ τετραπλεύρου. Ἔχομεν δὲ ἀποδείξει (§ 1792), ὅτι *τὰ μέσα τῶν πλευρῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.*

Θεώρημα 687

1831. **Τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν παντὸς κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταέδρου.**



Σχ. 1194.

Πράγματι, αἱ εὐθεῖαι, αἱ ἑνοῦσαι τὸ μέσον Ι οἱασδήποτε ἀκμῆς, ἔστω τῆς ΔΒ, μὲ τὰ τέσσαρα σημεῖα Ε, Ζ, Θ καὶ Η εἶναι ἴσαι, διότι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀκμῆς τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου. Ἐπομένως, τὰ σχηματιζόμενα ὀκτὼ τρίγωνα εἶναι ἰσόπλευρα καὶ ἴσα μεταξύ των.

Οὕτω λοιπὸν τὸ ΕΖΘΗΙΚ εἶναι ἓν κανονικὸν ὀκτάεδρον.

Θεώρημα 687—I

1832. 1) Τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν παντὸς τετραέδρου εἶναι κορυφαὶ ὀκταέδρου ἔχοντος τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους.

2) Ὁ ὄγκος τοῦ ὡς ἄνω ὀκταέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τετραέδρου ἐκ τοῦ ὁποίου προέκυψεν.

Πράγματι, ἡ πυραμὶς ΔΕΙΗ εἶναι τὸ ὄγδοον τῆς ΔΑΒΓ, διότι ἑκάστη τῶν ἀκμῶν τῆς πρώτης εἶναι τὸ ἥμισυ ἑκάστης ἀκμῆς τῆς δευτέρας. Ἑπομένως οἱ ὄγκοι τῶν δύο πυραμίδων εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν· ὁμοίως $(\Gamma\Theta I H) = \frac{1}{8}(\Gamma B A \Delta)$ κλπ.

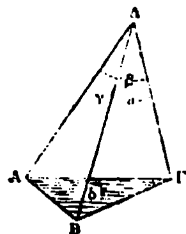
ἄρα τὸ ὀκτάεδρον θὰ ἰσοῦται πρὸς $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ τοῦ (ΑΒΓΔ).

1832 α. ***Σημείωσις.*** Ὑπάρχουν πέντε εἴδη κανονικῶν κυρτῶν πολυέδρων, ἀλλ' ἐκτὸς τούτων ὑπάρχουν καὶ ἄλλα *τέσσαρα κανονικὰ πολύεδρα μὴ κυρτά*. Ταῦτα ἔχουν τὸ πρῶτον ἐπινοηθῆ ἀπὸ τὸν Poinsot καὶ ἐμελετήθησαν αἱ ἰδιότητές των ἀπὸ τοὺς Cauchy καὶ J. Bertrand. (Βλ. *Traité de Géométrie élémentaire*, ὑπὸ Rouché καὶ Comberousse, nº 913).

Θεώρημα 688

1833. Εἰς πᾶν τετράεδρον, τὰ ἓξ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα τὰς διέδρους γωνίας, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ σημεῖον τοῦτο ἴσον ἀπέχει τῶν ἑδρῶν τοῦ στερεοῦ.

Γνωρίζομεν ὅτι τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς διέδρους γωνίας πάσης τριέδρου διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας (§ 1786). Θεωρήσωμεν τὴν τριεδρον Δ τοῦ στερεοῦ· τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς διέδρους της θὰ διέρχωνται διά τινος εὐθείας ΔΧ, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἴσον θὰ ἀπέχουν τῶν ἑδρῶν τῆς Δ, α, β, γ. Τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὴν τρίεδρον Α· ταύτης ὁμοίως τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα θὰ διέρχωνται διὰ εὐθείας ΑΥ, τῆς ὁποίας ὅλα ἐπίσης τὰ σημεῖα ἴσον θὰ ἀπέχουν τῶν ἑδρῶν β, γ, δ.



Σχ. 1195.

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν ΔΧ καὶ ΑΥ ἴσον ἀπέχουν τῶν ἑδρῶν β καὶ γ, αἱ εὐθεῖαι αὗται θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διχοτομοῦντος τὴν δίεδρον ΑΔ, ἣν σχηματίζουν αἱ ἕδραι καὶ ἥτις εἶναι κοινὴ ἀμφοτέρων τῶν στερεῶν γωνιῶν Α καὶ Δ. Κεῖνται ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ΔΧ καὶ ΑΥ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τέμνονται, καὶ τὸ σημεῖον τομῆς των Ι ἴσον ἀπέχει τῶν ἑδρῶν α,β,γ καὶ δ.

1833 α. *Παρατήρησις.* Τὸ κοινὸν σημεῖον Ι τῶν ἓξ διχοτομούντων ἐπιπέδων τὰς ἓξ διέδρους τοῦ τετραέδρου, ὡς ἴσον ἀπέχον τῶν τεσσάρων ἑδρῶν τοῦ στερεοῦ, εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τετράεδρον σφαίρας.

Θεωροῦντες τὰ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα τὰς παραπληρωματικὰς τῶν διέδρων τοῦ στερεοῦ, λαμβάνομεν παρεγγεγραμμένας σφαίρας εἰς τοῦτο· τέσσαρες ἐξ αὐτῶν ἐφάπτονται τῆς ἕδρας ΒΓΔ λ.χ. καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν τριῶν ἑδρῶν τῆς γωνίας Α.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ θεωρήσωμεν τὰς σφαίρας, τὰς ἐφαπτομένας τῶν σχημάτων, ὡς τὸ ἔχον ἕδρας Γ'ΒΔ', Γ''ΑΔ'', Γ'ΒΑΓ'', Δ'ΒΑΔ'' καὶ τοῦ ὁποίου ἀκμαὶ εἶναι αἱ προεκτάσεις ΒΓ', ΒΔ', ΑΓ'', ΑΔ'' τῶν ἀκμῶν ΓΒ, ΔΒ, ΓΑ, ΔΑ τοῦ τετραέδρου (97).

Θεώρημα 689

1834. Ἐὰν εἰς τὸ μέσον ἑκάστης ἀκμῆς τυχόντος τετραέδρου φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτήν, τὰ ἓξ οὕτως ἀγόμενα ἐπίπεδα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ ἴσον ἀπέχουν τῶν ἄκρων αὐτῆς Α καὶ Β, τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὰ ἐπίπεδα τὰ ἀγόμενα καθέτως εἰς τὰ μέσα τῶν ΑΓ, ΒΔ. Ἑπομένως, τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων τούτων ἴσον ἀπέχει τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ καὶ Δ. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι καὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ ἀγόμενα καθέτως εἰς τὰ μέσα ἑκάστης τῶν ἀκμῶν ΔΓ, ΒΔ καὶ ΑΔ διέρχονται διὰ τοῦ προηγουμένου σημείου.

Θεώρημα τοῦ Darboux 689—I

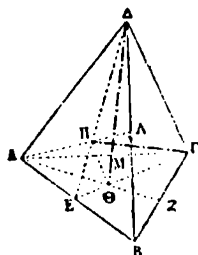
1834 α. Πᾶν τετράεδρον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ ἑξάεδρα συμμετρικά.

Ἄς εἶναι Ι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμένης εἰς τὸ τετράεδρον καὶ α,β,γ,δ, αἱ προβολαὶ τοῦ Ι ἐπὶ τὰς ἕδρας ΒΓΔ, ΓΔΑ, ΔΑΒ καὶ ΑΒΓ.

Τὸ τετράεδον χωρίζεται εἰς τὰ ἑξῆς ἓξ ἑξάεδρα: ΙΑΒγδ, ΙΒΓδα ΙΓΑβδ, ΙΑΔβγ, ΙΒΔγα καὶ ΙΓΔαβ. Ἕκαστον τούτων π.χ. τὸ ΙΑΒγδ, ἔχει ἐπίπεδον συμμετρίας τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον ΑΒ. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, διαιρεῖ τὸ ἑξάεδρον εἰς δύο τετράεδρα δΙΑΒ καὶ γΙΑΒ· τὰ τετράεδρα ταῦτα εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΙΑΒ, ἑπομένως τὸ ζεῦγος αὐτῶν δηλ. τὸ ἑξάεδρον δΙΑΒγ ἔχει ἐπίπεδον συμμετρίας τὸ ΙΑΒ (98).

Θεώρημα τοῦ Commandino 690

1835. **Αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, αἱ ἑνοῦσαι ἑκάστην κορυφὴν τετραέδρου μετὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαμέσων τῆς ἀπέναντι τῆς κορυφῆς ταύτης ἕδρας διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου· τὸ σημεῖον δὲ αὐτὸ διαιρεῖ ἑκάστην τῶν εὐθειῶν τούτων εἰς τὰ $^3/_4$ τοῦ μήκους της ἀπὸ τῆς ἀντιστοίχου κορυφῆς.**



Σχ. 1106.

Ἄς εἶναι Θ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ Η τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΔ. Φέρομεν τὰς ΔΘ καὶ ΓΗ. Αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Μ, διότι ἀνήκουν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΔΕΓ. Ἐπειδὴ δὲ

$$\frac{ΕΗ}{ΗΔ} = \frac{ΕΘ}{ΘΓ} = \frac{1}{2}$$

97. Σημ. μετ. Γαλλιστί: comble ἀκμὴ στέγης (κορφιάς).

98. Σημ. Μεταφ. Ἡ συμμετρία τῶν δύο τετραέδρων δΙΑΒ καὶ γΙΑΒ ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς προφανοῦς συμμετρίας τῶν σημείων δ καὶ γ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΙΑΒ.

ἡ ΗΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΗΜΘ καὶ ΜΔΓ λαμβάνομεν

$$\frac{ΘΜ}{ΜΔ}=\frac{ΗΜ}{ΜΓ}=\frac{ΗΘ}{ΔΓ}.$$

Συγκρίνοντες λαμβάνομεν:

$$\frac{ΘΜ}{ΜΔ}=\frac{ΗΜ}{ΜΓ}=\frac{1}{3},$$

ἤτοι τὸ ΘΜ εἶναι τὸ ἓν τρίτον τῆς ΜΔ, ἢ τὸ ἓν τέταρτον τῆς ὅλης ΘΔ. Ἑπομένως ἡ ΔΜ εἶναι τὰ $^3/_4$ τῆς ΔΘ, ὁμοίως ΓΜ $=\frac{3}{4}$ τῆς ΓΗ.
Αἱ τέσσαρες αὐταὶ εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, διότι ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Α, ἐπὶ παραδείγματι, θὰ τάμη τὴν ΔΘ εἰς σημεῖον ἀπέχον ἀπὸ τοῦ Δ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ΔΘ, δηλαδὴ εἰς τὸ Μ.

Τὸ σημεῖον Μ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου.

Θεώρημα 691

1836. Θεωροῦντες ἀνὰ δύο τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ἑνὸς τετραέδρου σχηματίζομεν τρία ζεύγη ἀκμῶν.

1) Ἑνὸς τετραέδρου δυνατὸν ἢ τὸ ἓν ζεῦγος νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ ἴσας ἀκμὰς ἢ καὶ τὰ δύο ζεύγη ἢ καὶ τὰ τρία ζεύγη νὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἴσας ἀκμάς.

2) Ἑνὸς τετραέδρου δυνατὸν αἱ ἀκμαὶ ἑνὸς ζεύγους νὰ εἶναι κάθετοι ἢ καὶ τὰ τρία ζεύγη νὰ ἀποτελοῦνται ἐξ εὐθειῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 159).

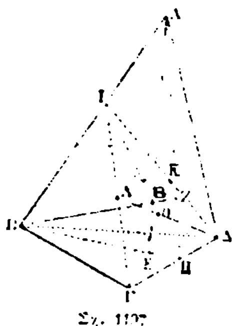
1836 α. Σημείωσις. *Τετράεδρον ἰσόεδρον.* Τὸ τετράεδρον τοῦ ὁποίου ἀνὰ δύο αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι, ἔχει ὅλας του τὰς ἕδρας ἴσας. Τὸ τοιοῦτον τετράεδρον λέγεται ἰσόεδρον, ἔχει δὲ πολλὰς ἰδιότητας. Βλ. *l'Assocation Française pour l'avancement des scienses* 1875, *Nantes* σ. 173. *Les nouvelles Annales* 1880, σ. 133, ἄρθρα ὑπὸ E. Lemoine, βλ. ὁμοίως τοῦ αὐτοῦ ἔτους Ν. Α. σελ. 403 ἄρθρον τοῦ Chefik Bey (Κάϊρον) καὶ *Journal de Vuibert* 1897 - 1898, σ. 29 καὶ 49, Ἰούνιος 1911 σ. 152, nº 7371 ἄρθρον τοῦ A. Vacquant καθηγητοῦ εἰς τὸ λύκειον Charlemagne.

Θεώρημα 692

1837. **Ἐὰν εἰς τετράεδρον δύο τῶν ὑψῶν αὐτοῦ τέμνωνται, θὰ τέμνωνται καὶ ἄλλα δύο ὕψη αὐτοῦ.**

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ δύο ὕψη ΑΕ καὶ ΒΖ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Θ. Τὸ ἐπίπεδον ΑΗΒ, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν ὑψῶν τούτων, θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΓΔ, διότι τὸ ΑΗΒ, ὡς διερχόμενον διὰ τοῦ ΑΕ, θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΓΔ, ὁμοίως τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ὡς διερχόμενον διὰ τῆς ΒΖ θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓΔ. Ὡς κάθετον λοιπὸν ἐπὶ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα, θὰ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομήν των ΓΔ.

Διὰ τῆς ΓΔ δύναται νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ· διότι ἡ ΓΔ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΗΒ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτοῦ ΑΒ. Ἔστω τοῦτο τὸ ΓΙΔ· τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ θὰ εἶναι κάθετον ἐπ' ἀμφοτέρας τὰς ἕδρας ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ καὶ ἑπομένως τὰ ὕψη ΔΛ καὶ ΓΚ τοῦ τετραέδρου θὰ περιέχωνται εἰς αὐτὸ καὶ θὰ τέμνωνται. Ἡ δὲ ΙΗ εἶναι τὸ τρίτον ὕψος τοῦ τριγώνου ΓΙΔ· διότι ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΗΒ τοῦ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἄρα ἡ ΙΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἑπομένως θὰ διέρχεται· ἡ εὐθεῖα αὐτὴ διὰ τοῦ Ο, τομῆς τῶν δύο ἄλλων ὑψῶν ΔΛ καὶ ΓΚ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου, ὁμοίως δὲ θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ Θ ὡς τρίτον ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΗΒ.



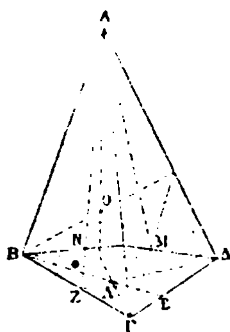
Σχ. 1197

Θεώρημα 693

1838. Ἐὰν τετραέδρου αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι κάθετοι καὶ φέρωμεν ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν ὑψῶν ἑκάστης ἕδρας τοῦ στερεοῦ κάθετον ἐπ' αὐτήν, αἱ τέσσαρες οὕτω ἀγόμεναι εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἄς εἶναι Λ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ὑψῶν τῆς ἕδρας ΒΓΔ, Μ τῆς ἕδρας ΑΓΔ, Ν τῆς ΑΒΓ καὶ Ο τῆς ἕδρας ΑΒΔ.

Ὑποθέσωμεν πρὸς τούτοις ὅτι αἱ ἀπέναντι ἀκμαί, ὡς αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετοι.



Σχ. 1198.

Φέρω τὸ ὕψος ΑΕ τῆς ἕδρας ΑΓΔ. Τὸ ἐπίπεδον ΒΑΕ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ, διότι ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΕ. Συνεπῶς, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΒΕ αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου ΒΓΔ.

Τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὰς ἕδρας ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ, ὡς διερχομένας διὰ τῆς ΓΔ, καθέτου ἐπὶ τὸ ΑΕΒ. Ἐὰν λοιπὸν ἐκ τῶν Λ καὶ Μ φέρωμεν ἀντιστοίχως καθέτους ἐπὶ τὰς ἕδρας ΒΓΔ καὶ ΑΓΔ, αὗται θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ΑΕΒ καὶ ἑπομένως θὰ τέμνωνται.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας τοῦ τετραέδρου εἰς τὰ Λ,Μ,Ν καὶ Ο θὰ τέμνωνται ἀνὰ δύο. Ἀλλὰ ὅταν συμβαίνῃ αὐτὸ αἱ εὐθεῖαι αὗται ἢ θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἢ θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ πρῶτον ὅμως δὲν δύναται νὰ συμβαίνῃ διότι αἱ ἐκ τῶν Μ καὶ Λ ἀγόμεναι κάθετοι κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΕΒ, τὰ δὲ σημεῖα Ν καὶ Ο, ἐξ ὧν ἄγονται αἱ ἄλλαι δύο, κεῖνται ἐκτὸς τοῦ ΑΕΒ.

Συνεπῶς αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

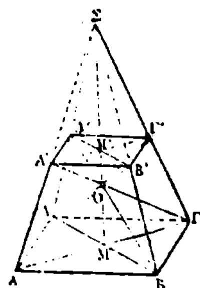
Παρατήρησις. Τὸ τετράεδρον τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι [illegible] εἶναι

κάθετοι λέγεται *ὀρθογώνιον τετράεδρον* (*ἢ ὀρθοκεντρικόν*). Τοῦτο ἔχει πολλὰς ἰδιότητας καὶ ἔδωκεν ἀφορμὴν εἰς ἐνδιαφερούσας μελέτας. Βλ. κυρίως: *Journal de mathématiques élémentaires et speciales*, 1881 σ. 337.

Θεώρημα 694

1839. **Αἱ διαγώνιοι κολούρου πυραμίδος ἐχούσης βάσεις παραλληλόγραμμα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.**

Ἄς εἶναι $\frac{\mu}{\nu}$ ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν καὶ τῶν ὁμολόγων διαγωνίων τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου.



Σχ. 1199.

Αἱ διαγώνιοι τῶν βάσεων Α'Γ' καὶ ΑΓ, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἔναντι παραπλεύρων ἀκμῶν ΑΑ' καὶ ΓΓ', εἶναι παράλληλοι καὶ τὸ σχῆμα ΑΓΓ'Α' τραπέζιον. Τοῦ τραπεζίου τούτου αἱ διαγώνιοι τέμνονται ἐπὶ τῆς ΜΜ' εἰς σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε

$$\frac{ΑΟ}{ΟΓ'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Ἄρα

$$\frac{ΜΟ}{ΟΜ'} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Αἱ διαγώνιοι ΒΔ' καὶ ΔΒ' θὰ τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο τῆς ΜΜ', διότι θὰ ἔχωμεν

$$\frac{ΟΒ}{ΟΔ'} = \frac{ΔΒ}{Δ'Β'} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Αἱ διαγώνιοι ἑπομένως τῆς κολούρου θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ σημείου Ο τῆς ΜΜ'.

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα ἀληθεύει διὰ πᾶσαν κόλουρον πυραμίδα μὲ βάσεις *πολύγωνα ἔχοντα κέντρα* καὶ ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν· διότι ἡ περίμετρός των θὰ ἔχῃ πλευρὰς ἀνὰ δύο ἴσας καὶ παραλλήλους.

Θεώρημα 694—I

1840. **Ὅταν αἱ τέσσαρες διαγώνιοι ἑνὸς ἑξαέδρου διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαγωνίων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν του διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.**

Θεωρῶ τὸ ἑξάεδρον (σχ. 1199) ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ', τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΓ', Α'Γ, ΒΔ', Β'Δ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Θὰ ἀποδείξω ὅτι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διέρχονται καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαγωνίων ἀπέναντι ἑδρῶν.

Θεωρήσωμεν τὰς ἀπέναντι ἕδρας ΒΓΒ'Γ' καὶ ΑΔΑ'Δ'. Τὸ Ο εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων ΑΒΔ'Γ' καὶ Α'Β'ΔΓ, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων τῆς ἕδρας ΒΓΒ'Γ' εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων τούτων· τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων τῆς ἕδρας ΑΔΑ'Δ'. Ἑπομένως, τὰ τρία

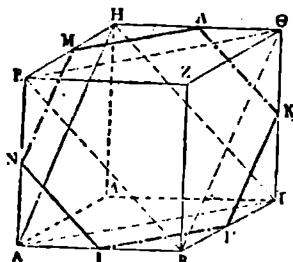
σημεῖα, ἤτοι τὸ κοινὸν τῶν διαγωνίων τῆς ΒΓΒ'Γ', τὸ Ο καὶ τὸ κοινὸν τῶν διαγωνίων ΑΔΑ'Δ' θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Διότι κεῖνται ἐπὶ τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΑΒΔ'Γ' καὶ Α'Β'ΔΓ. Ἡ εὐθεῖα. ἄρα, ἡ ἑνοῦσα τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαγωνίων τῶν ἔναντι ἑδρῶν ΑΔΑ'Δ' καὶ ΒΓΒ'Γ' τοῦ στερεοῦ διέρχεται διὰ τοῦ Ο.

Θεώρημα 695

1841. Ἡ τομὴ κύβου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῶν μέσων τριῶν ἀκμῶν του, μὴ παραλλήλων καὶ μὴ ἀνηκουσῶν εἰς τὴν αὐτὴν στερεὰν γωνίαν, εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον.

Θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῶν μέσων Ι, Ι' καὶ Κ τριῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΘ τοῦ κύβου, μὴ παραλλήλων καὶ μὴ ἀνηκουσῶν εἰς τὴν αὐτὴν στερεὰν γωνίαν.

Φέρομεν τὰς διαγωνίους ΒΕ, ΒΘ καὶ ΘΕ τῶν τριῶν ἑδρῶν τῆς στερεᾶς γωνίας Ζ, ὡς καὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ.



Σχ. 1200.

Ἡ εὐθεῖα Ι Ι', ὡς ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ, ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς καὶ ἑπομένως παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΕΘ. Τὸ αὐτὸ ἀληθεύει καὶ διὰ τὴν Ι'Κ· εἶναι καὶ αὔτη παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΘ.

Τὸ ἐπίπεδον ΙΙ'Κ, παράλληλον ὂν πρὸς τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΒΘ καὶ ἑπομένως καὶ πρὸς τὰς ΕΘ καὶ ΑΗ. θὰ εἶναι παράλληλον καὶ πρὸς τὰ ἐπίπεδα ΒΕΘ καὶ ΑΓΗ. Αἱ ΚΛ καὶ ΓΗ θὰ εἶναι ἄρα παράλληλοι, ὡς τομαὶ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΙΙ'ΚΛ καὶ ΑΓΗ, τεμνομένων ὑπὸ τοῦ ΓΘΗ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ Κ εἶναι μέσον τῆς ΓΘ, θὰ εἶναι καὶ τὸ Λ μέσον τῆς ΗΘ καὶ $ΚΛ = \frac{1}{2}$ ΓΗ κλπ.

Οὕτω τὸ ἐπίπεδον ΙΙ'Κ διέρχεται διὰ τῶν μέσων Λ, Μ καὶ Ν τῶν ἀντιστοίχων ἀκμῶν.

Εἶναι δὲ ἡ τομὴ κανονικὸν ἑξάγωνον. Διότι ἑκάστη πλευρὰ ταύτης εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΒΘΕ, μὲ πλευρὰν τὴν διαγώνιον μιᾶς ἕδρας τοῦ κύβου, ἑκάστη δὲ γωνία αὐτῆς εἶναι παραπλήρωμα τῆς γωνίας τοῦ αὐτοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Θεωρήσωμεν πράγματι τὰς γωνίας ΙΙ'Κ καὶ ΕΘΒ· ἡ Ι'Ι εἶναι ὁμόρροπος τῆς ΘΕ, ἡ δὲ Ι'Κ ἀντίρροπος τῆς ΘΒ· ἑπομένως αἱ γωνίαι αὗται εἶναι παραπληρωματικαί.

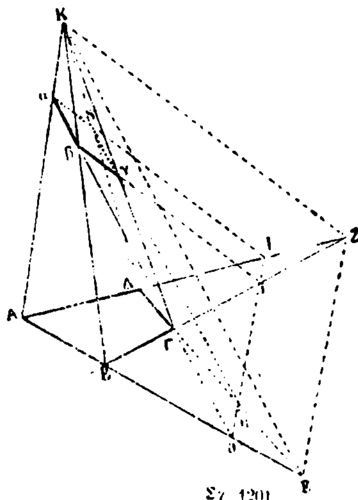
Παρατηρήσεις. 1) τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΙΙ'ΚΛΜΝ εἶναι ἡ μεγίστη τομὴ τοῦ κύβου, ἐκ τῶν λαμβανομένων δι' ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ μίαν τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

2) περὶ τοῦ ζητήματος τούτου Βλ.: *Exercices de Géométrie descriptive* (§ 527).

Θεώρημα 696

1842. Δυνάμεθα νὰ τάμωμεν μίαν πυραμίδα, ἔχουσαν βάσιν κυρτὸν τετράπλευρον, μὲ ἐπίπεδον, κατὰ τρόπον ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ἓν παραλληλόγραμμον.

Ἂς εἶναι ΚΑΒΓΔ ἡ δοθεῖσα πυραμὶς καὶ αβγδ ἡ τομὴ κατὰ παραλληλόγραμμον αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου. Ἐπειδὴ αἱ αβ καὶ γδ εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι, τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου, ἧς ἕδραι εἶναι τὰ ἐπίπεδα ἐφ' ὧν κεῖνται αἱ αβ καὶ γδ, δηλαδὴ πρὸς τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου, τῆς σχηματιζομένης ὑπὸ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν ΚΑΒ καὶ ΚΓΔ τῆς πυραμίδος. Τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον αβγδ, θὰ εἶναι ἐπίσης παράλληλον πρὸς τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου, ἣν σχηματίζουν αἱ ἀπέναντι ἕδραι ΚΒΓ καὶ ΚΑΔ τῆς πυραμίδος.



Ἂς προσδιορίσωμεν τὰς ἀκμὰς τῶν διέδρων τούτων. Τὸ κοινὸν σημεῖον Ε τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τῆς βάσεως, εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν ἑδρῶν ΚΑΒ καὶ ΚΓΔ. Ἀλλὰ καὶ τὸ Κ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν ἰδίων ἐπιπέδων· ἐπομένως, ἡ ΚΕ εἶναι ἡ ἀκμὴ τῆς διέδρου ΚΑΒ — ΚΓΔ, ὁμοίως δὲ σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ΚΖ (ὅπου Ζ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ) εἶναι ἡ ἀκμὴ τῆς διέδρου ΚΒΓ — ΚΑΔ.

Συνεπῶς, πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ΚΕΖ θὰ τέμνῃ τὴν πυραμίδα κατὰ παραλληλόγραμμον. Πράγματι, αἱ βα καὶ ΕΚ εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ ΚΑΒ, ὁμοίως αἱ γδ καὶ ΚΕ· ἄρα αἱ βα καὶ γδ εἶναι παράλληλοι ὡς καὶ αἱ αδ καὶ βγ. Εἶναι ἐπομένως τὸ σχῆμα αβγδ παραλληλόγραμμον.

Παρατηρήσεις. 1) Ὡς πρὸς τὰς κατασκευὰς εἶναι προτιμοτέρα ἡ ἀναφερομένη εἰς τὰς *Exercices de Géométrie descriptive* ὑπὸ F.G.-M.

2) Τὸ προηγούμενον θεώρημα δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: *Εἶναι πάντοτε δυνατὸν νὰ προβληθῇ διὰ κεντρικῆς προβολῆς τετράπλευρον οἱονδήποτε* ΑΒΓΔ *κατὰ παραλληλόγραμμον.*

Δυνάμεθα ἄλλως τε νὰ ἐκλέξωμεν τὸ κέντρον Κ τῆς προβολῆς τοιοῦτον, ὥστε ἡ προβολὴ νὰ εἶναι ρόμβος ἢ ὀρθογώνιον. Διὰ τὸ δεύτερον ἀρκεῖ τὸ Κ νὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας τῆς ἐχούσης διάμετρον ΕΖ.

Σημείωσις. Ὁ Stevin εἶναι ὁ πρῶτος ὅστις ἔχει λύσει τὸ προηγούμενον πρόβλημα: *Δίδονται παραλληλόγραμμον καὶ τυχὸν τετράπλευ-*

ρον· νὰ τοποθετηθῶσιν τὰ σχήματα ταῦτα ἐν τῷ χώρῳ εἰς προοπτικὴν θέσιν πρὸς ἄλληλα. (*I. des Math.* 1899, σ. 104 καὶ 1903 σ. 73, n° 149, σημ. τῶν W. Stoot καὶ H. Brocard).

Θεώρημα 697

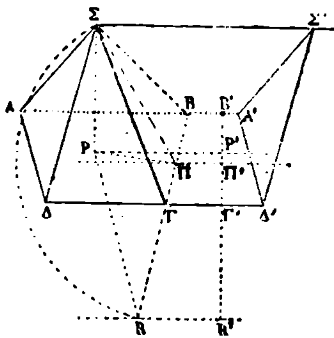
1843. Δυνάμεθα νὰ τάμωμεν δοθὲν τριγωνικὸν πρῖσμα κατὰ τρόπον ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι τρίγωνον ὅμοιον πρὸς δοθέν.

Ἂς εἶναι ΑΔΣΑ'Δ'Σ' τυχὸν τριγωνικὸν πρῖσμα.

Αἱ τομαὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων εἶναι ἴσαι· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Σ καὶ ἡ τομὴ εἶναι ἡ ΣΒΓ. Δεχόμενοι ὅτι τὸ ΣΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ γωνίαι ΒΓΣ καὶ ΓΒΣ εἶναι γνωσταὶ καὶ τὸ θεώρημα θὰ ἀποδειχθῇ ἐὰν λύσωμεν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα.

Πρόβλημα 697—I

1844. Νὰ κατασκευασθῇ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ, τῆς ὁποίας ἡ βάσις ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον καὶ τῆς ὁποίας γνωρίζομεν τὴν ἕδραν ΣΑΔ, τὴν δίεδρον γωνίαν τῆς ΣΑΔ καὶ τῆς βάσεως, τὰς γωνίας τῆς ἕδρας ΣΒΓ καὶ τὴν διεύθυνσιν τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου ΔΔ' καὶ ΑΑ'.



Σχ. 1202.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐλύθη τὸ πρόβλημα· ἐκ τῆς κορυφῆς Σ φέρομεν κάθετον ΣΡ ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ τὴν κάθετον ΡΠ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἐπὶ δὲ τῆς ΒΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΠR = ΠΣ καὶ φέρομεν τὴν ΡR. Ἡ ΡR εἶναι εὐθεῖα τῆς βάσεως, ἡ δὲ ΣΠ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ (θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων).

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΣΡΠ λαμβάνομεν

$$\Pi\Sigma^2 - \Pi P^2 = \Sigma P^2 \quad \text{ἢ} \quad \Pi R^2 - \Pi P^2 = \Sigma P^2.$$

Ἐπειδὴ οἱ λόγοι $\frac{B\Pi}{\Gamma\Pi}$ καὶ $\frac{\Sigma\Pi}{\Gamma\Pi}$ ἢ $\frac{R\Pi}{\Gamma\Pi}$ εἶναι γνωστοί, ἀφοῦ τὸ τρίγωνον ΒΓΣ εἶναι ὅμοιον πρὸς δοθέν, δυνάμεθα ἐν σχέσει πρὸς τὴν τυχοῦσαν εὐθεῖαν Β'Γ' νὰ ὁρίσωμεν τὰ σημεῖα Π' καὶ R' καὶ ἐκ τούτων νὰ φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΑ', ὁμοίως νὰ φέρωμεν καὶ τρίτην παράλληλον πρὸς ΑΑ' ἐκ τοῦ Ρ, ὁπότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς τῆς ἐπιπεδομετρίας:

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΡΠR *τοιοῦτον, ὥστε αἱ μὲν κορυφαί του νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ δεδομένων παραλλήλων εὐθειῶν, ἡ δὲ δια-*

φορὰ τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων του πλευρῶν ΠR² — ΠP² *νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν τιμὴν* ΣP² (§ 1523 α) (99).

1844 α. Σημείωσις. Ἡ προηγουμένη λύσις ἔχει δοθεῖ ἀπὸ τὸν Lhuilier, (Γενεύη 1811.) Εἰς *Annales de Gergonne,* τόμος II, 1811 - 1812 σελ. 293 κ. ἑπ., ὅπου καὶ δημοσιεύονται καὶ αἱ λύσεις αἱ δοθεῖσαι ἀπὸ τὸν Encontre καὶ τὸν Tedenat, ὡς καὶ τεσσαρες ἄλλαι λύσεις ἀπὸ τοὺς Pilatte, Penjon, Rochat καὶ Legrand.

Ἰδοὺ αἱ πλέον ἐνδιαφέρουσαι δύο περιπτώσεις τοῦ τεθέντος προβλήματος (§ 1843).

1) *Νὰ τμηθῇ τριγωνικὸν πρῖσμα εἰς τρόπον ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον.*

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν καὶ ὡς ἀκολούθως:

Νὰ προβληθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς τρόπον ὥστε ἡ προβολή του νὰ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον.

Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος ἐπιτρέπει νὰ λύσωμεν ἀρκετὰ μεγάλον ἀριθμὸν ζητημάτων, σχετικῶς πρὸς τυχὸν τρίγωνον. Πρόκειται περὶ προβλημάτων θέσεως, τομῆς καὶ εἰς τὰ ὁποῖα τὰ μόνα ἀριθμητικὰ διδόμενα εἶναι λόγοι. Τοῦτον ἐχρησιμοποιήσαμεν διὰ τὴν δευτέραν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τῆς § 1201 γ.).

2) *Νὰ τμηθῇ τριγωνικὸν πρῖσμα εἰς τρόπον ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον,* ἢ καί: *Νὰ προβληθῇ παραλληλόγραμμον κατὰ τετράγωνον.*

Θεώρημα 698

1845. **Δύο εὐθεῖαι συμμετρικαὶ πρὸς ἐπίπεδον σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετ' αὐτοῦ.**

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α'Β' συμμετρικαὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. Τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΑ', καὶ διχοτομεῖ ταύτην εἰς τὸ Δ, ὁμοίως εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΒ' καὶ διχοτομεῖ ταύτην εἰς τὸ Γ. Ἑπομένως, ἡ ΓΔ εἶναι κοινὴ προβολὴ τῶν ΑΒ καὶ Α'Β' ἐπὶ τὸ ΜΝ.

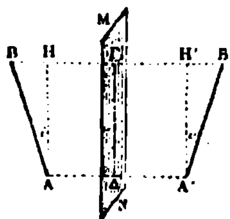
---

99. Σημ. μετ. Διὰ τὴν κατασκευήν, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν τὴν ἕδραν ΣΑΔ, εἶναι γνωστὸν τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου, τοῦ ἀγομένου ἐκ τοῦ Σ· ὁμοίως ἔχει δοθῆ ἡ γωνία ἣν σχηματίζουν ἡ ΣΑΔ καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος. Εἶναι ἄρα δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ἔχοντος ὑποτείνουσαν τὸ ἐκ τοῦ Σ ὕψος τοῦ τριγώνου ΣΑΔ καὶ προσκειμένην εἰς αὐτὴν ὀξεῖαν γωνίαν, τὴν ἀντίστοιχον τῆς διέδρου ἣν σχηματίζει ἡ ΣΑΔ καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος.

Ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦ τριγώνου τούτου, ὁρίζονται τὰ μήκη ΣΡ καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ Ρ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Δοθέντος δὲ ὅτι ὁρίζεται ἐκ τοῦ τριγώνου ΣΑΔ καὶ ὁ ποὺς τῆς ἐκ τοῦ Σ καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΔ, τὸ σημεῖον Ρ ἐν σχέσει πρὸς τὴν ΑΒ εἶναι καθωρισμένον.

Ἐπὶ τῆς τυχούσης τώρα Β'Γ' λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Π' οὕτως, ὥστε $\frac{Β'Π'}{Γ'Π'} = \frac{ΒΠ}{ΓΠ}$ καὶ τὸ Ρ' ὥστε $\frac{Ρ'Π'}{Γ'Π'} = \frac{ΣΠ}{ΓΠ}$. Ὁρίζονται οὕτω τὰ σημεῖα Ρ', Π' καὶ Ρ καὶ αἱ ἐξ αὐτῶν παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΑ' ἢ ΔΔ' εἶναι αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι, αἱ ἀπαιτούμεναι διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος κατὰ τὴν § 1523 α.

'Εὰν ἐκ τῶν Α καὶ Α΄ φέρωμεν παραλλήλους εὐθείας πρὸς τὴν ΓΔ, αὗται θὰ κεῖνται εἰς τὸ προβάλλον ἐπίπεδον τὰς ΑΒ καὶ Α'Β' καὶ θὰ σχηματίζουν μετὰ τῶν ΑΒ καὶ Α'Β' γωνίας ι καὶ ι'. Αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας ἃς σχηματίζουν αἱ ΑΒ καὶ Α'Β' μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ καὶ ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τραπέζια ΓΔΑΒ καὶ ΓΔΑ'Β' εἶναι ἴσα, ὡς συμμετρικά, ἕπεται ὅτι ι = ι'.

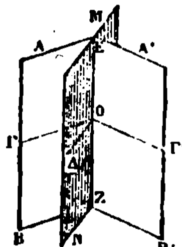


Σχ. 1203.

Θεώρημα 699

1846. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς ἐπίπεδον ΜΝ, τοῦτο διχοτομεῖ τὴν γωνίαν αὐτῶν.

Ἄς εἶναι ΕΖ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒ καὶ ΜΝ· λόγῳ τῆς συμμετρίας τῶν ἐπιπέδων, πᾶν σημεῖον τῆς ΕΖ θὰ ἔχῃ τὸ συμμετρικόν του ἐπὶ τοῦ Α'Β', ἀλλὰ συγχρόνως πᾶν σημεῖον τῆς ΕΖ, ὡς σημεῖον τοῦ ΜΝ, ἐπιπέδου συμμετρίας, θὰ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ ἑαυτοῦ του. Ἑπομένως, πᾶν σημεῖον τῆς ΕΖ εἶναι σημεῖον τοῦ Α'Β', ἤτοι τὸ Α'Β' τέμνει τὸ ΜΝ κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καθ' ἣν καὶ τὸ ΑΒ.



Σχ. 1204.

Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἐφ' ἑκάστου τῶν τριῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΜΝ καὶ Α'Β' εὐθείας ΟΓ, ΟΔ καὶ ΟΓ', καθέτους ἐπὶ τὴν ΕΖ, αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καθέτου ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν θὰ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων, ἃς σχηματίζουν τὰ ἐπίπεδα ΑΒ καὶ Α'Β' μετὰ τοῦ ΜΝ. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ ΟΓ καὶ ΟΓ' εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ ΜΝ, θὰ σχηματίζουν ἴσας γωνίας (§ 1845) μετ' αὐτοῦ, δηλ. μετὰ τῆς ΟΔ. Ἄρα τὸ ΜΝ εἶναι τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τὴν δίεδρον ΑΒ· Α'Β'.

Θεώρημα 699—I

1846 α. **Δύο τρίγωνα ἴσα, ὁπωσδήποτε κείμενα εἰς τὸν χῶρον, δύνανται νὰ προβληθῶσι κατ' ὀρθὴν προβολὴν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἰς τρόπον ὥστε αἱ προβολαί των νὰ εἶναι δύο τρίγωνα εὐθέως ἴσα.**
(Βλ. § 1146, *Σχήματα εὐθέως καὶ συμμετρικῶς ὅμοια*).

Ἄς εἶναι ΑΒΓ καὶ αβγ τὰ δοθέντα ἴσα τρίγωνα, ὅπου ΑΒ=αβ, ΑΓ = αγ καὶ ΒΓ βγ.

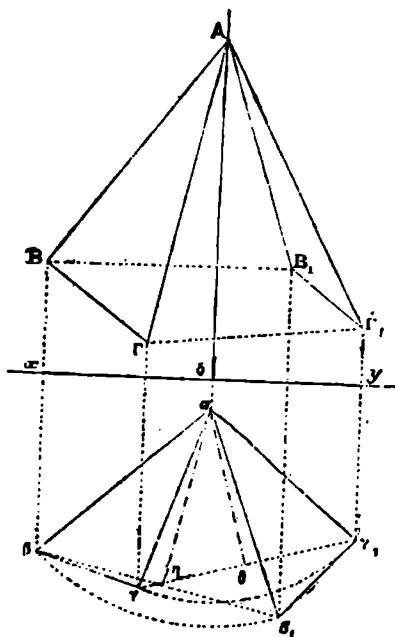
Μεταφέρομεν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, τὸ αβγ, παραλλήλως πρὸς ἑαυτὸ ὥστε νὰ συμπέσουν αἱ κορυφαὶ α καὶ Α τῶν ἴσων γωνιῶν α καὶ Α. Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τοῦ Α τὴν $ΑΒ_1$, ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν αβ καὶ τὴν $ΑΓ_1$, ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τὴν αγ. Ἀρκεῖ νὰ ὁρισθῇ ἓν ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ τῶν ΑΒΓ καὶ $ΑΒ_1Γ_1$ νὰ εἶναι ἴσαι· διότι αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ τῶν $ΑΒ_1Γ_1$ καὶ αβγ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου θὰ εἶναι ἴσαι, ἀφοῦ τὰ $ΑΒ_1Γ_1$ καὶ αβγ εἶναι τρίγωνα ἴσα καὶ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδων παραλλήλων.

Αἱ προβολαὶ τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ $ΑΒ_1Γ_1$ ἐπὶ πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς εὐθείας τοῦ χώρου $ΒΒ_1$ καὶ $ΓΓ_1$ θὰ εἶναι ἴσαι, διότι αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ $ΑΒ_1$ ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὸ προβολικὸν τοῦτο ἐπίπεδον ([100]). Ἑπομένως αἱ προβολαὶ τῶν ΑΒ καὶ $ΑΒ_1$ ἐπ' αὐτό, αβ καὶ $αβ_1$, θὰ εἶναι ἴσαι, τὸ αὐτὸ δὲ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὰς προβολὰς τῶν ΑΓ καὶ $ΑΓ_1$, τὰς αγ καὶ $αγ_1$, ὡς καὶ διὰ τὰς προβολὰς των ΒΓ καὶ $Β_1Γ_1$. Ἐπειδὴ καὶ αὗται θὰ εἶναι ἴσαι διότι αἱ εὐθεῖαι ΒΓ, $Β_1Γ_1$ εἶναι παράλληλοι ἀμφότεραι πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον :

$$βγ = β_1γ_1 = ΒΓ.$$

Οὕτω τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ προβάλλονται κατ' ἴσας προβολὰς ἐπὶ πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς εὐθείας τοῦ χώρου $ΒΒ_1$ καὶ $ΓΓ_1$.

Αἱ ἴσαι προβολαὶ αβγ καὶ $αβ_1γ_1$ δύνανται νὰ παρουσιάσουν δύο διαφόρους διατάξεις θέσεων.



Σχ. 1205.

1846 β. 1η Περίπτωσις. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν (σχ. 1205) τὰ σχήματα εἶναι *εὐθέως ἴσα*, (ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν). Τὸ σημεῖον α εἶναι τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας των καὶ διὰ περιστροφῆς τοῦ ἑνὸς σχήματος περὶ τὸ σημεῖον αὐτὸ δύναται νὰ ταυτισθῇ τὸ σχῆμα τοῦτο μὲ τὸ ἄλλο. Πράγματι, αἱ κάθετοι θα, ηα, αἱ ἀγόμεναι εἰς τὰ μέσα τῶν βάσεων $ββ_1$ καὶ $γγ_1$ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων $αγβ_1$, $αβγ_1$ παριστοῦν ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου τὰ ἴχνη τῶν ἐπιπέδων τῶν ἀγομένων καθέτως εἰς τὰ μέσα τῶν $ΒΒ_1$ καὶ $ΓΓ_1$.

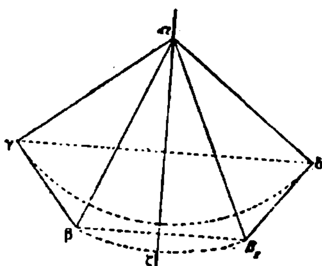
Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν Αδ, ἥτις διέρχεται ἀπὸ τὴν κοινὴν κορυφὴν τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων $ΑΒΒ_1$ καὶ $ΑΓΓ_1$, καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, τὰ παραλληλα πρὸς τὰς

---

100. Σημ. μετ. Ἡ ἰσότης τῶν προβολῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ $ΑΒ_1Γ_1$ ἐπὶ πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς $ΒΒ_1$ καὶ $ΓΓ_1$ ἀποδεικνύεται διὰ τῆς ἑξῆς προτάσεως: «*Ἡ ὀρθὴ προβολὴ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἐπὶ πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς βάσεώς του εἶναι τρίγωνον ἰσοσκελές*». Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποδεικνύεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ θεωρήματος τῶν τριῶν καθέτων.

BB_1 καὶ $ΓΓ_1$ ὅταν αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

1846 γ. 2α Περίπτωσις. Ὅταν αἱ προβολαὶ εἶναι *ἀντιστρόφως ἢ συμμετρικῶς ἴσαι* (ἀντιθέτου φορᾶς) αἱ εὐθεῖαι $ββ_1$ καὶ $γγ_1$ εἶναι παράλληλοι ὡς καὶ αἱ BB_1 καὶ $ΓΓ_1$ εἰς τὸν χῶρον· ὑπάρχει λοιπὸν ἀπειρία διευθύνσεων ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς εὐθείας ταύτας, ἐπὶ ἑκάστου δὲ τούτων τὰ δοθέντα τρίγωνα προβάλλονται κατὰ τρίγωνα ἴσα καὶ ἀντιθέτου φορᾶς.



Σχ. 1206.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ δοθέντα τρίγωνα προβάλλονται κατὰ τρίγωνα ἴσα καὶ συμπίπτοντα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας, τοῦ ἀγομένου καθέτως ἐκ τῶν μέσων τῶν παραλλήλων εὐθειῶν BB_1 καὶ $ΓΓ_1$ (ἡ αζ εἶναι τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἐπὶ τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου), ἕπεται ὅτι:

Τὰ δοθέντα τρίγωνα ΑΒΓ *καὶ* αβγ *προβάλλονται κατὰ τρίγωνα ἴσα καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς ἐπὶ παντὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας.*

Θεώρημα 699—II

1846 δ. **Δύο τρίγωνα ὅμοια, ὅπως δήποτε κείμενα εἰς τὸν χῶρον, δύνανται νὰ προβληθῶσι κατ' ὀρθὴν προβολὴν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κατὰ τρόπον ὥστε αἱ προβολαί των νὰ εἶναι δύο τρίγωνα εὐθέως ὅμοια (ὅμοια ἔχοντα τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν).**

Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἀποδειχθῇ ὅπως τὸ προηγούμενον.

Δίδονται τὰ δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ· διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν θέσιν τοῦ προβολικοῦ ἐπιπέδου, κατασκευάζομεν ἓν τρίγωνον $AB_1Γ_1$ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ καὶ ὁμοιόθετον τοῦ τριγώνου αβγ. Τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς ἀσυμβάτους εὐθείας BB_1 καὶ $ΓΓ_1$.

1846 ε. **Σημείωσις.** Διὰ τὰ ἴσα τρίγωνα (n° 1846) βλ. §§ 1829 καὶ 1901 δ.

Ὑπενθυμίζομεν τὸ θεώρημα τοῦ Chasles: *Ἡ κίνησις διὰ τῆς ὁποίας δοθὲν σχῆμα μεταβαίνει ἀπὸ μιᾶς θέσεως* (Α) *εἰς τυχοῦσαν ἄλλην* (Β) *ἐν τῷ χώρῳ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἑλικοειδὴς κίνησις.*

Διὰ νὰ εἶναι δύο στερεὰ σχήματα ἴσα, δὲν ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἁπλῶς συμμετρικά, ὁπότε ἔχουν, κατὰ μέρη, τὰ στοιχεῖα των ἴσα, ἀλλὰ πρέπει καὶ τὰ κατὰ μέρη ἴσα ταῦτα στοιχεῖα, νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν διάταξιν· ἤτοι νὰ δύναται τὸ ἓν στερεὸν καταλλήλως κινούμενον νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, διὰ τὴν σύμπτωσιν τῶν στερεῶν, εἶναι ἀρκετὴ ἡ σύμπτωσις δύο τυχόντων ἀντιστοίχων εἰς αὐτὰ σκαληνῶν τριγώνων, ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'.

Διὰ τὰ ὅμοια πολύεδρα, βλ. *Journal de Mathématiques élémentaires* τοῦ Longchamps, 1894, σ. 231, σημ. τοῦ Dorlet, 1895, σ. 14, σημ. τοῦ Dellac.

Θεώρημα 699—III

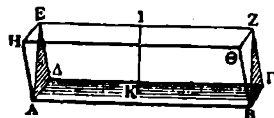
1846 ζ. Δίδεται ἓν τετράεδρον ΑΒΓΔ. Εἰς τὸ Δ φέρομεν τὰ ἐπίπεδα α, β, γ κάθετα ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ἀκμὰς ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τοῦ α μετὰ τῆς ΒΓ, τοῦ β μετὰ τῆς ΑΓ καὶ τοῦ γ μετὰ τῆς ΑΒ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (M. Schenker).

Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ θεωρήματος τῶν παραπληρωματικῶν τριέδρων γωνιῶν ἢ τῶν σφαιρικῶν πολικῶν τριγώνων. (Kierboe, (Κοπεγχάγη), *Mathesis*, 1910, σ. 265, n° 27, 1909, σ. 126, n° 14, J. Neuberg καὶ σ. 154, C. Servais, *I. M.* 1910, σ. 147, n° 3711. Βλ. ὡσαύτως τὸ προταθὲν ζήτημα ὑπὸ Brocard (§ 1342 ξ). Ἡ ἰδιαιτέρα αὕτη περίπτωσις εἶχεν ἤδη μελετηθῆ ὑπὸ τοῦ Bobillier, *A. d. G.*, τόμ. XVIII, 1827 - 1828, σ. 185, Θεώρ. I).

Ὄγκοι

Θεώρημα 700

1847. Ὁ ὄγκος παντὸς τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου μιᾶς ἕδρας ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς.



Σχ. 1207.

Ἂς εἶναι ΑΒΓΔΕΖ τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα, ΙΚ ἡ ἀπόστασις τῆς ΕΖ ἀπὸ τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ. Ἂν φέρωμεν τὰ ἐπίπεδα ΑΘ καὶ ΕΘ, ἀντιστοίχως παράλληλα πρὸς τὰς ἕδρας ΕΓ καὶ ΑΓ, καὶ προεκτείνωμεν τὰς τριγωνικὰς ἕδρας τοῦ πρίσματος, σχηματίζομεν τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι διπλάσιον τοῦ θεωρηθέντος πρίσματος.

Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς βάσιν τοῦ παραλληλεπιπέδου τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ, ὁπότε ὕψος αὐτοῦ θὰ εἶναι ΙΚ. Θὰ ἔχωμεν

$$\text{Ὄγκος παραλληλεπιπέδου} = (\text{ΑΒΓΔ})\ (\text{ΙΚ}).$$

$$\text{Ἄρα}\qquad \text{Ὄγκος πρίσματος} = \frac{(\text{ΑΒΓΔ})\ (\text{ΙΚ})}{2}.$$

Θεώρημα 701

1848. Ὁ ὄγκος παντὸς κανονικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος τῆς βάσεως.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ κανονικὸν πρῖσμα ἔχει ν παραπλεύρους ἕδρας· τὰ ν ἐπίπεδα, τὰ ὁριζόμενα διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ πρίσματος καὶ ἑκάστης τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν αὐτοῦ, διαιροῦσι τὸ πρῖσμα εἰς ν ἴσα τριγωνικὰ πρίσματα. Τὸ ἀπόστημα δὲ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος εἶναι καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἄξονος αὐτοῦ ἀφ' ἑκάστης τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τοῦ πρίσματος.

Ἑπομένως, διὰ τὰ τριγωνικὰ ταῦτα πρίσματα αἱ ἀποστάσεις τῆς κοινῆς των ἀκμῆς ἀπὸ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν εἶναι ἴσαι.

Καλοῦντες Ε τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης παραπλεύρου ἕδρας τοῦ δοθέντος καὶ α τὸ ἀπόστημα τῆς βάσεως, θὰ ἔχωμεν:

Ὄγκος ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα $= \frac{E \cdot \alpha}{2}$.

Ὄγκος ν ἴσων τριγωνικῶν πρισμάτων = Ὄγκος πρίσματος $= \frac{\nu \cdot E\alpha}{2}$.

Ἀλλ' εἶναι: νE = ἐμβαδὸν Σ παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος. Ἄρα

$$\text{Ὄγκος πρίσματος} = \frac{\nu \cdot \Sigma}{2}.$$

Θεώρημα 702

1849. **Ὁ ὄγκος πάσης κανονικῆς πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἀπὸ μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας.**

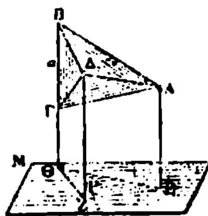
Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ κανονικὴ πυραμὶς ἔχει ν παραπλεύρους ἕδρας. Τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁριζόμενα διὰ τοῦ ἄξονος καὶ δι' ἑκάστης τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν τῆς πυραμίδος, χωρίζουν ταύτην εἰς ν ἴσας τριγωνικὰς πυραμίδας. Ἑκάστης τούτων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς βάσιν τὴν παράπλευρον ἕδραν τῆς δοθείσης, ὁπότε τὸ ὕψος τῆς τριγωνικῆς θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τῆς δοθείσης ἀπὸ μιᾶς παραπλεύρου αὐτῆς ἕδρας.

Ἄς εἶναι Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἕδρας τῆς δοθείσης καὶ α ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἀπ' αὐτῆς. Θὰ ἔχωμεν:

$$\text{Ὄγκος ἑκάστης τριγωνικῆς πυραμίδος} = \frac{E \cdot \alpha}{3}.$$

Ἄρα: $$\text{Ὄγκος δοθείσης} = \frac{\nu \cdot E \cdot \alpha}{3}.$$

Θεώρημα 703



Σχ. 1208.

1850. **Ὁ ὄγκος παντὸς τετραέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου μιᾶς ἀκμῆς του α ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς προβολῆς τοῦ στερεοῦ ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ταύτην.**

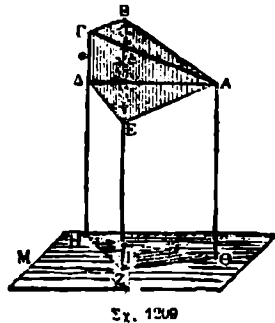
Τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ εἶναι διαφορὰ τῶν δύο ὀρθῶν κολοβῶν τριγωνικῶν πρισμάτων ΕΖΘΒΑΔ καὶ ΕΖΘΓΑΔ. Ἄρα:

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3} E(\text{ΘΒ} + \text{ΖΔ} + \text{ΕΑ}) - \frac{1}{3} E(\text{ΘΓ} + \text{ΖΔ} + \text{ΕΑ}),$$

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3} E(\text{ΘΒ} - \text{ΘΓ}) = \frac{1}{3} E.(\text{ΓΒ}) = \frac{1}{3} E \cdot \alpha.$$

Θεώρημα 704

1851. Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος ἐχούσης βάσιν τραπέζιον ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν βάσεων α καὶ β τοῦ τραπεζίου ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς τῆς πυραμίδος ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου.



Σχ. 1209

Ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔΕ εἶναι διαφορὰ τῶν ὀρθῶν κολοβῶν πρισμάτων ΖΘΗΑΒΓ καὶ ΖΘΗΑΔΕ καὶ ὁ ὄγκος της ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν τούτων. Καλοῦντες τὸ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς τοῦ στερεοῦ διὰ Ε, λαμβάνομεν:

$$(ΑΒΓΔΕ) = \frac{1}{3} Ε (ΗΓ + ΖΒ + ΘΑ) - \frac{1}{3} Ε (ΗΔ + ΖΕ + ΘΑ) =$$

$$= \frac{1}{3} Ε (ΗΓ - ΗΔ + ΖΒ - ΖΕ) = \frac{1}{3} Ε (ΓΔ + ΒΕ) = \frac{1}{3} Ε (α+β).$$

Θεώρημα τοῦ Fournier 704—I

1851 α. Ὁ ὄγκος παντὸς κολοβοῦ παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος δύο παραλλήλων του ἑδρῶν ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῶν ἑδρῶν τούτων.

Τὸ θεώρημα τοῦτο (συνέπεια τοῦ τῆς § 1847) εἶναι μία ἰδιαιτέρα περίπτωσις ἑνὸς γνωστοῦ θεωρήματος. (G. nº 942).

Θεώρημα 705

1852. Ἐὰν τὸ ὕψος τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν βάσιν του, τὸ πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχον ὡς διαστάσεις τὰς τρεῖς πλευρὰς τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος.

Ἂς εἶναι α, β καὶ γ αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως ΑΒΓ τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ Δ ἡ διάμετρος τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου. Ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας γνωρίζομεν ὅτι:

$$(ΑΒΓ) = \frac{α.β.γ}{2Δ}.$$

Ἀλλ' εἶναι:

$$\text{Ὄγκος τοῦ πρίσματος} = (ΑΒΓ).υ = \frac{α.β.γ}{2Δ}.2Δ = α.β.γ.$$

Τὸ γινόμενον α.β.γ παριστᾶ τὸν ὄγκον ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχοντος διαστάσεις τὰς α, β καὶ γ.

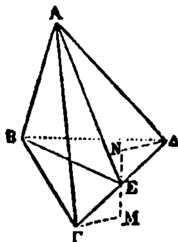
Θεώρημα 706

1853. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ σχηματίζουν ἀνὰ δύο ἴσας γωνίας, τὸ ὀκτάεδρον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ ἄκρα τῶν τριῶν τούτων εὐθειῶν ἔχει ὄγκον σταθερόν.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 156).

Θεώρημα 707

1854. Τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ μιᾶς ἀκμῆς τετραέδρου καὶ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι αὐτῆς, διαιρεῖ τὸ τετράεδρον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.



Σχ. 1210.

Ἔστω ΓΕ = ΔΕ.

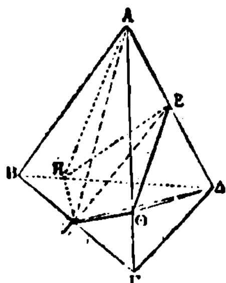
Φέρομεν τὰς καθέτους ΓΜ, ΔΝ ἐπὶ τὴν κοινὴν ἕδραν ΑΒΕ.

Τὰ δύο τετράεδρα εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα βάσιν κοινὴν ΑΒΕ καὶ ὕψη ΔΝ, ΓΜ ἐκ τῶν Δ καὶ Γ ἴσα, ὡς ἀποστάσεις τῶν ἄκρων εὐθυγράμμου τμήματος ἀπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ μέσου αὐτοῦ.

Θεώρημα 707—I

1855. Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῶν μέσων δύο ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου, διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

Ἄς εἶναι Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΒΓ καὶ ΑΔ, διὰ των ὁποίων ἄγεται ἡ τομὴ ΖΘΕΗ. Ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον Α μὲ τὰ Ζ, Η καὶ φέρομεν τὰς ΔΖ καὶ ΔΘ. Τὰ πρὸς σύγκρισιν δύο στερεὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰς τετραγωνικὰς πυραμίδας Α,ΖΘΕΗ καὶ Δ,ΖΘΕΗ, καὶ τὰς τριγωνικὰς Β,ΑΗΖ καὶ Γ,ΘΖΔ.



Σχ. 1211.

Αἱ δύο πρῶται πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΖΘΕΗ καὶ ὕψη ἴσα (§ 1854). Ὅσον δὲ ἀφορᾷ τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ΑΒΖΗ καὶ ΔΓΖΘ, θὰ συγκρίνωμεν ἑκάστην αὐτῶν πρὸς τὸ δοθὲν τετράεδρον.

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ λόγος δύο τριγωνικῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν κοινὴν μίαν τῶν στερεῶν των γωνιῶν, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν ἀκμῶν τῶν ἴσων στερεῶν γωνιῶν.

Ἐπομένως :

$$\frac{(ΒΑΖΗ)}{(ΒΑΓΔ)} = \frac{ΒΑ \,.\, ΒΖ \,.\, ΒΗ}{ΒΑ \,.\, ΒΓ \,.\, ΒΔ} = \frac{ΒΗ}{2ΒΔ},$$

$$\frac{(ΓΔΖΘ)}{(ΓΔΒΑ)} = \frac{ΓΔ \,.\, ΓΖ \,.\, ΓΘ}{ΓΔ \,.\, ΓΒ \,.\, ΓΑ} = \frac{ΓΘ}{2ΓΑ}.$$

Ἀλλ' οἱ λόγοι $\frac{ΒΗ}{2ΒΔ}$ καὶ $\frac{ΓΘ}{2ΓΑ}$, ἢ $\frac{ΒΗ}{ΒΔ}$ καὶ $\frac{ΓΘ}{ΓΑ}$, εἶναι ἴσοι.

διότι πᾶν ἐπίπεδον ΖΗΕΘ, ἀγόμενον διὰ τῶν μέσων Ε καὶ Ζ δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ἑνὸς στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΔΒΓ, διαιρεῖ τὰς δύο ἄλλας ἀπέναντι ἀκμὰς ΒΔ καὶ ΑΓ εἰς μέρη ἀνάλογα (§ 1801)· ἄρα:

$$\frac{BH}{B\Delta} = \frac{\Gamma\Theta}{\Gamma A}, \text{ κατὰ συνέπειαν } (BAZH) = (\Gamma\Delta Z\Theta).$$

Διηρέθη ἑπομένως τὸ τετράεδρον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

Θεώρημα τοῦ Steiner 708

1856. **Ἐπὶ δύο εὐθειῶν μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου λαμβάνομεν δύο δοθέντα μήκη ΑΒ καὶ ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράεδρον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ τέσσαρα σημεῖα Α,Β,Γ καὶ Δ ἔχει σταθερὸν ὄγκον, οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχουν τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ ἐπὶ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν.**

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 158).

Σημείωσις. 1) Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν στηριζόμενοι εἰς τὴν ἄσκησιν τῆς § 1850.

2) Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Α καὶ Β τὰ δοθέντα μήκη (τὰ μήκη δύο ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου), μὲ Δ τὴν ἐλαχίστην τῶν ἀκμῶν τούτων ἀπόστασιν, μὲ α τὴν γωνίαν τῶν ἰδίων ἀκμῶν καὶ μὲ V τὸν ὄγκον τοῦ τετραέδρου, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$V = \frac{A.B.\Delta}{6} \text{ ημ } \alpha.$$

ἐξ οὗ ἀποδεικνύεται ἡ σταθερότης τοῦ ὄγκου, διότι ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ 2ου μέλους εἶναι σταθεροί.

Τὸ θεώρημα ὀφείλεται εἰς τοὺς P. Lenthéric καὶ Timmermans (*Annales de Gergonne*, τομ. XVIII, 1827 - 28, σ. 250). Ἡ διατύπωσις τοῦ θεωρήματος εἶναι εἰς τὴν σ. 156 τοῦ αὐτοῦ τόμου. Ὁ P. Le Cointe, *Leçons sur la théorie des fonctions circulaires* παρέχει τὴν ἰδίαν πληροφορίαν.

Τὰ N. A. 1853 σ. 47 δίδουσιν τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, διατυπουμένου οὕτω ὑπὸ τοῦ Steiner:

«*Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας* Α *ὁρίζονται δύο σημεῖα* α *καὶ* β· *ἐπὶ ἄλλης εὐθείας* Β *λαμβάνομεν δύο σημεῖα* γ *καὶ* δ, *τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις* γδ *εἶναι σταθερά. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος* αβγδ *γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν τὸ μέσον τῆς* γδ *εἶναι τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις μεταξὺ τῶν* Α *καὶ* Β *τέμνῃ τὴν* Β».

Ὡς πόρισμα τούτου ἀκολουθεῖ ἡ ἑξῆς πρότασις:

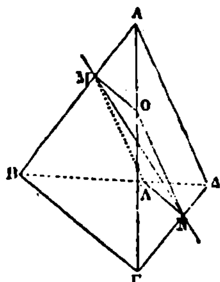
«*Ἐπὶ δύο εὐθειῶν λαμβάνομεν δύο μήκη σταθερὰ καὶ θεωροῦμεν ταῦτα ὡς ἀπέναντι ἀκμὰς ἑνὸς τετραέδρου. Ὁ ὄγκος παντὸς τοιούτου τετραέδρου εἶναι σταθερὸς καὶ ἡ ὁλικὴ του ἐπιφάνεια καθίσταται ἐλαχίστη, ὅταν ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις (κοινὴ κάθετος) μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν διαιρῇ τὰ δύο μήκη εἰς ἴσα μέρη. Εἰς τὴν θέσιν ταύτην τοῦ τετραέδρου, ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸ ἀποβαίνει μεγίστη*».

Θεώρημα 709

1857. **Ἐὰν μία εὐθεῖα ὀλισθαίνῃ ἐπὶ δύο ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου, μένουσα πάντοτε παράλληλος πρὸς ἄλλας δύο ἀπέναντι ἀκμὰς τοῦ**

αὐτοῦ τετραέδρου, ἡ κατὰ τὴν κίνησίν της παραγομένη ἐπιφάνεια, διαιρεῖ τὸ τετράεδρον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

Ἄς εἶναι ΜΝ ἡ ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ὀλισθαίνουσα εὐθεῖα καὶ ἄς μένῃ παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς ἀκμὰς ΒΓ καὶ ΑΔ.



Σχ. 1212.

Γνωρίζομεν ὅτι, κατὰ τὴν κίνησιν τῆς ΜΝ, αἱ ἀκμαὶ ΑΒ καὶ ΔΓ θὰ διαιροῦνται, εἰς ἑκάστην θέσιν αὐτῆς, εἰς μέρη ἀνάλογα (§ 1798).

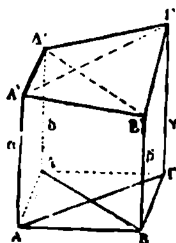
Ἐπειδὴ τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς ἀκμὰς ΑΔ καὶ ΒΓ, κόπτει τὰς ἕδρας ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ κατὰ τὰς εὐθείας ΜΟ καὶ ΝΛ, παραλλήλους πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ τὰς ἕδρας ΒΑΔ καὶ ΓΑΔ κατὰ τὰς εὐθείας ΛΜ καὶ ΝΟ, παραλλήλους πρὸς ΑΔ. Ἑπομένως, ἡ τομὴ εἶναι παραλληλόγραμμον ΛΜΟΝ· ἡ στρεβλὴ ἐπιφάνεια (Ε) τῆς ὁποίας ἡ ΜΝ εἶναι γενέτειρα, διαιρεῖ τὸ παραλληλόγραμμον ΛΜΟΝ εἰς δύο μέρη ἴσα. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει δι' ὅλας τὰς ἀναλόγους τομάς. Ἑπομένως, τὸ τετράεδρον διαιρεῖται εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα ([101]).

Θεώρημα 709—I

1858. Ὁ ὄγκος παντὸς κολοβοῦ παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα δύο ἀπέναντι παραπλεύρων ἀκμῶν του.

Ἡ πρότασις ἀποδεικνύεται δι' ἀγωγῆς καθέτου τομῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου—ἄνω βάσεως τοῦ στερεοῦ, ἢ καὶ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἑπομένου θεωρήματος.

Θεώρημα 710



Σχ. 1213.

1859. Ὁ ὄγκος ἑνὸς κολοβοῦ ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου Σ, μὲ κάτω βάσιν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ἄνω στρεβλὸν τετράπλευρον Α'Β'Γ'Δ', εἶναι ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸν μέσον ὅρον τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν.

Ἔστω ΟΜΝ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Ο τῆς βάσεως καὶ παράλληλος πρὸς τὰς ἀκμὰς ἀγομένη εὐθεῖα. Τὰ σημεῖα Μ, Ν, καθ' ἃ ἡ εὐθεῖα αὐτὴ τέμνει τὰς Δ'Ε' καὶ Α'Γ', εἶναι προφανῶς μέσα τῶν διαγωνίων Β'Δ' καὶ Α'Γ' τοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου Α'Β'Γ'Δ' καὶ θὰ εἶναι, ἕνεκα τῶν τραπεζίων τοῦ σχήματος:

$$ON = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\beta + \delta}{2}$$

101. Σημ. μετ. Ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν δύο τμημάτων εἰς ἃ διαιρεῖται τὸ τετράεδρον ὑπὸ τῆς (Ε), δύναται νὰ θεωρηθῇ ἄθροισμα ἀπειροστῶν πρισμάτων ἴσων ἀνὰ δύο.

Τὸ στερεὸν Σ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τεσσάρων κολοβῶν ὀρθῶν τριγωνικῶν πρισμάτων

ΟΑΒ — ΝΑ'Β', ΟΒΓ — ΝΒ'Γ', ΟΓΔ — ΝΓ'Δ', ΟΔΑ — ΝΔ'Α',

ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει βάσιν τὸ τέταρτον τοῦ παραλληλογράμμου τῆς βάσεως. Ἑπομένως

$$V_\Sigma = \frac{(ΑΒΓΔ)}{4}\left[\frac{(ΟΝ+\alpha+\beta)+(ΟΝ+\beta+\gamma)+(ΟΝ+\gamma+\delta)+(ΟΝ+\delta+\alpha)}{3}\right]$$

$$= \frac{ΑΒΓΔ}{4}\left[\frac{2ΟΝ+2ΟΝ+2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{3}\right].$$

Ἀλλ' εἶναι

$$2ΟΝ = \alpha+\gamma \text{ ἢ καὶ } \beta+\delta.$$

Ἄρα

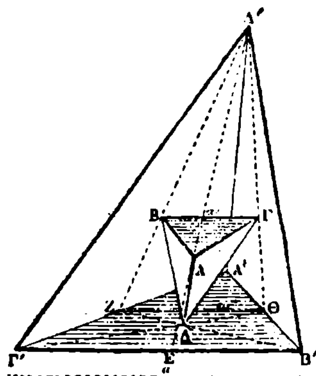
$$V_\Sigma = \frac{(ΑΒΓΔ)}{4}\left[\frac{3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{3}\right]$$

$$= (ΑΒΓΔ)\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}\right) \text{ (102)}$$

Θεώρημα 711

1860. **Ἐὰν ἐξ ἑκάστης κορυφῆς τετραέδρου ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ἀπέναντι ἕδραν, σχηματίζεται νέον τετράεδρον καὶ τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 27πλάσιος τοῦ ὄγκου τοῦ ἀρχικοῦ τετραέδρου.**

Θεωροῦμεν ἓν τυχὸν τετράεδρον Α'Β'Γ'Δ'. Ἑνοῦμεν τὴν κορυφὴν Δ' μὲ τὰ μέσα ἑκάστης τῶν πλευρῶν τῆς ἔναντι ἕδρας Β'Γ'Δ' καὶ φέρομεν τὰς διαμέσους τῆς Β'Γ'Δ', τὰς ἀγομένας ἐκ τῶν κορυφῶν Β' καὶ Γ'. Τὸ σημεῖον Δ, εἰς ὃ τέμνονται αἱ διάμεσοι τῆς Β'Γ'Δ' θὰ ἀπέχῃ ἑκάστης τῶν κορυφῶν Β' καὶ Γ' τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου. Ἂς εἶναι Α, Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαμέσων ἑκάστης τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου Δ', Α'Β'Γ'.



Σχ. 1214.

Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ τέμνει τὰς εὐθείας Δ'Ε, Δ'Ζ καὶ Δ'Θ εἰς μέρη ἀνάλογα :

$$\frac{Δ'Α}{Δ'Ε} = \frac{Δ'Β}{Δ'Ζ} = \frac{Δ'Γ}{Δ'Θ} = \frac{2}{3},$$

---

102. Σημ. μετ. Προετιμήσαμεν τὴν ἀνωτέρω ἀπόδειξιν τῆς τοῦ κειμένου, ὡς στοιχειωδεστέραν. Ἡ ἀκμὴ Α'Γ' ὑπέρκειται τῆς Β'Δ'.

θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Α'Β'Γ', τὸ αὐτὸ δὲ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὰς ἄλλας ἕδρας τοῦ τετραέδρου. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τὰ δύο τετράεδρα εἶναι ὅμοια, ἂν καὶ τὰ στοιχεῖα των εἶναι διατεταγμένα κατ' ἀντίστροφον τάξιν. Ἐπομένως, ἂν ἐδίδετο ὡς ἀρχικὸν τὸ ΑΒΓΔ καὶ ἐφέρομεν ἐκ τῶν κορυφῶν του ἐπίπεδα παράλληλα, θὰ προέκυπτε τὸ Α'Β'Γ'Δ'.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν γενομένων κατασκευῶν προκύπτει, ὅτι ἑκάστη τῶν ἀκμῶν τοῦ ΔΑΒΓ εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ὁμολόγου της ἀκμῆς τοῦ Δ'Α'Β'Γ', ὁ ὄγκος τοῦ ΔΑΒΓ θὰ εἶναι τὸ $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ τοῦ ὄγκου τοῦ Δ'Α'Β'Γ', ἤτοι τὸ $\frac{1}{27}$ αὐτοῦ.

Ἄλλη ἀπόδειξις. Ἑκάστη κορυφὴ τοῦ ἐσωτερικοῦ τετραέδρου εἶναι κέντρον βάρους μιᾶς τῶν ἑδρῶν τοῦ μεγάλου.

Πράγματι, ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ὑπὸ τοῦ Δ'ΑΒ· ὁμοίως, ἡ ΑΒ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν τῆς ἕδρας Δ'Α'Β' ὑπὸ τοῦ ΑΒΓ καὶ ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ Γ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς Α'Β'. Ἐπομένως, ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς Α'Β'· ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ αἱ ΕΘ καὶ ΖΘ εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Α'Γ' καὶ Γ'Β'.

Οὕτω τὰ Ε, Ζ, Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν καὶ τὸ σημεῖον Δ θὰ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ', ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέσου Β'Ζ (ἄρα καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων διαμέσων τοῦ Α'Β'Γ' τριγώνου), ἀφοῦ ἡ ΒΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Β'Δ'.

Θὰ ἔχωμεν:

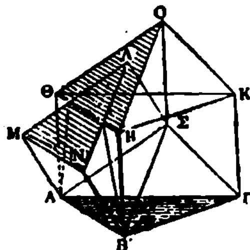
$$A'B' = 2\,EZ = 2.\ \frac{3}{2}\,AB = 3\,AB.$$

Εἶναι δηλαδὴ ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν δύο στερεῶν ἴσος πρὸς 3 καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἴσος πρὸς 27.

Θεώρημα 712

1861. **Ἐπὶ τῶν τριῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τριγωνικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ κατασκευάζομεν πρίσματα τῶν ὁποίων ἔστω Ο ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἄνω βάσεων αὐτῶν. Ἐπὶ δὲ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος κατασκευάζομεν τέταρτον πρίσμα, ἔχον παραπλεύρους ἀκμὰς ἴσας, παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΣΟ.**

Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τριῶν πρώτων πρισμάτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ τελευταίου πρίσματος.



Σχ. 1215.

Ἔστω ΑΒΣΛΜΝ ἓν τῶν πλευρικῶν πρισμάτων. Ἐὰν μεταφέρωμεν τὴν ἄνω ἕδραν αὐτοῦ ΛΜΝ, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ της καὶ παραλλήλως ἑαυτῇ, εἰς τὴν θέσιν ΟΘΗ, τὸ στερεὸν ΑΒΣΟΘΗ θὰ εἶναι ἐπίσης πρίσμα καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒΣΛΜΝ.

Ἀναλόγως ἐργαζόμενοι, ἀντικαθιστῶμεν τὰ δύο ἄλλα πλευρικὰ πρίσματα διὰ τῶν ἰσοδυνάμων των ΒΣΓΗΟΚ καὶ ΓΣΑΚΟΘ. Τὸ οὕτω σχηματισθὲν τετράεδρον ΟΘΗΚ εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὸ ἀρχικὸν ΣΑΒΓ· ἐπειδὴ πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν, ἕδραι καὶ δίεδροι, εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα.

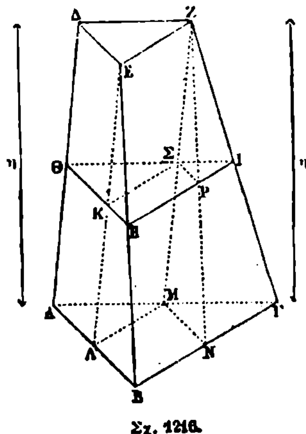
Ἐὰν τώρα ἐκ τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΚΟΘΗ ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράεδρον ΣΑΒΓ, μᾶς ἀπομένει τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρισμάτων, τῶν ἐχόντων ὡς βάσεις τὰς περὶ τὸ Σ ἕδρας· ἂν δὲ ἐκ τοῦ αὐτοῦ στερεοῦ ΑΒΓΚΟΘΗ ἀφαιρέσωμεν τὸ ΟΘΗΚ, μᾶς μένει τὸ πρῖσμα ΑΒΓΘΗΚ, τὸ ἔχον βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ παραπλεύρους ἀκμὰς ἴσας καὶ παραλλήλους πρὸς ΣΟ. Εἶναι τὸ πρῖσμα τοῦτο ἑπομένως ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἀνάλογον πρὸς ἐκεῖνο τοῦ Clairaut (§ 1559).

Θεώρημα 713

1862. Ὁ ὄγκος πάσης κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος (Σ), ἐχούσης βάσεις Β καὶ Β′, ἐμβαδὸν τομῆς Μ ὑπὸ ἐπιπέδου ἴσον ἀπέχοντος τῶν βάσεων καὶ ὕψους υ, ἰσοῦται πρὸς

$$\frac{1}{6}\,υ(B + 4\,M + B').$$



Σχ. 1216.

Ἂς εἶναι ΑΒΓΔΕΖ ἡ τριγωνικὴ κόλουρος καὶ ΘΗΙ ἡ τομή της ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις της καὶ ἴσον ἀπέχοντος ἀπ' αὐτῶν.

Διὰ τῆς ΕΖ φέρομεν τὸ ἐπίπεδον ΕΛΜΖ, παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ, διὰ δὲ τῆς ΖΜ φέρομεν τὸ ἐπίπεδον ΖΜΝ παράλληλον πρὸς τὸ ΕΛΒ. Οὕτω ἡ τριγωνικὴ κόλουρος ἀναλύεται εἰς τὰ ἑξῆς στερεά: εἰς τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΛΜΔΕΖ, τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα ΛΕΒΜΖΝ, τὸ ἔχον βάσεις τὰς ΛΕΒ καὶ ΜΖΝ, καὶ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΖΜΝΓ. Θὰ ἔχωμεν:

ὄγκος ΑΛΜΔΕΓ $=$ (ΑΛΜ)$\,.\,υ$,

ὄγκος ΛΕΒΜΖΝ $=$ (ΛΜΝΒ)$\,.\,\frac{υ}{2}$ (§ 1847)

ὄγκος ΖΜΝΓ $=$ (ΜΝΓ)$\,.\,\frac{υ}{3}$.

Ἑπομένως:

$$V_Σ = υ\left[(ΑΛΜ) + \frac{(ΛΜΝΒ)}{2} + \frac{ΜΝΓ}{3}\right] =$$

$$= \frac{υ}{6}\left[6(ΑΛΜ) + 3(ΛΜΝΒ) + 2(ΜΝΓ)\right] =$$

$$= \frac{\upsilon}{6}\Big[(\text{ΑΛΜ}) + (\text{ΑΛΜ}) + (\text{ΛΜΝΒ}) + (\text{ΜΝΓ}) +$$
$$+ 4\,[\,(\text{ΑΛΜ}) + (\text{ΚΗΡΣ}) + (\text{ΣΡΙ})\,]\Big],$$

ἀφοῦ ἐκ τοῦ σχήματος εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$(\text{ΛΜΝΒ}) = 2\,(\text{ΚΗΡΣ}) \quad \text{καὶ} \quad (\text{ΜΝΓ}) = 4\,(\text{ΣΡΙ}).$$

Ὥστε: $$V_{\Sigma} = \frac{\upsilon}{6}\Big[B + B' + 4\,M\Big].$$

Θεώρημα 713—I

1863. Ὁ ὄγκος παντὸς πολυέδρου ἔχοντος δύο βάσεις παραλλήλους δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$V = \frac{\upsilon}{6}(B + 4\ M + B'),$$

ὅπου B καὶ B′ εἶναι αἱ δύο βάσεις τοῦ στερεοῦ καὶ M ἡ τομὴ αὐτοῦ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπέχοντος αὐτῶν.

Δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν τὸ στερεὸν εἰς πυραμίδας, πρίσματα, κολούρους πυραμίδας, κλπ.

1864. Σημείωσις. 1) Τὸ στερεὸν τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων πολυγώνων καὶ τοῦ ὁποίου αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι τρίγωνα ἢ τραπέζια καλεῖται *πρισματοειδὲς* ἢ *πρισμοειδές*. Γενικώτερον, τὸ στερεὸν τὸ περιεχόμενον μεταξὺ παραλλήλων πολυγώνων καὶ τοῦ ὁποίου παράπλευροι ἕδραι σχηματίζονται ἀπὸ τὴν κίνησιν μιᾶς εὐθείας τεμνούσης τὰς περιμέτρους τῶν δύο βάσιν καὶ παραμενούσης παραλλήλου πρὸς ἓν *διευθῦνον ἐπίπεδον*, ὀνομάζεται *παραλληλοειδές*. (G. nº 934).

2) Τὸ προηγούμενον θεώρημα ἀποδίδεται ἐνίοτε εἰς τὸν Steiner (*Mathesis*, 1885, § 9, *renvoi* **). Τὸ θεώρημα τῆς § 1863 δὲν εἶναι ἄλλωστε παρὰ ἰδιαιτέρα περίπτωσις ἑνὸς θεωρήματος ἀρκετὰ γνωστοῦ (G. nº 985).

Ὁ τύπος $$V = \frac{\upsilon}{6}(B + 4\ M + B'), \qquad (\alpha)$$

ἐφαρμόζεται εἰς πολὺ περισσότερα στερεὰ ἀπὸ ἐκεῖνα ποὺ θεωροῦμεν συνήθως (G. nº 990). Εἰς τὴν ἄσκησιν 104 nº 877, τοῦ *Appendice aux Exercices de Géométrie*, ἔχομεν ἀποδείξει, ὅτι ὁ αὐτὸς τύπος ἐφαρμόζεται εἰς πᾶν στερεόν, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν E(x) τῆς τομῆς εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς βάσεως δίδεται ἀπὸ μίαν συνάρτησιν τρίτου βαθμοῦ $E(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ [103].

---

103. Σημ. μετ. Ἂν x ἡ ἀπόστασις τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἀπὸ τῆς κάτω βάσεως B τοῦ στερεοῦ καὶ h τὸ ὕψος αὐτοῦ, ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ εἶναι:

$$V = \int^{h} (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\,dx = \alpha\frac{h^4}{4} + \beta\frac{h^3}{3} + \gamma\frac{h^2}{2} + \delta h.$$

Ἀλλ' ὁ τύπος οὗτος γράφεται καὶ

$$V = \frac{h}{6}\left[(\delta) + (\alpha h^3 + \beta h^2 + \gamma h + \delta) + 4\left(\alpha\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \beta\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \gamma\cdot\frac{h}{2} + \delta\right)\right]$$

ἢ $$V = \frac{h}{6}\left[E(o) + E(h) + 4\,E\left(\frac{h}{2}\right)\right], \quad \text{δηλ.} \quad V = \frac{h}{6}\left[B + B' + 4\,M\right].$$

Διὰ τὰ αὐτὰ στερεὰ ἔχομεν εὕρει ὅτι ὁ ὄγκος των δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ τύπου

$$V = \frac{\upsilon}{8}\left[B + 3(\Gamma + \Delta) + B'\right] \qquad (\beta)$$

ὅπου Γ καὶ Δ τὰ ἐμβαδὰ τομῶν τοῦ στερεοῦ ὑπὸ ἐπιπέδων εἰς τὸ πρῶτον τρίτον καὶ δεύτερον τρίτον τοῦ ὕψους.

3) Εἴχομεν τὴν εὐχάριστον ἔκπληξιν νὰ εὕρωμεν εἰς τὸ ἔργον τοῦ Maclaurin: *Traité des fluxions* n° 848, ἕνα τύπον *παρεμβολῆς*, ὅστις ἐπιτρέπει νὰ ἐπαληθεύσωμεν τὰ ἐπιτευχθέντα ἀποτελέσματα διὰ τῆς ἀπ' εὐθείας μεθόδου. Παριστῶντες μὲ A τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων βάσεων τοῦ στερεοῦ, μὲ B τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν ἐνδιαμέσων τομῶν, μὲ υ τὸ ὕψος τὸ ὁποῖον διαιροῦμεν εἰς ν ἴσα μέρη καὶ ἀρκούμενοι εἰς τὸν 1ον ὅρον εὑρίσκομεν ὡς ἀνηγμένους τύπους τούς:

διὰ τρεῖς τομὰς $\quad V = (A + 4B)\frac{\upsilon}{6} \qquad (\alpha')$

διὰ τέσσαρας τομὰς $\quad V = (A + 3B)\frac{\upsilon}{8}. \qquad (\beta')$

Ὁ πρῶτος τύπος συνιστᾶται ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος καὶ δὲν εἶναι παρὰ ὁ τύπος (α), γνωστὸς ὡσαύτως ὡς *ἀνηγμένος τύπος* τοῦ Simson.

Ὁ δεύτερος (β') ἔχει εὑρεθῇ ὑπὸ τοῦ Cotes καὶ εἶναι ὁ τύπος (β). Ἀλλὰ οἱ ἐπιφανεῖς οὗτοι γεωμέτραι δὲν ὑποδεικνύουν τοὺς (α') καὶ (β') παρὰ ὡς τύπους προσεγγίσεως. Οὐχ' ἧττον ὅμως ἐφαρμόζονται οἱ τύποι οὗτοι καὶ παρέχουν τὰ ἀκριβῆ ἐξαγόμενα ὅταν ἡ τομὴ E(x), παρέχεται ὑπὸ συναρτήσεως τὸ πολὺ τρίτου βαθμοῦ.

4) Τὸ θεώρημα (§ 1863) καὶ ἡ ἐπέκτασίς του εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ στερεὸν ὁρίζεται ὑπὸ ἐπιφανείας δευτέρου βαθμοῦ, ἔχουν δοθῇ εἰς τὰ *Nouvelles Annales* (1848, σ. 241). Ἀλλὰ εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Sarrus (σ. 244), ὅπου ἀναφέρεται ὅτι ὁ τύπος (α) ἐφαρμόζεται εἰς πᾶν στερεὸν τοῦ ὁποίου ἡ τομὴ E(x) εἶναι συνάρτησις δευτέρου βαθμοῦ, δὲν εἶναι ἀρκούντως γενική, ἐπειδὴ ἀληθεύει ὁμοίως καὶ ὅταν ἔχωμεν

$$E(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Εὑρίσκομεν μίαν δευτέραν σπουδὴν εἰς τὴν αὐτὴν συλλογὴν (ἔτος 1857, σ. 312 n° 393) καὶ μίαν ἔξοχον μελέτην, ὅπου τὸ ζήτημα ἔχει ἐξετασθῇ εἰς ὅλην τὴν γενικότητά του ἀπὸ τὸν Maleyx. (*N. A.*, 1880, σ. 529).

Περὶ τοῦ τύπου $\frac{H}{6}(B + 4M + B')$ βλ.: εἰς *Journal de Math.* τοῦ Longchamps, τὰ ἄρθρα τοῦ Casimir Rey *sur l'omniformule de Cubature* 1886, σ. σ. 79..., 169· κατόπιν 1896 σ. 271 σημείωσιν τοῦ A. Aubry· 1887, σ. 22, Maleyx καὶ G. L.-T. M.· 1896, σ. 135, Σημειώσεις τῶν Ramsay, Gino Loria, Goulard, Crussard. Βλ. ὡσαύτως, *Bulletin de Mathématiques spéciales* τοῦ Niewenclowski, Δεκέμβριος 1896 καὶ *Mathesis*, 1897, σ. 105, ἄρθρον τοῦ Goulard.

Εἰς τὸ *Appendise aux Exercices de Géométrie*, ἐκδοθὲν κατὰ τὸ 1877, ὑποδεικνύομεν ἀρκετὰς ἐφαρμογὰς τοῦ τύπου (α), καθὼς κα τὸν τρόπον δι' οὗ καταλήγομεν εἰς τὸν τύπον τοῦτον· τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸν τύπον (β)· (βλ. σ. 152 καὶ ἑξῆς, n° 877, 878 καὶ 879).

'Ο αὐτὸς τύπος ἐγκωμιάζεται ὑπὸ τὸ ὄνομα *Monoformula*, εἰς ἓν ἔργον ἐκδοθὲν εἰς τὸν Καναδᾶ (βλ. *Text-Book of Geometry* ὑπὸ J. L. Seguin (Montreal), 1903 n° 63, σ. 158 κ. ἑ.).

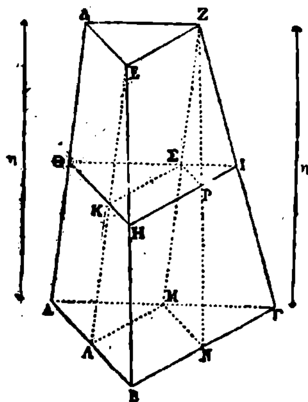
'Ο Niewenclowski εἰς ἄρθρον του μνημονευθὲν ἀνωτέρω, ἀποδεικνύει ὅτι ὁ κανὼν ἐφαρμόζεται ὅταν $E(x) = A + Bx^3 + \sigma(x)$, ὅπου A καὶ B εἶναι σταθεραὶ καὶ σ(x) εἶναι οἱαδήποτε περιττὴ συνάρτησις συνεχής. 'Ο G. Fontené ἔχει ὡσαύτως ἐργασθῆ ἐπὶ τύπων κυβισμοῦ (*N. A.* 1908, σ. 385 καὶ 1909, σ. 289). 'Από ἱστορικῆς ἀπόψεως ἀναφέρομεν τὸν τύπον μὲ δύο ὅρους τοῦ Kinkelin (*I. M.* 1895, σ. 388 καὶ 1896, σ. 135)

$$V = \frac{\upsilon}{4}(B + 3y),$$

ὅπου B μία τῶν βάσεων καὶ y τομὴ τοῦ στερεοῦ, ἀπέχουσα ἀπὸ τῆς ἄλλης βάσεως B' κατὰ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους.

Θεώρημα τοῦ Mascheroni 713—II

1865. Πολυέδρου Σ δύο ἕδραι κεῖνται ἐπὶ παραλλήλων ἐπιπέδων, ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν καὶ ἑκάστη γωνία τῆς μιᾶς εἶναι ἴση πρὸς μίαν γωνίαν τῆς ἄλλης. Αἱ λοιπαὶ ἕδραι εἶναι τραπέζια.



Σχ. 1217.

'Εὰν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, μὲ V' τὸν ὄγκον τοῦ πρίσματος, τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν τομὴν τοῦ στερεοῦ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς παραλλήλους ἕδρας καὶ ἴσον ἀπέχοντος αὐτῶν καὶ ὕψος τὴν ἀπόστασιν υ αὐτῶν, καὶ μὲ Π τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τῶν παραλλήλων ἑδρῶν καὶ ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν ἰδίων ἑδρῶν, θὰ εἶναι

$$V - V' = \Pi \cdot \frac{\upsilon}{12}.$$

'Αρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ τὸ θεώρημα διὰ μίαν τριγωνικὴν κόλουρον πυραμίδα. 'Επειδὴ τὸ στερεὸν δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς κολούρους καὶ πρίσματα ἔχοντα τὸ ὕψος τῆς κολούρου. 'Ως εἴδομεν (§ 1862), ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι :

$$V = \text{ΑΛΜ} \cdot \upsilon + \text{ΛΜΝΒ} \cdot \frac{\upsilon}{2} + \text{ΜΝΓ} \cdot \frac{\upsilon}{3}.$$

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὸν τύπον τοῦτον συναρτήσει τῆς τομῆς ΘΗΙ, προσθέτομεν καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον (ΣΡΙ).υ εἰς τὸ δεύτερον μέλος αὐτοῦ. Εὑρίσκομεν:

$$V = \text{ΑΛΜ} \cdot \upsilon + \text{ΛΜΝΒ} \cdot \frac{\upsilon}{2} + \text{ΜΝΓ} \cdot \frac{\upsilon}{3} + (\text{ΣΡΙ}) \cdot \upsilon - (\text{ΣΡΙ})\upsilon,$$

$$\text{ἢ } V = (\Theta K\Sigma).\upsilon + (KHP\Sigma).\upsilon + (\Sigma PI).\upsilon + (MN\Gamma).\frac{\upsilon}{3} + (\Sigma PI).\upsilon =$$

$$= \upsilon\,[(\Theta K\Sigma) + (KHP\Sigma) + (\Sigma PI)] + (MN\Gamma)\frac{\upsilon}{3} - (\Sigma PI).\upsilon.$$

Ἀλλ' εἶναι $(\Theta K\Sigma) + (KHP\Sigma) + (\Sigma PI) = (\Theta HI)$.

Ἄρα: $V = (\Theta HI).\upsilon + (MN\Gamma)\frac{\upsilon}{3} - (\Sigma PI).\upsilon =$

$$= V' + (MN\Gamma)\frac{\upsilon}{3} - (\Sigma PI).\upsilon = V' + (MN\Gamma).\frac{\upsilon}{12},$$

ἀφοῦ $(\Sigma PI) = (MN\Gamma).\frac{\upsilon}{4}$. Ὥστε $V - V' = \frac{(MN\Gamma).\upsilon}{12} = \Pi\frac{\upsilon}{12}$.

ἀφοῦ προφανῶς $\Pi = (MN\Gamma)$.

1866. Σημείωσις. Εἰς τὴν *Revue des sociétés savantes* (1868 καὶ 1876) εὑρίσκομεν πᾶν ὅ,τι ἀναφέρεται εἰς τὸν τύπον (α) τῆς § 1864, τὸ θεώρημα τοῦ Mascheroni καὶ τὰ ἀκόλουθα δύο θεωρήματα:

Α'. Θεώρημα. Ἐὰν συστρέψωμεν ἕνα κύλινδρον κατὰ γωνίαν ω ([104]), ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$V = \frac{1}{3}h.S(2 + \text{συν}\,\omega), \quad (h = \text{ὕψος},\ S = \text{βάσις}). \qquad (1)$$

Β'. Θεώρημα. Ἐὰν συστρέψωμεν ἕνα κόλουρον κῶνον κατὰ γωνίαν ω ([104]), ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$V = \frac{S.h}{3}(1 + q^2 + q\,\text{συν}\,\omega), \qquad (2)$$

ὅπου h τὸ ὕψος τοῦ κ. κώνου, q ὁ λόγος ὁμοιότητος τῆς κάτω (ἀκινήτου) βάσεως πρὸς τὴν ἄνω βάσιν καὶ S ἡ ἄνω (συστραφεῖσα) βάσις τοῦ κ. κώνου, (Haillecourt).

---

104. Σημ. μετ. Δηλαδή: ἐὰν τὰ ἄνω πέρατα Α, Β, Γ... τῶν γενετειρῶν μετακινηθοῦν κατὰ τόξα $\widehat{AA'} = \widehat{BB'} = \widehat{\Gamma\Gamma'}$... ἀνοίγματος ω ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς ἄνω βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ἐνῶ τὰ κάτω πέρατα *μείνουν ἀκίνητα*. Ὁμοίως καὶ διὰ τὸν κόλουρον κῶνον.

Οἱ τύποι τοῦ κειμένου $V = \frac{1}{8}hS\left(1 + 2\sigma.\text{συν}\frac{\omega}{2}\right)$ διὰ τὸ πρῶτον στερεὸν καὶ $V = \frac{1}{\sigma}h(1 + 2q\,\text{συν}\,\omega + q^2)S$ διὰ τὸ δεύτερον, εἶναι *λανθασμένοι*.

Ἐπειδὴ διὰ τὸν πρῶτον

$$V\,[=\text{ὄγκος}] = \frac{h.S}{3}\,[=\text{ὄγκος}] + \frac{2}{\pi}\sigma.h.S\,\text{συν}\frac{\omega}{2}\,[=\text{ἐπιφάν.} \times \text{ὄγκον}],$$

καὶ διὰ τὸν δεύτερον

$$V\,[=\text{ὄγκος}] = \frac{h.S}{6}\,[=\text{μῆκος}] \times (1 + 2q\,\text{συν}\,\omega + q^2)\ [=\text{ἀριθμός}].$$

Ἐκτὸς τούτων, διὰ $\omega = 0$, ὁ πρῶτος δὲν δίδει τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου, οὐδὲ ὁ δεύτερος τὸν ὄγκον τοῦ κ. κώνου κλπ.

Ἀντιθέτως, διὰ $\omega = 0$, ἢ διὰ $\omega = 0$, $q = 1$, ἢ διὰ $q = 1$, ὁ τύπος (2) ὃν ἐδώσαμεν δίδει ἀμέσως τοὺς τύπους τοῦ ὄγκου τοῦ κολούρου κώνου, τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ περιγραφέντος κυλίνδρου (τύπος (1)) ἀντιστοίχως.

Ἀριθμητικαὶ σχέσεις

Θεώρημα 714

1867. Ἐὰν εἰς τετράεδρον τρεῖς ἕδραι εἶναι ἴσαι, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς τετάρτης ἕδρας ἀπὸ τῶν τριῶν ἄλλων εἶναι σταθερόν.

(Βλ. *Μέθοδοι,* § 170).

Θεώρημα 714—I

1868. Αἱ κάθετοι, αἱ ἀγόμεναι ἐκ τυχόντος σημείου τῆς βάσεως κανονικῆς πυραμίδος ἐπὶ τὰς παραπλεύρους ἕδρας της, ἔχουσι ἄθροισμα σταθερόν.

Θεώρημα 714—II

1869. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κανονικοῦ πολυέδρου εὑρισκομένου, ἀπὸ τῶν ἑδρῶν τοῦ στερεοῦ εἶναι σταθερόν.

(Βλ. *Μέθοδοι,* § 171).

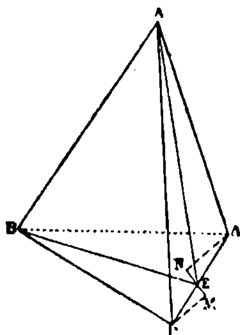
Θεώρημα 715

1870. Τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον μίαν δίεδρον τετραέδρου διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι ἀκμὴν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἑδρῶν τῆς διχοτομηθείσης διέδρου.

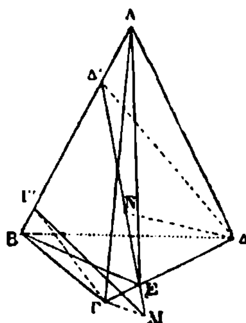
Ἄς εἶναι ΑΒΕ τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τὴν δίεδρον ΑΒ. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι

$$\frac{\Gamma E}{\Delta E} = \frac{AB\Gamma}{AB\Delta}.$$

Θεωροῦμεν τὰ δύο τετράεδρα Ε, ΑΒΓ καὶ Ε, ΑΒΔ· ἐπειδὴ τὸ



Σχ. 1218.



Σχ. 1219.

σημεῖον Ε κεῖται ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου τὴν δίεδρον ΑΒ θὰ ἀπέχῃ ἴσον τῶν ἑδρῶν ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ, δηλ. τὰ δύο τετράεδρα

θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἐπομένως, ὁ λόγος των, θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν βάσεων των:

$$\frac{(E,\,AB\Gamma)}{(E,\,AB\Delta)}=\frac{AB\Gamma}{AB\Delta}\,. \qquad (I)$$

Τὰ αὐτὰ τετράεδρα, λαμβανομένης τῆς κοινῆς αὐτῶν ἕδρας ὡς βάσεως, θὰ ἔχουν λόγον, ὃν λόγον ἔχουν τὰ ὕψη αὐτῶν, ΓΜ καὶ ΔΝ:

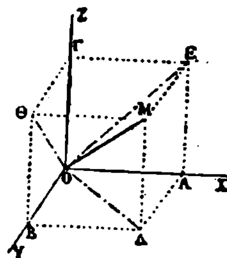
$$\frac{(E,\,AB\Gamma)}{(E,\,AB\Delta)}=\frac{\Gamma M}{\Delta N}=\frac{\Gamma E}{\Delta E}\,. \qquad (II)$$

Συγκρίνοντες τὰς (Ι), (ΙΙ) ἰσότητας, λαμβάνομεν

$$\frac{AB\Gamma}{AB\Delta}=\frac{\Gamma E}{\Delta E}\,.$$

Θεώρημα 716

1871. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν εὐθυγράμμου τμήματος, ἐπὶ τρεῖς ἄξονας σχηματίζοντας τρισορθογώνιον στερεὰν γωνίαν, ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ τμήματος τούτου.



Σχ. 1220.

Ἂς εἶναι ΟΜ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ οἱ τρεῖς ἄξονες.

Δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν, ὅτι τὸ ἓν ἄκρον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος συμπίπτει μὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἀξόνων, ἀφοῦ αἱ προβολαὶ δύο εὐθυγράμμων τμημάτων, ἴσων καὶ παραλλήλων, ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὰς προβολὰς τοῦ ΟΜ ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ Μ τρία ἐπίπεδα ἀντιστοίχως παράλληλα πρὸς τὰ ΧΟΥ, ΧΟΖ καὶ ΥΟΖ. Σχηματίζομεν οὕτω ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκμαὶ ΟΑ, ΟΒ καὶ ΟΓ εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ ΟΜ.

Ἐπειδὴ ἡ ΜΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΒΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΟΔ. Θὰ ἔχωμεν ἑπομένως

$$OM^2=O\Delta^2+M\Delta^2.$$

Ἀλλὰ $$O\Delta^2=OB^2+B\Delta^2,$$

ἢ $$O\Delta^2=OB^2+OA^2$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$OM^2=OB^2+OA^2+M\Delta^2,$$

ἢ $$OM^2=OA^2+OB^2+O\Gamma^2,$$

ἀφοῦ $$M\Delta=O\Gamma.$$

Θεώρημα 716—I

1872. Το ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ τὰς ἕδρας τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος.

Ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον ζήτημα, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἄκρον τοῦ τμήματος συμπίπτει μὲ τὴν κορυφὴν τῆς τρισορθογωνίου.

Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς τρεῖς ἕδρας τὰς ΜΕ, ΜΔ καὶ ΜΖ.

Ἐκ τῶν σχηματιζομένων ὀρθογωνίων τριγώνων λαμβάνομεν:

$$ΟΔ^2 = ΟΑ^2 + ΟΒ^2, \quad ΟΕ^2 = ΟΑ^2 + ΟΓ^2, \quad ΟΖ^2 = ΟΒ^2 + ΟΓ^2$$

καὶ διὰ προσθέσεως:

$$ΟΔ^2 + ΟΕ^2 + ΟΖ^2 = 2\,ΟΑ^2 + 2\,ΟΒ^2 + 2\,ΟΓ^2 = 2\,ΟΜ^2.$$

Θεώρημα 717

1873. Διὰ τυχόντος ἐπιπέδου τέμνομεν τὴν στερεὰν γωνίαν Σ κανονικοῦ ὀκταέδρου· ἐὰν Α, Β, Γ καὶ Δ εἶναι τὰ σημεῖα καθ' ἃ τέμνονται αἱ ἀκμαὶ τῆς στερεᾶς Σ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ΣΑ, ΣΓ ἀπέναντι ἀκμαὶ τῆς στερεᾶς νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις

$$\frac{1}{ΣΑ} + \frac{1}{ΣΓ} = \frac{1}{ΣΒ} + \frac{1}{ΣΔ}.$$

Γνωρίζομεν ὅτι ἐὰν Ο εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου γωνίας ΑΣΓ καὶ ΑΟΓ τυχοῦσα τέμνουσα τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας δι' αὐτοῦ, θὰ εἶναι

$$\frac{1}{ΣΑ} + \frac{1}{ΣΓ} = k = σταθ.$$

Ἀλλ' αἱ γωνίαι ΑΣΓ καὶ ΒΣΔ εἶναι ἴσαι καὶ ἐὰν τὸ σημεῖον Ο ληφθῇ ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ Σ διαγωνίου τοῦ στερεοῦ καὶ διχοτόμου ἀμφοτέρων τῶν γωνιῶν τούτων, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{ΣΑ} + \frac{1}{ΣΓ} = k = \frac{1}{ΣΒ} + \frac{1}{ΣΔ}.$$

Παρατήρησις. Ἡ ὡς ἄνω ἀπόδειξις ἐφαρμόζεται και εἰς τετραγωνικὴν πυραμίδα, ἔχουσαν βάσιν ὀρθογώνιον· ἀρκεῖ τὸ ὕψος τῆς τῆς πυραμίδος νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ὀρθογωνίου.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα ἀνήκε. εἰς τὸν Lévy, *N. A.*, 1842, σ. 375, n° 35.

Ἡ δοθεῖσα λύσις εἰς τὰ *Nouvelles Annales de mathématiques*, εἰς τὰ 1850, σ. 60, εἶναι τοῦ Dewulf, μαθητοῦ τότε εἰς τὸ Λύκειον τοῦ Saint-Omer. Ἡ λύσις αὕτη εἶναι πολὺ ἁπλῆ ἀλλ' ἡ δοθεῖσα εἶναι ἀκόμη περισσότερον.

Ὀφείλομεν εἰς τὸν Dewulf, τὴν μετάφρασιν τῶν *Στοιχείων τῆς Προβολικῆς Γεωμετρίας τοῦ Cremona.*

Θεώρημα 718

1874. Διὰ τοῦ σημείου τομῆς Ο τῶν διαγωνίων ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταέδρου, φέρομεν ἐπίπεδον (Π), τέμνον πάσας τὰς ἀκμὰς τοῦ στερεοῦ. Ὁρίζονται οὕτω ἐπὶ ἑκάστης ἀκμῆς δύο τμήματα μὲ ἀρχὰς τὰς ἐπὶ ταύτης κορυφὰς τοῦ ὀκταέδρου καὶ κοινὸν πέρας τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ἀκμῆς καὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π). Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν μηκῶν τῶν οὕτω ὁριζομένων εἴκοσι τεσσάρων τμημάτων εἶναι ποσότης σταθερά.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 284).

Θεώρημα 719

1875. Διὰ σταθεροῦ σημείου Ο, κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἴσον ἀπεχούσης τῶν ἑδρῶν μιᾶς κανονικῆς στερεᾶς γωνίας Σ, φέρομεν τυχὸν ἐπίπεδον (Π), τέμνον τὰς ἀκμὰς εἰς Α, Β,... Μ. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν μηκῶν ΣΑ,... ΣΜ εἶναι ποσότης σταθερά

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 286).

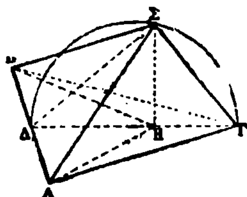
Θεώρημα 720

1876. Διὰ τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ἑνὸς τετραέδρου φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα. Σχηματίζομεν οὕτω ἕνα περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο στερεῶν;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 157).

Θεώρημα τοῦ Gua de Malves 720—I

1877. Ἐὰν τριγωνικῆς πυραμίδος ἡ μία στερεὰ γωνία εἶναι τρισορθογώνιος, τὸ τετράγωνον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἀπέναντι ταύτης ἕδρας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν ἄλλων ἑδρῶν.



Σχ. 1221

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει ἀποδειχθῆ ἀλλὰ μὲ κάπως διάφορον ἐκφώνησιν (§§ 1556 καὶ 1557). Ἀναγόμεθα εἰς τὰ θεωρήματα ταῦτα, παρατηροῦντες ὅτι ἂν Σ τρισορθογώνιος, ἡ ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον ὀξυγώνιον καὶ ὅτι ἂν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΣΒ, ΑΣΓ καὶ ΓΣΒ περιστραφῶσιν ἀντιστοίχως περὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ καὶ ΒΓ ἕως οὗ εὑρεθῶσι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ καὶ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, θὰ ἔχωμεν τὰς περιπτώσεις τῶν §§ 1556 καὶ 1557.

Εἰς τὸν χῶρον ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἁπλουστέρα.

Διὰ τῆς ΓΣ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὸ ΓΣΔ· ἐπειδὴ τὸ ΓΣΔ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΓ καὶ ἐπομένως τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΣΗ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ΓΣΔ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΣΓ λαμβάνομεν:

$$ΔΣ^2 = ΔΓ . ΔΗ,$$

ἢ $$ΑΒ^2 . ΔΣ^2 = ΑΒ^2 . ΔΓ . ΔΗ,$$

ἢ $$ΑΒ^2 . ΔΣ^2 = (ΑΒ . ΔΓ) . (ΑΒ . ΔΗ),$$

ἢ $$4(ΑΒΣ)^2 = 4(ΑΒΓ) (ΑΒΗ). \qquad (α)$$

Φέροντες ὁμοίως διὰ τῶν ΒΣ καὶ ΑΣ ἐπίπεδα κάθετα ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ΑΓ καὶ ΒΓ λαμβάνομεν:

$$4(\text{ΑΣΓ})^2 = 4(\text{ΑΒΓ})(\text{ΑΗΓ})$$

καὶ

$$4(\text{ΒΣΓ})^2 = 4(\text{ΑΒΓ})(\text{ΒΗΓ}).$$

Ἄρα:

$$4(\text{ΑΒΣ})^2 + 4(\text{ΑΣΓ})^2 + 4(\text{ΒΣΓ})^2 = 4(\text{ΑΒΓ})(\text{ΑΒΗ}) +$$
$$+ 4(\text{ΑΒΓ})(\text{ΑΗΓ}) + 4(\text{ΑΔΓ})(\text{ΒΗΓ}),$$

ἢ $(\text{ΑΒΣ})^2 + (\text{ΑΣΓ})^2 + (\text{ΔΣΓ})^2 = (\text{ΑΒΓ})\left[(\text{ΑΒΗ}) + (\text{ΑΗΓ}) + (\text{ΒΗΓ})\right].$

Ἄρα:

$$(\text{ΑΒΣ})^2 + (\text{ΑΣΓ})^2 + (\text{ΒΣΓ})^2 = (\text{ΑΒΓ})^2.$$

Ἑτέρα ἀπόδειξις:

$$\text{ΑΒ}^2 . \text{ΔΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2(\text{ΣΓ}^2 + \text{ΣΔ}^2) = \text{ΑΒ}^2 . \text{ΣΔ}^2 + \text{ΑΒ}^2 . \text{ΣΓ}^2 =$$
$$= \text{ΑΒ}^2 . \text{ΣΔ}^2 + (\text{ΣΒ}^2 + \text{ΑΣ}^2)\,\text{ΣΓ}^2 =$$
$$= \text{ΑΒ}^2 . \text{ΣΔ}^2 + \text{ΣΒ}^2 . \text{ΣΓ}^2 + \text{ΑΣ}^2 . \text{ΣΓ}^2,$$

ἢ

$$4(\text{ΑΒΓ})^2 = 4(\text{ΣΑΒ})^2 + 4(\text{ΣΒΓ})^2 + 4(\text{ΑΣΓ})^2,$$

ἢ

$$(\text{ΑΒΓ})^2 = (\text{ΣΑΒ})^2 + (\text{ΣΒΓ})^2 + (\text{ΣΑΓ})^2.$$

Παρατηρήσεις. Δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸ θεώρημα ὡς ἑξῆς *Τὸ τετράγωνον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τριγώνου* ΑΒΓ *ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν του ἐπὶ τρία ἐπίπεδα κάθετα ἀνὰ δύο καὶ ἀγόμενα διὰ τῶν πλευρῶν του.*

Βλέπε ὡσαύτως: *Education chrétienne, II, supplément* 21, ζήτ. 36, σ. 332.

Θεώρημα τοῦ Tinseau 721

1878. **Τὸ τετράγωνον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς τυχούσης ἐπιπέδου ἐπιφανείας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν προβολῶν τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τρία ἐπίπεδα κάθετα ἀνὰ δύο.**

Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἐπέκτασις τοῦ προηγουμένου.

1) Αἱ προβολαὶ ἐπιπέδου σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδα παράλληλα εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

2) Πᾶν ἐπίπεδον σχῆμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τριγώνων, ὡς τὸ ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΣ (§ 1877). Ἀληθεύει ἑπομένως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ὡς ἄνω θεώρημα.

1878 α. Σημείωσις. Τὸ *θεώρημα τοῦ Tinseau* ἀνεκοινώθη εἰς τὴν Ἀκαδημίαν τῶν Ἐπιστημῶν κατὰ τὸ 1774 καὶ ἐδημοσιεύθη τὸ 1780 εἰς τὸν ΙΧ τόμον τοῦ ***Recueil des Savantes étrangers.***

Τὸ *θεώρημα τοῦ Gua* (§ 1877), εἶναι πόρισμα τοῦ *θεωρήματος τοῦ Tinseau.* Οὐχ' ἧττον ὅμως ἐμελετήθη ἀπ' εὐθείας τὸ 1783 καὶ δύναται νὰ χρησιμεύσῃ πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ γενικοῦ θεωρήματος. Τοῦτο ἄλλως τε ἐποιήσαμεν προηγουμένως.

Ἡ δημοσίευσις, ἡ γενομένη τὸ 1859, τῶν Ἀνεκδότων ἔργων τοῦ

Descartes ἀποδεικνύει ὅτι ὁ μέγας οὗτος Γεωμέτρης ἐγνώριζε τὰς ἰδιότητας τοῦ τρισορθογωνίου τετραέδρου (*N. A.*, 1859, *Βιβλιογραφία, σ.* 59).

Θεώρημα 722

1879. **Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ τέμνεται ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΛΜΝ καὶ τὴν πυραμίδα κατὰ τὴν τομὴν Α'Β'Γ'. Στρέφομεν τὴν τομὴν Α'Β'Γ' περὶ τὸν ἄξονα ΜΝ καὶ φέρομεν εἰς ἑκάστην θέσιν αὐτῆς, τὰς εὐθείας ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ'. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν εὐθειῶν τούτων;**

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 182).

Θεώρημα 722—I

1879 α. **Ἔστω ἐπίπεδον Π καὶ Α, Β, Γ τρία σημεῖα ἐκτὸς του επιπέδου κείμενα. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα $\Sigma = OA + OB + O\Gamma$ εἶναι ἐλάχιστον, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τυχοῦσα ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ὁρίζει μετὰ τῆς καθέτου ΟΜ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, ἐπίπεδον διχοτομοῦν τὴν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων εὐθειῶν.**

(*A. d. G.*, τόμ. XIII, 1822-23, σ. 248, ἀποδείξεις σ. 328-332 ὑπὸ W. H. T. (Ρώμη), Querret καὶ τόμ. XIV, σ. 13 ὑπὸ Sturm (Γενεύη)).

Ἔστωσαν Α', Β', Γ' αἱ προβολαὶ τῶν Α, Β, Γ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π. Ἐὰν ὑποθέσωμεν (ὡς καὶ ἐν § 1079) πρὸς στιγμὴν σταθερὸν τὸ μῆκος τῆς ΟΑ, ἡ μεταβολὴ τοῦ ἀθροίσματος $OB + O\Gamma$ θὰ ἐξαρτηθῇ ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἐπιπέδου Π, τῆς γραφομένης μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α' καὶ ἀκτῖνα ΟΑ'.

Ἐργαζόμενοι καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ Fermat (§ 1079), ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ θεωρήσωμεν τὸ διὰ τῶν Β καὶ Γ ἐπίπεδον ΒΟΓ καὶ ἐφαπτόμενον τῆς περιφερείας (Α') εἰς σημεῖον Ο. Τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ εἶναι τὸ ἐλαχίστου ἀθροίσματος $OB + O\Gamma$, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΟΒ, ΟΓ ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας.

Τὸ ἐπίπεδον Α'ΑΟ κάθετον ἐπὶ τὸ Π θὰ περιέχῃ προφανῶς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΒΟΓ καὶ ἑπομένως θὰ διαιρῇ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη.

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου Π, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τριῶν σημείων Α, Β, Γ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου κειμένων εἶναι *ἐλάχιστον*, εἶναι ἐκεῖνο, διὰ τὸ ὁποῖον τὰ διὰ τῶν ἀκμῶν τῆς τριέδρου ΟΑΒΓ καὶ τῶν διχοτόμων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν ἀγόμενα ἐπίπεδα τέμνονται κατ' εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π (Sturm, ὡς ἄνω, σ. 15).

Ὁ μαθηματικὸς οὗτος γενικεύει τὴν ἀνωτέρω πρότασιν ἀλλὰ δὲν λύει τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου Π διὰ τὸ ὁποῖον συμβαίνει τὸ ἐν λόγῳ ἐλάχιστον. (*A. d. G.*, τόμ. XII, σ. 380 καὶ ἐπμ. § 1901 γ, σημ. 3).

Σημείωσις. **Εἰς τὸ ἐπίπεδον, τὸ *ἰσογώνιον κέντρον* (§ 755) εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἐλάχιστον.**

Ἂν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, Ε ἡ ἐπιφάνειά του

καὶ x, y, z αἱ ἀποστάσεις τοῦ ἰσογωνίου κέντρου ἀπὸ τῶν κορυφῶν, συμβαίνει

$$x + y + z = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4E\sqrt{3}}{2}}.$$

(*A. d. G.*, τόμ. XX, 1829 - 1830, σ. 299 καὶ 302).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα

Πρόβλημα 723

1880. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μεγίστου ὄγκου ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἐκ τῶν ἐχόντων ἄθροισμα τριῶν ἀκμῶν δοθὲν μῆκος λ.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 372).

Πρόβλημα 724

1881. Ἐκ πάντων τῶν ὀρθῶν παραλληλεπιπέδων, τῶν ἐχόντων ὡς βάσιν τετράγωνον καὶ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ ὕψους σταθερόν, ποῖον τὸ μέγιστον κατ' ὄγκον;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 375).

Πρόβλημα 725

1882. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων τῶν ἐχόντων δοθεῖσαν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν $2\alpha^2$, ποῖον τὸ μέγιστον κατ' ὄγκον;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 378).

Πρόβλημα 726

1883. Ποία ἡ μεγίστη χωρητικότης ἑνὸς ἀνοικτοῦ ὀρθογωνιακοῦ κιβωτίου, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν πέντε ἑδρῶν του εἶναι δοθὲν α^2;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 379).

Πρόβλημα 727

1884. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, μὲ βάσιν τετράγωνον καὶ διὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν τῆς βάσεως καὶ μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας εἶναι δοθὲν α^2, ποῖον τὸ μέγιστον κατ' ὄγκον;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 380).

Πρόβλημα 728

1885. Δίδεται ἓν τετράγωνον πλευρᾶς α. Ἐκ τῶν κορυφῶν του ἀφαιροῦμεν τέσσαρα ἴσα τετράγωνα πλευρᾶς y, ὅπου $y < \frac{\alpha}{2}$ καὶ μὲ

τὴν ἀπομένουσαν ἐπιφάνειαν κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ μῆκος y, ὥστε τὸ κατασκευαζόμενον παραλληλεπίπεδον νὰ ἔχῃ τὸν μέγιστον ὄγκον.

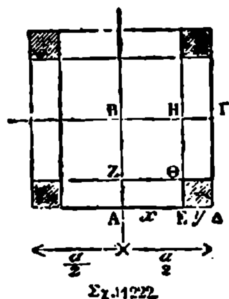
Ἄς εἶναι ΑΕ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως $= x$ καὶ ΕΔ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου $= y$.

Ὄγκος $= 4x^2y$ καὶ $x + y = \frac{\alpha}{2}$.

Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἀμέσως (§ 376):

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{3}$$

καὶ
$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{6}.$$



Σχ. 1222.

Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ ὄγκου, εὑρίσκομεν:

$$V = (2x)^2 \cdot y = \left(2\frac{\alpha}{3}\right)^2 \cdot \frac{\alpha}{6} = \frac{4\alpha^3}{54} = \frac{2\alpha^3}{27}.$$

Πρόβλημα 728—Ι

1885 α. Δίδεται φύλλον χάρτου σχήματος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἔχουν μήκη α καὶ β. Ἀπὸ τὰς τέσσαρας κορυφάς του ἀφαιροῦμεν 4 τετράγωνα ἴσα, ἔχοντα πλευρὰν x.

Νὰ ὁρισθῇ ἡ πλευρὰ τῶν τετραγώνων τούτων εἰς τρόπον ὥστε, τὸ κυτίον, τὸ ἀνοικτὸν κατὰ τὴν μίαν πλευρὰν καὶ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τὸ κατασκευαζόμενον μὲ τὴν ἀπομένουσαν ἐπιφάνειαν τοῦ χάρτου καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει πυθμένα ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις $\alpha - 2x$ καὶ $\beta - 2x$, δύο ἕδρας παραπλεύρους μὲ διαστάσεις x καὶ $\alpha - 2x$ καὶ τὰς δύο ἄλλας μὲ διαστάσεις x καὶ $\beta - 2x$, νὰ ἔχῃ τὸν μέγιστον ὄγκον.

$$V = x(\alpha - 2x)(\beta - 2x).$$

Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος μεταχειριζόμεθα τὴν μέθοδον τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν (*Cours d'algèbre élémentaire* ὑπὸ *F. G.-M.*, σ. 365).

Σημείωσις. Τὸ ζήτημα κατέστη κλασικὸν ἀπὸ τῆς ἐποχῆς καθ' ἣν ὁ Briot τὸ εἰσήγαγε εἰς τὸ *Traité d'Algèbre* αὐτοῦ.

Ἡ μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν ὀφείλεται εἰς τὸν H. Grillet, καθηγητὴν εἰς *Brest* τὸ 1850. (N. A. 1850, σ. 70). Βλέπε ὡσαύτως ἄρθρον τοῦ Gérono (N. A. 1857, σ. 6).

Πρόβλημα 728—ΙΙ

1885 β. Νὰ τμηθῇ ὀρθογωνιακὸν φύλλον χάρτου ἔχον πλευρὰς α καὶ β κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ σχηματισθοῦν ἐν συνεχείᾳ αἱ ἓξ ἕδραι ἑνὸς κλειστοῦ ὀρθογωνιακοῦ κυτίου.

Νὰ μελετηθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κυτίου τούτου καὶ νὰ εὑρεθῇ πότε ὁ ὄγκος του γίνεται μέγιστος, διὰ μεταβολὰς τῆς μικροτέρας πλευρᾶς β τοῦ χαρτονίου ἀπὸ 0 ἕως τὸ μῆκος τῆς μεγαλυτέρας α.

Τὸ ζήτημα παρουσιάζει πολὺ ἐνδιαφέρον. Εἰς πολλὰς εἰδικὰς περιπτώσεις ἡ λύσις αὐτοῦ εὑρίσκεται εὐκόλως, εἴτε ἀπ' εὐθείας εἴτε διὰ τῆς χρήσεως τῆς μεθόδου τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ ἀκόλουθα προβλήματα, λελυμένα, τὸ πλεῖστον, εἰς τὰ *Cours d'Algebre*, περὶ ὧν ὡμιλήσαμεν εἰς τὰ προηγούμενα καὶ εἰς τὰς *Exercices d'Algèbre*, τὰ ὁποῖα συμπληροῦν τὰ Cours.

Πρόβλημα 728—III

1886. Νὰ λυθῇ μὲ στοιχειώδη μέθοδον, δηλαδὴ νὰ μὴ κάμωμεν χρῆσιν τῶν παραγώγων, τὸ ἑξῆς ζήτημα: Μεταξὺ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν διαγώνιον, ποῖον εἶναι τὸ ἔχον τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν (Intermediaire des Mathématiciens, 1908, σ. 186 ζήτημα 3408).

Ἂς εἶναι x, y, z αἱ ἀκμαὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ δ ἡ διαγώνιός του. Θὰ ἔχωμεν

$$x^2 + y^2 + z^2 = \delta^2,$$

τὸ δὲ ἥμισυ τῆς ἐπιφανείας του δίδεται ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος:

$$E = xy + yz + xz.$$

Τούτου ζητεῖται τὸ μέγιστον.

Θεωρήσωμεν πρὸς στιγμὴν τὸ μῆκος z σταθερόν. Θὰ ἔχωμεν

$$x^2 + y^2 = \delta^2 - z^2 = \text{σταθ.},$$

καὶ

$$E = xy + z(x + y),$$

ἡ δὲ παράστασις E γίνεται μεγίστη, ὅταν ἀμφότεροι οἱ ὅροι της xy καὶ $z(x+y)$ ἢ $x+y$ λάβουν τὰς μεγίστας αὐτῶν τιμάς. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει διὰ $x = y$ (§ 345 καὶ 346 α), ἀφοῦ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων $x^2 + y^2$ εἶναι σταθερὰ ποσότης.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι, ἀγόμεθα καὶ εἰς τὴν ἰσότητα $y = z$. Ἐπομένως, διὰ τὸ ζητούμενον μέγιστον θὰ πρέπει νὰ εἶναι:

$$x = y = z = \frac{\delta\sqrt{3}}{3}$$

καὶ τὸ στερεὸν κύβος.

Ἡ αὐτὴ λύσις ἀνταποκρίνεται εἰς τὸ ἑξῆς ζήτημα:

Πρόβλημα. Μεταξὺ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν διαγώνιον, ποῖον εἶναι τὸ ἔχον μέγιστον ἄθροισμα ἀκμῶν;

Λαμβάνομεν μίαν ἕδραν του, ἔστω τὴν xy, ὡς βάσιν καὶ θεωρήσωμεν τὴν περιγεγραμμένην εἰς αὐτὴν περιφέρειαν. Θὰ ἔχωμεν καθ' ὁμοίους, ὡς καὶ προηγουμένους, συλλογισμούς:

$$x^2 + y^2 = \delta^2 - z^2 = \text{σταθ.},$$

καὶ ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου τούτου, ἥτις θὰ μᾶς χρησιμεύσῃ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ στερεοῦ, θὰ γίνῃ μεγίστη ἂν $x = y$ (ὁπότε καὶ τὸ ἐμβαδόν της καθίσταται μέγιστον). Θὰ πρέπει ἑπομένως ἑκάστη ἕδρα νὰ εἶναι τετράγωνον καὶ τὸ ζητούμενον στερεὸν κύβος.

Πρόβλημα 728—IV

1886 α. Ἓν ὀκτάεδρον ἔχει καὶ τὰς ὀκτώ του ἕδρας ἴσας. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ἐγγραφομένων εἰς αὐτὸ παραλληλεπιπέδων.

Τὰ διαγώνια ἐπίπεδα διαιροῦν τὸ ὀκτάεδρον εἰς ὀκτὼ ἰσοδύναμα τετράεδρα· ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν ἓν ἐξ αὐτῶν. Τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ἐγγραφομένων παραλληλεπιπέδων πρέπει νὰ ἔχῃ τὴν κορυφήν του εἰς τὸ κέντρον βάρους τῆς θεωρηθείσης ἕδρας (§ 384). Ἑπομένως, αἱ ἀκμαὶ τοῦ μεγίστου ἐγγραφομένου παραλληλεπιπέδου εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον πρέπει νὰ ἑνώνουν ἀνὰ δύο τὰ κέντρα βάρους τῶν προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ ὀκταέδρου. (Πρβ. §§ 381, 382).

Πρόβλημα 728—V

1886 β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κύλινδρος ἐκ τῶν ἐχόντων ὁλικὴν ἐπιφάνειαν δοθεῖσαν:

1) *Κύλινδρος κλειστός*, μὲ δύο βάσεις.
2) *Κύλινδρος ἀνοικτός*, μὲ μίαν βάσιν.

Πρώτη περίπτωσις. Ἂς παραστήσωμεν μὲ $2\pi S^2$ τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν καὶ πV τὸν ὄγκον τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὸ μέγιστον· ἄς εἶναι δὲ x ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ y τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Θὰ ἔχωμεν:

$$2\pi(x^2+xy)=2\pi S^2 \quad ἢ \quad x^2+xy=S^2 \quad ἢ \quad y=\frac{S^2-x^2}{x} \qquad (1)$$

καὶ $\pi V=\pi x^2 y,\quad V=x^2 y,\quad V=x(S^2-x^2)\quad ἢ\quad V^2=x^2(S^2-x^2)^2.$

Ἐπειδὴ οἱ δύο παράγοντες (x^2) καὶ (S^2-x^2) ἔχουσι σταθερὸν ἄθροισμα, τὸ γινόμενον τῶν δυνάμεών των, τὸ V^2, θὰ καταστῇ μέγιστον ὅταν οὗτοι γίνωσιν ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἐκθέτας 1 καὶ 2, ἤτοι ὅταν

$$\frac{x^2}{S^2-x^2}=\frac{1}{2},\quad x=\frac{S}{\sqrt{3}}.$$

Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν

$$y=\frac{2S}{\sqrt{3}}.$$

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι τοῦ μεγίστου κυλίνδρου τὸ ὕψος εἶναι διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως.

Δευτέρα περίπτωσις. Δυνάμεθα νὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀπ' εὐθείας ὡς καὶ προηγουμένως. Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι ἡ περίπτωσις αὕτη τοῦ ἀνοικτοῦ κυλίνδρου εἶναι παρόμοια πρὸς ἐκείνην τοῦ ἀνοικτοῦ παραλληλεπιπέδου, δηλαδὴ ἐκείνην εἰς τὴν ὁποίαν δίδεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῶν 5 ἑδρῶν (§ 379). Λαμβάνομεν ἴσον κύλινδρον μὲ μίαν βάσιν καὶ θέτομεν τὸν ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου εἰς τρόπον, ὥστε νὰ συμπέσουν αἱ ἀνοικταὶ βάσεις (αἱ περιφέρειαι εἰς ἃς περατοῦνται αἱ γενέτειραι). Οὕτω προκύπτει κύλινδρος διπλάσιος τοῦ δοθέντος, μὲ διπλασίαν ἐπιφάνειαν καὶ μὲ δύο βάσεις. Ἀναγόμεθα οὕτω εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ τὸ μέγιστον τοῦ κατασκευασθέντος θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ μέγιστον τοῦ ζητουμένου.

Διὰ τὸν ἀνοικτὸν ὥστε κύλινδρον, τὸ μέγιστον τοῦ ὄγκου του λαμβάνεται ὅταν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἰσοῦται πρὸς τὸ ὕψος.

Πρόβλημα 728—VI

1886γ. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ ἐγγραφῶσι τὰ ἔχοντα τὴν μεγίστην ὁλικὴν ἐπιφάνειαν κάτωθι στερεά: 1) Κύλινδρος. 2) Κῶνος. 3) Κανονικὴ πυραμὶς μὲ βάσιν τετράγωνον.

Διὰ τὰ δύο πρῶτα προβλήματα βλέπε: *Cours d'Algèbre* ὑπὸ F. G.-M., σ. 366, καὶ σ. 428, n° 524. *Exercices d'Algèbre*, σ. 499, n° 1383 καὶ 1384· βλέπε ὡσαύτως §§ 1385 καὶ 1386.

Διὰ τὴν 3ην βλέπε: *Étude élémentaire sur la théorie des maxima et des minima*, σ. 54, ὑπὸ Aubry. ('Εκ τοῦ *El Progreso Matemático* τῆς Σαραγόσσας 1900).

Πρόβλημα 729

1887. Ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς βάσεως τετραέδρου, τοῦ ὁποίου ἡ εἰς τὴν κορυφὴν Ο στερεὰ γωνία εἶναι τρισορθογώνιος καὶ αἱ ἐξ αὐτῆς ἀκμαὶ ἴσαι, φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς ἕδρας τῆς τριέδρου Ο. Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τῆς βάσεως τὸ κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν σχηματιζόμενον παραλληλεπίπεδον ἔχει μέγιστον ὄγκον;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 381).

Πρόβλημα 730

1888. Ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς βάσεως ΑΒΓ τετραέδρου τυχόντος Ο — ΑΒΓ, φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς ἕδρας τῆς κορυφῆς Ο. Ἐκ τῶν σχηματιζομένων παραλληλεπιπέδων, ποῖον τὸ ἔχον τὸν μέγιστον ὄγκον, ὅταν αἱ ἐκ τοῦ Ο ἀκμαὶ ἔχουν μήκη ἄνισα;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 382).

Πρόβλημα 731

1889. Διὰ τῆς κορυφῆς Δ παραλληλεπιπέδου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ΑΒΓ, τέμνον τὰς ἀκμὰς ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ τῆς ἀπέναντι τῆς Δ τριέδρου Ο εἰς τρόπον ὥστε τὸ τετράεδρον Ο — ΑΒΓ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον. (Σχ. 263).

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 383).

Πρόβλημα 732

1890. Δοθείσης πυραμίδος, νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πρίσμα, μὲ βάσιν τὴν τομὴν τῆς πυραμίδος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ὕψος ΘΗ (Σχ. 264) νὰ ἔχῃ τὸν μέγιστον ὄγκον.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 384).

Πρόβλημα 733

1891. Τέμνομεν κανονικὸν τετράεδρον ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς δύο ἀπέναντι ἀκμάς του ΑΒ καὶ ΓΔ. Νὰ ἐξετασθῶσι αἱ μεταβολαὶ τῆς προκυπτούσης τομῆς, ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον κινῆται ἀλλὰ παραμένον παράλληλον πάντοτε πρὸς τὰς ἰδίας ἀκμάς.

Ἄς εἶναι ΕΖΘΗ μία τομὴ παράλληλος πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ. Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΘΗ εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ τῶν διὰ τῆς ΑΒ διερχομένων ἑδρῶν ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς

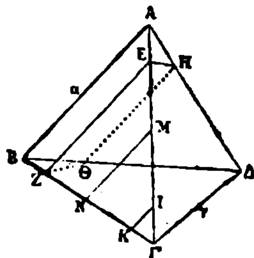
αὐτήν. Ὁμοίως, καὶ τὸ ζεῦγος ΕΗ καὶ ΖΘ εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ ἑπομένως τὸ σχῆμα ΕΖΘΗ παραλληλόγραμμον. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἄλλωστε ἰσχύει διὰ πᾶν τετράεδρον.

Ἐπειδὴ τὸ δοθὲν τετράεδρον εἶναι κανονικόν, αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ὀρθογώνιοι καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον. Ἑπομένως, ἀφοῦ τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΕΗ, ΒΓΔ, ΒΖΘ εἶναι ἰσόπλευρα:

$$ΑΕ = ΕΗ = ΑΗ = ΒΖ.$$

Καὶ ἐπειδή, ἀκόμη, ἐὰν λάβωμεν

$$ΓΙ = ΓΚ = ΕΑ,$$



Σχ. 1223.

θὰ εἶναι καὶ ΙΚ = ΕΗ, τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν νὰ σπουδάσωμεν τὰς μεταβολὰς ἔχει ὡς μίαν πλευρὰν τὴν παράλληλον ΕΖ πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΓΒ καὶ τὴν ἄλλην ἴσην πρὸς τὴν παράλληλον πρὸς τὴν πρώτην ΙΚ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Γ ἀγομένην, ἴσην πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῆς ΕΖ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ ἰδίου τριγώνου.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι *τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ ἐν λόγῳ ὀρθογωνίου εἶναι σταθερὸν* καὶ ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ τετραέδρου. Κατὰ συνέπειαν, τὸ μέγιστον αὐτοῦ λαμβάνεται ὅταν αἱ πλευραὶ ΕΖ καὶ ΙΚ καταστῶσιν ἴσαι, δηλ. διὰ τομὴν ἴσον ἀπέχουσαν τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ἥτις εἶναι τετράγωνον μὲ κορυφὰς τὰ μέσα τῶν τεσσάρων ἄλλων ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου.

Πρόβλημα 733—I

1892. Τὸ αὐτὸ ζήτημα διὰ τυχὸν τετράεδρον.

Ἡ τομὴ εἶναι παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ σχηματίζουν πάντοτε τὴν αὐτὴν γωνίαν, εἰς οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν εὑρίσκεται τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἐφ' ὅσον θὰ εἶναι τοῦτο παράλληλον πρὸς τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς τοῦ τετραέδρου ΑΒ καὶ ΓΔ. Οὕτω, ἡ γωνία φ ἣν σχηματίζουν αἱ πλευραὶ τῆς τομῆς ΕΗ καὶ ΕΖ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν γωνίαν, ἣν σχηματίζουν αἱ ΓΔ καὶ ΒΑ· ἐπειδὴ ἡ ΕΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ καὶ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΑΒ.

Τὸ ἐμβαδὸν ἑπομένως τῆς τομῆς θὰ εὑρίσκεται ἐὰν πολλαπλασιασθῶσι αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ αὐτῆς ἐπὶ σταθερὸν ἀριθμὸν=ἡμίτονον τῆς γωνίας φ ἣν σχηματίζουν. Διὰ νὰ σπουδάσωμεν λοιπὸν τὴν μεταβολὴν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς τομῆς ἀρκεῖ νὰ μελετήσωμεν τὰς μεταβολὰς τοῦ γινομένου τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν.

Ἄς εἶναι Ε τὸ σημεῖον τῆς ΑΓ δι' οὗ ἄγεται ἡ τομή.

Ἐὰν θέσωμεν

$$ΑΒ = α, \quad ΓΔ = γ \quad \text{καὶ} \quad \frac{ΓΕ}{ΑΕ} = \frac{ν}{μ},$$

Εὑρίσκομεν:

$$\frac{ΕΖ}{α} = \frac{ν}{μ+ν}, \text{ ἐξ ἧς } ΕΖ = \frac{αν}{μ+ν},$$

καὶ $\frac{\gamma}{EH} = \frac{\nu + \mu}{\mu}$, ἐξ ἧς $EH = \frac{\mu\gamma}{\nu + \mu}$.

Ἐπομένως:

$$EZ \cdot EH = \frac{\alpha\nu}{\mu + \nu} \cdot \frac{\mu\gamma}{\mu + \nu} = \frac{\mu\nu \cdot \alpha\gamma}{(\mu + \nu)^2}.$$

Ἐξαρτᾶται δηλαδὴ τὸ γινόμενον ΕΖ.ΕΗ ἐκ τοῦ γινομένου τῶν μεταβλητῶν παραγόντων μ καὶ ν. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\mu + \nu = A\Gamma$ εἶναι σταθερόν, τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ καταστῇ μέγιστον ὅταν οὗτοι γίνωσι ἴσοι, ἤτοι ὅταν τὸ Ε εὑρεθῇ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ, ὁπότε τὸ τέμνον ἐπίπεδον θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς ἀκμὰς ΑΒ καὶ ΓΔ. Θὰ ἔχωμεν τότε:

$$EZ \cdot EH = \frac{\mu^2 \cdot \alpha\gamma}{(2\mu)^2} = \frac{\alpha\gamma}{4}$$

καὶ $$(EZ\Theta H)_{max.} = \frac{\alpha\gamma}{4} \eta\mu\, \varphi.$$

Πρόβλημα 733—II

1892 α. Δίδεται ἓν στρεβλὸν τετράπλευρον· νὰ ὁρισθῇ ἓν ἐπίπεδον, ἐπὶ τὸ ὁποῖον ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ δοθέντος νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον (*Mathesis*, 1905, σ. 231).

Ἀρκεῖ νὰ ἐπανέλθωμεν εἰς ἓν θεώρημα ἀποδειχθὲν ἤδη (§ 1842).

Τὰ ἐπίπεδα τὰ προβάλλοντα τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ εἶναι παράλληλα μεταξύ των, τὸ αὐτὸ δὲ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὰ προβάλλοντα καὶ τὰς ἄλλας ἀπέναντι πλευρὰς ΒΓ καὶ ΔΑ. Ἐπομένως, τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν τομὴν δύο ἐπιπέδων, ἐκ τῶν ὁποίων ἓν εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ τὸ ἄλλο πρὸς τὰς ΒΓ καὶ ΔΑ.

Πρακτικῶς, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ', ἔχον προσκειμένας πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΔ' (§ 1798).

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ἐφ' ὅσον ἡ προβολὴ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον, τὸ κέντρον αὐτοῦ θὰ εἶναι προβολὴ τοῦ μέσου ἑκατέρας τῶν διαγωνίων τοῦ στρεβλοῦ. Δηλαδὴ ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον, ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου, θὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου ἑκατέρας τῶν διαγωνίων. Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν τὴν ἑνοῦσαν τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ στρεβλοῦ εὐθεῖαν καὶ ἐπὶ ταύτην φέρομεν κάθετον ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα 733—III

1892 β. Τετραγωνικῆς κανονικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔ αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ ἔχουν μῆκος λ καὶ ἡ γωνία εἰς τὴν κορυφὴν ἑκάστης ἕδρας εἶναι 30°. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἐλαχίστης τεθλασμένης (στρεβλῆς) γραμμῆς τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ σχεδιάσωμεν ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν καὶ ἥτις ἄρχεται ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐπανέρχεται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Φανταζόμεθα ὅτι ἀφαιροῦμεν τὴν βάσιν τῆς πυραμίδος καὶ ἀναπτύσσομεν τὰς παραπλεύρους ἕδρας της ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου.

Εὑρίσκομεν οὕτω ἕνα πολυγωνικὸν τομέα ἔχοντα κέντρον τὸ Σ', κορυφὰς τὰς κορυφὰς τῆς γραμμῆς Α', Β', Γ', Δ' καὶ Α'', εἰκόνος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς περιμέτρου ΑΒΓΔ τῆς βάσεως, καὶ γωνίαν εἰς τὸ κέντρον Α'ΣΑ'', ἴσην πρὸς 120°, δηλ. τετραπλασίαν τῶν 30°. Ἡ ἐλαχίστη γραμμὴ μεταξὺ Α' καὶ Α'' θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα Α'Α'', ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος λ. Ἐπομένως:

$$A'A'' = \lambda\sqrt{3}.$$

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσαρα μέρη, ἴσα ἀνὰ δύο. Ἕκαστον τῶν ἄκρων τμημάτων ἰσοῦται πρὸς $\frac{\lambda}{\sqrt{3}}$ καὶ ἕκαστον τῶν μέσων πρὸς $\frac{\lambda}{2\sqrt{3}}$· ὁλόκληρος ἐπομένως ἡ γραμμὴ $= \frac{2\lambda}{\sqrt{3}} + \frac{2\lambda}{2\sqrt{3}} = \frac{3\lambda}{\sqrt{3}} = \lambda\sqrt{3}.$

2) Εἶναι εὔκολον νὰ προσθέσωμεν καὶ ἄλλα ἀνάλογα ζητήματα. (Βλ. *Exercices de Géométrie descriptive*, n° 530).

Διάφοροι τύποι

Πρόβλημα 734

1893. Αἱ τρεῖς διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι α, β καὶ γ. Νὰ ἐκφρασθῶσι συναρτήσει αὐτῶν, ὁ ὄγκος, ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια, ἡ διαγώνιος, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκμῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτό.

Εὑρίσκομεν:

$$\text{Ὄγκος} = \alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma.$$

$$\text{Ὁλικὴ ἐπιφάνεια} = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma).$$

$$\text{Διαγώνιος} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

$$\text{Ἄθροισμα ἀκμῶν} = 4(\alpha + \beta + \gamma).$$

$$\text{Ἀκμὴ τοῦ κύβου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ παραλληλεπίπεδον} = \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}.$$

Πρόβλημα 735

1894. Ἡ ἀκμὴ κύβου εἶναι α. Νὰ ἐκφρασθῶσι συναρτήσει τῆς α, ἡ διαγώνιος τοῦ κύβου καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς αὐτοῦ ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ δύο ἀπέναντι ἀκμῶν.

Ἡ διαγώνιος του εἶναι

$$\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{3\alpha^2} = \alpha\sqrt{3}.$$

Ἡ διαγώνιος μιᾶς τῶν ἑδρῶν του:

$$\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{2\alpha^2} = \alpha\sqrt{2}.$$

Ἡ διαγώνιος τομὴ εἶναι ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις $\alpha\sqrt{2}$ καὶ α· τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἐπομένως εἶναι $\alpha^2\sqrt{2}$.

Πρόβλημα 736

1895. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεως εἶναι α καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμὴ β.

Τὸ ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι $\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}$.

Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς εἶναι κανονική. Τὸ κέντρον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀπέχει ἀφ' ἑκάστης τῶν κορυφῶν του τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου, ἥτις εἶναι ἴση πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ· ὁ ποὺς ἑπομένως τοῦ ὕψους τῆς πυραμίδος θὰ ἀπέχῃ ἀφ' ἑκάστης κορυφῆς

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}=\frac{\alpha}{3}\sqrt{3}.$$

Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχοντος ὑποτείνουσαν τὴν παράπλευρον ἀκμὴν β καὶ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν ἴσην πρὸς $\frac{\alpha}{3}\sqrt{3}$.

Ἑπομένως:

$$\upsilon^2=\beta^2-\frac{\alpha^2}{9}.3=\beta^2-\frac{\alpha^2}{3},\quad \upsilon=\sqrt{\beta^2-\frac{\alpha^2}{3}}$$

καὶ $$V=\frac{1}{3}\text{ ἐμβ. ἰσοπλεύρου τριγώνου}\times\sqrt{\beta^2-\frac{\alpha^2}{3}},$$

ἢ $$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}.\sqrt{\beta^2-\frac{\alpha^2}{3}}=\frac{\alpha^2}{12}\sqrt{3\beta^2-\alpha^2}.$$

Πρόβλημα 737

1896. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς πυραμίδος πρέπει νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν της, ὥστε τὰ δύο μέρη εἰς ἃ θὰ διαιρῆται νὰ εἶναι ἰσοδύναμα;

Ἂς εἶναι Π ἡ πυραμὶς ὁλόκληρος, Π' ἡ πυραμὶς μὲ βάσιν τὴν τομὴν καὶ υ, υ_1 τὰ δύο ὕψη τῶν πυραμίδων. Θὰ ἔχωμεν $\frac{\Pi'}{\Pi}=\frac{1}{2}$ καὶ ἐπειδὴ αἱ πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι:

$$\frac{\Pi'}{\Pi}=\frac{\upsilon_1^3}{\upsilon^3}.$$

Ὥστε:

$$\frac{\upsilon_1^3}{\upsilon^3}=\frac{1}{2},\quad \upsilon_1^3=\frac{1}{2}\upsilon^3,\quad \upsilon_1=\frac{\upsilon}{\sqrt[3]{2}}\quad\text{καὶ}\quad \upsilon_1=\upsilon.(0,7937...)$$

Πρόβλημα 738

***1897.* Νὰ διαιρεθῇ τὸ ὕψος δοθείσης πυραμίδος κατὰ τρόπον, ὥστε ἂν φέρωμεν ἐκ τῶν σημείων τῶν διαιρέσεων ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὴν βάσιν, ἡ πυραμὶς νὰ διαιρῆται εἰς 3,4 . . . ν ἰσοδύναμα μέρη.**

Ἂς εἶναι Σ ἡ κορυφὴ τῆς πυραμίδος καὶ ΣΛ τὸ ὕψος αὐτῆς. Παριστῶμεν τὴν δοθεῖσαν μὲ Π.

1) *Διαίρεσις εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη*. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ ζητούμενα σημεῖα τοῦ ὕψους εἶναι, κατὰ σειρὰν ἀπὸ τοῦ Σ, τὰ Α καὶ Β. Τὰ ἐκ τῶν Α καὶ Β παράλληλα ἐπίπεδα διαιροῦν τὴν πυραμίδα εἰς τὴν Π_1 ἔχουσαν ὕψος ΣΑ, τὴν κόλουρον K_1 ἔχουσαν ὕψος ΑΒ καὶ τὴν κόλουρον K_2 ἔχουσαν ὕψος ΒΛ.

Ἐπειδὴ τὰ τρία ταῦτα μέρη θὰ εἶναι ἰσοδύναμα, θὰ ἔχωμεν $\Pi_1 = \frac{1}{3}\Pi$, ἡ δὲ πυραμὶς ἡ ἔχουσα ὕψος ΣΒ, ἣν καλῶ Π_2, θὰ εἶναι $\Pi_2 = \frac{2}{3}\Pi$. Κατὰ τὰ περὶ ὁμοίων πολυέδρων θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\Pi_1}{\Pi} = \frac{\Sigma A^3}{\Sigma\Lambda^3} = \frac{1}{3}, \quad \Sigma A = \Sigma\Lambda \,.\, \sqrt[3]{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{\Pi_2}{\Pi} = \frac{\Sigma B^3}{\Sigma\Lambda^3} = \frac{2}{3} \quad \text{καὶ } \Sigma B = \Sigma\Lambda \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

2) *Διαίρεσις εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη*. Ἂς εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα ἐπὶ τοῦ ὕψους τὰ Α, Β καὶ Γ καὶ ἂς εἶναι $\Sigma A = \upsilon_1$, $\Sigma B = \upsilon_2$, $\Sigma\Gamma = \upsilon_3$. Τὰ τέσσαρα μέρη θὰ εἶναι πάλιν ἰσοδύναμα καὶ ἂν καλέσωμεν Π_1, Π_2, Π_3 τὰς πυραμίδας αἵτινες ἔχουσιν ἀντιστοίχως ὕψη τὰ υ_1, υ_2 καὶ υ_3, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\Pi_1}{\Pi} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\Pi_2}{\Pi} = \frac{2}{4}, \quad \frac{\Pi_3}{\Pi} = \frac{3}{4}.$$

Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω, λαμβάνομεν

$$\frac{\upsilon_1^3}{\Sigma\Lambda^3} = \frac{1}{4} \quad \text{ἢ } \upsilon_1 = \Sigma\Lambda \sqrt[3]{\frac{1}{4}},$$

$$\frac{\upsilon_2^3}{\Sigma\Lambda^3} = \frac{2}{4}, \quad \upsilon_2 = \Sigma\Lambda \,.\, \sqrt[3]{\frac{2}{4}}$$

καὶ ὁμοίως

$$\upsilon_3 = \Sigma\Lambda \,.\, \sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$$

3) *Διαίρεσις εἰς ν ἰσοδύναμα μέρη*. Ἂς εἶναι Α, Β, Γ, . . . Κ τὰ σημεῖα διαιρέσεως τοῦ ὕψους καὶ ἂς θέσωμεν $\Sigma A = \upsilon_1$, $\Sigma B = \upsilon_2$, $\Sigma\Gamma = \upsilon_3$, ... , $\Sigma K = \upsilon_{\nu-1}$. Τὰς πυραμίδας αἵτινες ἔχουσιν ἀντιστοίχως τὰ ἄνω ὕψη καλέσωμεν Π_1, Π_2 . . . $\Pi_{\nu-1}$.

Θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\Pi_1}{\Pi} = \frac{1}{\nu}, \quad \frac{\Pi_2}{\Pi} = \frac{2}{\nu}, \; . \; . \; . \; . \; , \frac{\Pi_{\nu-1}}{\nu} = \frac{\nu-1}{\nu}.$$

Ἐφαρμόζοντες τὰ περὶ ὁμοίων πολυέδρων λαμβάνομεν

$$\upsilon_1 = \Sigma\Lambda \sqrt[3]{\frac{1}{\nu}}, \; \upsilon_2 = \Sigma\Lambda \,.\, \sqrt[3]{\frac{2}{\nu}}, \; . \; . \; . \; . \; , \upsilon_{\nu-1} = \Sigma\Lambda \,.\, \sqrt[3]{\frac{\nu-1}{\nu}}.$$

Πρόβλημα 739

1898. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς μιᾶς πυραμίδος πρέπει νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, ἵνα ἡ πυραμὶς τμηθῇ εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 5 πρὸς 3;

Ἡ πυραμὶς Π′ ἣν θὰ ἀποκόψωμεν θὰ εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὅλης Π.

Καλοῦντες τὰ ὕψη τῶν Π′ καὶ Π υ′ καὶ υ ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{(\upsilon')^3}{\upsilon^3}=\frac{5}{8} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon'=\upsilon\sqrt[3]{\frac{5}{8}}.$$

Πρόβλημα τοῦ Timmermans 739—I

1898 α. Νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις ἐπιπέδου τοιούτου, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἑκάστου σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὰς τέσσαρας ἕδρας δοθέντος τετραέδρου νὰ εἶναι σταθερόν.

Ἄς εἶναι ΑΒΓΔ τὸ δοθὲν στερεόν. Ἐὰν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΔΑ, ΔΒ καὶ ΔΓ, ὁρίσωμεν τὰ σημεῖα Ε, Ζ καὶ Θ εἰς τρόπον, ὥστε τὰ τετράπλευρα ΑΕΖΒ, ΒΖΘΓ καὶ ΓΘΕΑ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των καὶ πρὸς τὴν ἕδραν ΑΒΓ, τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ καὶ Θ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον. (*A. de G.*, τόμ. XVIII, 1827—1828, σ. 218, nº 5).

Παρατήρησις. Ἵνα ὁρίσωμεν τὰ σημεῖα Ε, Ζ καὶ Θ, παριστάνομεν μὲ α, β, γ, δ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου, τῶν κειμένων ἔναντι, ἀντιστοίχως, τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ καὶ Δ.

Θέτοντες διὰ συντομίαν:

$$\lambda=\sqrt{\frac{(\alpha-\delta)\,(\beta-\delta)\,(\gamma-\delta)}{\alpha\beta\gamma}},$$

Εὑρίσκομεν:

$$\Delta E=\Delta A\,.\,\frac{\alpha\lambda}{\alpha-\delta},\quad \Delta Z=\Delta B\,.\,\frac{\beta\lambda}{\beta-\delta}$$

καὶ

$$\Delta\Theta=\Delta\Gamma\,.\,\frac{\gamma\lambda}{\gamma-\delta}\ (^{105}).$$

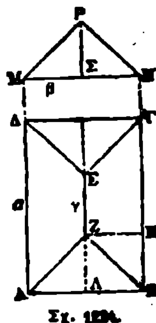
Σημείωσις. Ἡ ἐργασία αὕτη τοῦ A. Timmermans, καθηγητοῦ τότε εἰς τὸ Ἀθήναιον τῆς *Tournai*, γενικεύει τὸ ζήτημα καὶ περιέχεται εἰς 13 σελίδας, ἀπὸ 217 ἕως 229 τοῦ ὡς ἄνω τεύχους.

---

105. Σημ. μετ. 1) Ἡ θέσις τοῦ ἐπιπέδου ΖΕΘ εἶναι ὡρισμένη δυνάμει τῆς σχέσεως ΒΓΘΖ = ΓΑΕΘ = ΑΕΒΖ = ΑΒΓ. Θεωρῶ τυχὸν σημεῖον τοῦ ΕΖΘ, τὸ Μ· τὸ στερεὸν ΔΑΒΓ εἶναι ἄθροισμα τῶν ἑξῆς στερεῶν: τοῦ ΔΕΖΘ, τριῶν πυραμίδων ἐχουσῶν κοινὴν κορυφὴν τὸ Μ καὶ βάσεις τὰς ΕΘΓΑ, ΕΖΒΑ, ΘΓΒΖ καὶ τῆς πυραμίδος ΜΑΒΓ. Καλοῦντες ἀντιστοίχως τὰ μήκη τῶν καθέτων, τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ Μ ἐπὶ τὰς ΒΖΘΓ, ΓΑΕΘ,

Πρόβλημα 740

1899. Ἕν στερεόν, τοῦ ὁποίου τὸ σχῆμα ὑπενθυμίζει τὸ σχῆμα σωροῦ σκίρων, στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἐδάφους διὰ τῆς βάσεώς του ΑΒΓΔ, σχήματος ὀρθογωνίου, αἱ δὲ τέσσαρες ἄλλαι ἕδραι του σχηματίζουν μετὰ τῆς βάσεως γωνίας 45°. Νὰ εὑρεθοῦν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ. Αἱ διαστάσεις τῆς βάσεως δίδονται.



Σχ. 1224.

Τὸ στερεὸν εἶναι ἓν κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ὄγκον του, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν κάθετον αὐτοῦ τομὴν ἐπὶ τὸν ἀριθμητικὸν μέσον τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν.

Ἃς εἶναι ΡΜΝ ἡ κάθετος τομὴ καὶ ΑΒΓΔ ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ στερεοῦ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ΑΒΓΔ. Τὸ τρίγωνον ΖΗΒ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές· ἑπομένως:

$$\text{HB} = \text{HZ} = \frac{\beta}{2},$$

ὅπου $\beta = \text{AB},\ \alpha = \text{A}\Delta$ καὶ $\gamma = \text{ZE}$

καὶ $\gamma = \alpha - \frac{2\beta}{2} = \alpha - \beta.$

Ὁμοίως, τὸ τρίγωνον ΜΡΝ εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοσκελές:

$$\text{P}\Sigma = \Sigma\text{N} = \frac{\beta}{2} \quad \text{καὶ} \quad (\text{MNP}) = \frac{\beta}{2}\cdot\frac{\beta}{2} = \frac{\beta^2}{4}.$$

Ἄρα: $V = \frac{2\alpha + \alpha - \beta}{3} \times \frac{\beta^2}{4} = \frac{(3\alpha - \beta)\beta^2}{12}.$

ΕΖΒΑ, ΑΒΓ διὰ τῶν υ_α, υ_β, υ_γ, υ_δ ἀντιστοίχως καὶ υ τὸ ἐκ τῆς Α ὕψος ἐπὶ τὴν ΑΒΓ λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα:

$$\text{Ὄγκος } \Delta\text{EZ}\Theta + \frac{1}{3}\upsilon_\alpha(\text{BZ}\Theta\Gamma) + \frac{1}{3}\upsilon_\beta(\Gamma\Theta\text{E}\Delta) +$$

$$+ \frac{1}{3}\upsilon_\gamma(\text{EZBA}) + \frac{1}{3}\upsilon_\delta(\text{AB}\Gamma) = \frac{1}{3}\upsilon(\text{AB}\Gamma).$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι:

Ὄγκος ΔΕΖΘ = Σ, σταθερὰ ποσότης καὶ (ΒΖΘΓ) = (ΓΘΕΔ) = (ΕΖΒΑ) = = (ΑΒΓ) = α ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται:

$$\Sigma + \frac{1}{3}\upsilon_\alpha\cdot\alpha + \frac{1}{3}\upsilon_\beta\cdot\alpha + \frac{1}{3}\upsilon_\gamma\cdot\alpha + \frac{1}{3}\upsilon_\delta\cdot\alpha = \frac{1}{3}\upsilon\cdot\alpha$$

ἢ $\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma + \upsilon_\delta = \upsilon - \frac{3\Sigma}{\alpha}.$

Τὸ 2ον μέλος τῆς ἰσότητος εἶναι σταθερόν, ἑπομένως καὶ τὸ 1ον.
2) Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΔΖΘ καὶ ΑΒΓ, ΔΖΕ καὶ ΔΑΒ, ΔΘΕ καὶ ΑΓΔ

Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια (ὁλικὴ ἐπιφάνεια πλὴν τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ ἐφ' ἧς στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἐδάφους) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσα τραπέζια ἰσοσκελῆ καὶ ἀπὸ δύο ἰσοσκελῆ ἴσα τρίγωνα. Τὸ ὕψος τῶν τριγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος τῶν τραπεζίων, τὸ δὲ ὕψος τοῦτο εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ἰσοσκελοῦς ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς $\frac{\beta}{2}$. Θὰ ἔχωμεν ἑπομένως:

$$\upsilon^2 = \frac{2\beta^2}{4} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon = \frac{\beta}{2}\sqrt{2}.$$

$$\text{Ἐμβαδὸν τῶν δύο τριγώνων} = \frac{2 \cdot \beta}{2} \cdot \frac{\beta}{2}\sqrt{2} = \frac{\beta^2\sqrt{2}}{2}.$$

Ἐμβαδὸν τῶν δύο τραπεζίων:

$$2\left(\frac{2\alpha-\beta}{2}\right)\left(\frac{\beta\sqrt{2}}{2}\right) = (2\alpha-\beta) \cdot \frac{\beta\sqrt{2}}{2}.$$

Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια (ὡς ἐχαρακτηρίσθη ἀνωτέρω) ἔχει ἐμβαδόν:

$$\frac{\beta^2\sqrt{2}}{2} + (2\alpha-\beta)\frac{\beta\sqrt{2}}{2} = \beta^2\frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha\beta\sqrt{2} - \frac{\beta^2\sqrt{2}}{2} = \alpha\beta\sqrt{2}.$$

ἔχουν μίαν γωνίαν κοινὴν θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\Delta E\Theta}{\Delta A\Gamma} = \frac{\Delta E \cdot \Delta\Theta}{\Delta A \cdot \Delta\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta-\delta}{\beta} = \frac{\Delta E \cdot \Delta\Theta}{\Delta A \cdot \Delta\Gamma},$$

$$\frac{\Delta EZ}{\Delta AB} = \frac{\Delta E \cdot \Delta Z}{\Delta A \cdot \Delta B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\gamma-\delta}{\gamma} = \frac{\Delta E \cdot \Delta Z}{\Delta A \cdot \Delta B}$$

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$\frac{(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}{\beta\gamma} = \frac{\Delta E^2}{\Delta A^2} \cdot \frac{\Delta\Theta \cdot \Delta Z}{\Delta\Gamma \cdot \Delta B}. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἐκ τῶν τριγώνων ΔΖΘ καὶ ΔΒΓ λαμβάνομεν:

$$\frac{\Delta Z\Theta}{\Delta B\Gamma} = \frac{\Delta Z \cdot \Delta\Theta}{\Delta B \cdot \Delta\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha-\delta}{\alpha} = \frac{\Delta Z \cdot \Delta\Theta}{\Delta B \cdot \Delta\Gamma}$$

καὶ θέτοντες εἰς τὴν (1) τὴν τιμὴν $\frac{\Delta Z \cdot \Delta\Theta}{\Delta B \cdot \Delta\Gamma}$ εὑρίσκομεν:

$$\frac{(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}{\beta\gamma} = \frac{\Delta E^2}{\Delta A^2} \cdot \frac{\alpha-\delta}{\alpha}$$

ἐξ ἧς:

$$\Delta E = \Delta A \cdot \sqrt{\frac{\alpha(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}{\beta\gamma(\alpha-\delta)}} = \Delta A \cdot \alpha\sqrt{\frac{\alpha(\beta-\delta)(\gamma-\delta)(\alpha-\delta)}{\alpha^2\beta\gamma(\alpha-\delta)^2}} =$$

$$= \Delta A \cdot \frac{\alpha}{\alpha-\delta}\sqrt{\frac{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}{\alpha \cdot \beta\gamma}} = \Delta A \cdot \frac{\alpha\lambda}{\alpha-\delta} \quad \text{κλπ.}$$

Πρόβλημα 741

1900. Τετραέδρου ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον σκαληνόν, μὲ πλευρὰς α, β καὶ γ· αἱ τρεῖς ἄλλαι ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι καὶ τὸ μῆκος ἑκάστης δ. Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου συναρτήσει τῶν α, β, γ καὶ δ.

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς βάσεως δίδεται ἀπὸ τὸν γνωστὸν τύπον

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)\ (\tau-\beta)\ (\tau-\gamma)}\,,$$

ἡ ἀκτὶς δὲ R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν βάσιν δίδεται ὑπὸ τοῦ

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E}\,.$$

Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχοντος ὑποτείνουσαν τὴν δ καὶ ὡς ἄλλην κάθετον τὴν R. Ἑπομένως:

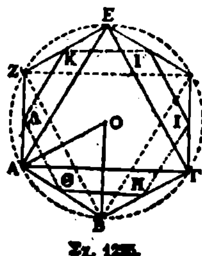
$$\upsilon = \sqrt{\delta^2 - R^2} = \sqrt{\delta^2 - \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{16E^2}}$$

$$\text{καὶ}\quad V = \frac{E\,.\,\upsilon}{3} = \frac{1}{3}E\sqrt{\frac{16E^2.\delta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2}{16E^2}} = \frac{1}{12}\sqrt{16E^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2}$$

$$\text{ἢ}\quad V = \frac{1}{12}\sqrt{16\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\delta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2}\,.$$

Πρόβλημα 471—I

1900 α. Δίδεται ἑξαγωνικὸν κανονικὸν πρῖσμα μὲ παραπλεύρους ἀκμὰς τὰς ΑΑ', ΒΒ'... ΖΖ'. Φέρομεν τὰ ἐπίπεδα ΑΒ'Γ, ΓΔ'Ε, ΕΖ'Α, ὡς καὶ τὰ Β'ΓΔ', Δ'ΕΖ', Ζ'ΑΒ' Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἀποκόπτουν ἀπὸ τὸ πρῖσμα ἓξ τριγωνικὰς πυραμίδας. Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ ὄγκος τοῦ οὕτω κολοβωμένου πρίσματος: 1ον συναρτήσει τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ ἑξαγώνου καὶ 2ον συναρτήσει τῆς πλευρᾶς ΑΕ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΓΕ. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι υ.



Σχ. 12[illegible]

Ἐκ τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος

$$\text{ΑΒΓΔΕΖ} \times \upsilon,$$

πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἓξ τριγωνικὰς πυραμίδας, ἐχούσας ὕψος υ καὶ ἑκάστης τῶν ὁποίων ἡ βάσις εἶναι ἴση πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου εἶναι 6 × (ΑΒΓ)· ἑπομένως, ἂν V ὁ ὄγκος τοῦ κολοβωμένου πρίσματος, θὰ ἔχωμεν

$$V = (\text{ΑΒΓΔΕΖ})\left(\upsilon - \frac{\upsilon}{3}\right) = (\text{ΑΒΓΔΕΖ})\,.\,\frac{2}{3}\,\upsilon.$$

1) Ἔστω ΑΒ = α. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον

$$\frac{\alpha^2}{4}\sqrt{3}\cdot\ \text{ἑπομένως}: (\text{ΑΟΒ}) = \frac{\alpha^2}{4}\sqrt{3}\cdot$$

καὶ ἐμβαδὸν ἑξαγώνου $= 6 \frac{\alpha^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3\alpha^2}{2}\sqrt{3}$,

$$V = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \upsilon = \alpha^2 . \upsilon \sqrt{3}.$$

2) Ἔστω $AE = \beta$ καὶ $AE = \alpha\sqrt{3}$.

Θὰ εἶναι $\beta = \alpha\sqrt{3}$, ἐξ ἧς $\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{3}}$· εἰσάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν προηγουμένην ἔκφρασιν τοῦ ὄγκου V, λαμβάνομεν:

$$V = \frac{\beta^2}{3} . \upsilon\sqrt{3}.$$

1900 β. Παρατήρησις. 1) Ἡ ἄνω ἕδρα τοῦ στερεοῦ εἶναι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον Β'Δ'Ζ, ἡ δὲ κάτω ἕδρα εἶναι τὸ ἐπίσης ἰσόπλευρον ΑΓΕ. Πᾶσα τομὴ παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις εἶναι ἑξάγωνον, ἔχον τρεῖς πλευρὰς ἴσας μεταξύ των καὶ παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ΑΓΕ καὶ τρεῖς ἄλλας ὁμοίως ἴσας μεταξύ των καὶ παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ Β'Δ'Ζ'. Ἡ μεγίστη τομὴ εἶναι ἡ ἴσον ἀπέχουσα τῶν βάσεων· αὕτη εἶναι ἑξάγωνον κανονικὸν ΘΗΙΙ'ΚΛ, ἑκάστη πλευρὰ τοῦ ὁποίου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΓ.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑξαγώνου τούτου εἶναι:

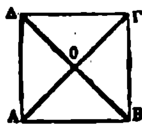
$$6\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{8}\beta^2\sqrt{3}, \text{ τοῦ δὲ } (ΑΓΕ) = \frac{\beta^2}{4}\sqrt{3} \text{ ἢ } \frac{2\beta^2}{8}\sqrt{3}.$$

Μεταβάλλεται ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς μεταξὺ τῶν ὁρίων

$$\frac{2\beta^2}{8}\sqrt{3} \text{ καὶ } \frac{3}{8}\beta^2\sqrt{3}.$$

2) Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν διάφορα ζητήματα ἀνάλογα πρὸς τὸ προηγούμενον. Θὰ ἐξετάσωμεν ταῦτα σχετικῶς μὲ τὸ κανονικὸν τετραγωνικὸν ἢ ὀκταγωνικὸν πρῖσμα.

1900 γ. Τετραγωνικὸν πρῖσμα. Ἀπὸ ἓν πρῖσμα, ἔχον βάσεις τὰ ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ', ἀφαιροῦμεν τὰς πυραμίδας ΑΒ'Γ, ΓΔ'Α, Δ'ΑΒ' καὶ Β'ΓΔ'. Τὸ ἀπομένον στερεὸν εἶναι τετράεδρον ἔχον κορυφὰς τὰς Α, Γ, Β' καὶ Δ'.

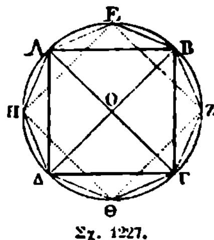


Σχ. 1228.

Ἂς εἶναι α ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου· ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι $\alpha^2 . \upsilon$ καὶ ὁ ὄγκος τῶν δύο πυραμίδων $= (ΑΒΓΔ)\, \frac{\upsilon}{3} = \alpha^2 . \frac{\upsilon}{3}$. Ἐπομένως, αἱ πρὸς ἀφαίρεσιν τέσσαρες πυραμίδες θὰ ἔχουν ὄγκον $\frac{2\alpha^2}{3}\upsilon$ καὶ τὸ ἀπομένον τετράεδρον θὰ ἔχῃ ὄγκον $= \frac{\alpha^2}{3} . \upsilon$.

Ὥστε: *Τὸ τετράεδρον εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ πρίσματος* (§ 157).

1900 δ. Ἀπὸ ἓν καν. ὀκταγωνικὸν πρῖσμα ἀφαιροῦμεν ὀκτὼ τριγωνικὰς πυραμίδας, ἐχούσας βάσεις ἴσας πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΕ. Ἀπομένει οὕτω στερεὸν ἔχον βάσεις τὰ τετράγωνα ΑΒΓΔ καὶ Ε΄Ζ΄Θ΄Η΄. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τούτου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α τοῦ τετραγώνου.



Σχ. 1227.

$$ΑΟ = ρ = \frac{α}{\sqrt{2}} = \frac{α}{2}\sqrt{2}.$$

τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΕΒ, τὸ ἀγόμενον ἐκ τοῦ Ε, ἰσοῦται πρὸς

$$ρ - \frac{α}{2} = \frac{α}{2}\sqrt{2} - \frac{α}{2} = \frac{α}{2}(\sqrt{2} - 1). \quad (1)$$

Τὸ κανονικὸν ὀκτάγωνον ἔχει ἐμβαδὸν =

$$= 4(ΑΟΒΕ) = 4\,(ΟΕ).\frac{ΑΒ}{2} = 4\frac{α}{2}\sqrt{2}.\frac{α}{2} = α^2\sqrt{2}$$

Ὁ ὄγκος τοῦ ὀκταγωνικοῦ πρίσματος $= α^2 . υ\sqrt{2}.$ (2)

Ἐμβαδὸν τριγ. $ΑΒΕ = \frac{α}{2}\cdot\frac{α}{2}(\sqrt{2} - 1) = \frac{α^2}{4}(\sqrt{2} - 1).$ (3)

Ὄγκος τῶν ὀκτὼ πυραμίδων =

$$= 8 . \frac{α^2}{4}(\sqrt{2} - 1)\cdot\frac{υ}{3} = \frac{2}{3}α^2 . υ(\sqrt{2} - 1).$$

Ἄρα:

$V =$ ὄγκος τοῦ ἀπομένοντος στερεοῦ $= α^2 . υ\sqrt{2} - \frac{2}{3}α^2υ(\sqrt{2} - 1),$

$$V = \frac{α^2}{3}υ\sqrt{2} + \frac{2}{3}α^2υ = \frac{1}{3}α^2υ\,(2 + \sqrt{2})\,. \quad (4)$$

Πρόβλημα 741—ΙΙ

1900 ε. Δύο ἴσα τετράγωνα κεῖνται ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα των, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα καὶ αἱ διαγώνιοι τοῦ ἑνὸς εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ἄλλου. Δι' ἑκάστης τῶν πλευρῶν τοῦ ἑνὸς τετραγώνου καὶ τῆς ἀντιστοίχου κορυφῆς τοῦ ἄλλου φέρομεν ἐπίπεδα, εἰς τρόπον ὥστε νὰ σχηματίζηται στερεὸν μὲ παράπλευρον ἐπιφάνειαν ἀποτελουμένην ἀπὸ ὀκτὼ ἴσα τρίγωνα. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν δύο τετραγώνων καὶ τῶν ὀκτὼ παραπλεύρων τριγώνων. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ πλευρὰ τῶν τετραγώνων εἶναι α καὶ τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ υ.

Τὸ ζήτημα τοῦτο δὲν διαφέρει διόλου ἀπὸ τὸ θεωρηθὲν ἤδη (1900 δ)· θὰ ἔχωμεν

$$V = \frac{1}{3}α^2υ\,(2 + \sqrt{2}).$$

Δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ἐργαζόμενοι ὡς ἑξῆς :

Τὸ ὀκταγωνικὸν πρῖσμα ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος καὶ τεσσάρων τριγωνικῶν πρισμάτων ἐχόντων βάσιν ἴσην πρὸς τὴν ΑΒΕ. Ἂν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν ὀκτὼ τριγωνικὰς πυραμίδας, ἐχούσας βάσιν τὴν ΑΒΕ, θὰ ἔχωμεν τὸν ζητούμενον ὄγκον V. Δηλ. :

$$V = \alpha^2 \upsilon + 4 \,.\, ABE \,.\, \upsilon - 8 \,.\, ABE \,.\, \frac{\upsilon}{3},$$

$$V = \alpha^2 \upsilon + \frac{4}{3} ABE \,.\, \upsilon = \frac{\upsilon}{3} (3\alpha^2 + 4\, ABE).$$

Ἀλλ' εἶναι : $4(ABE) = \alpha^2 (\sqrt{2} - 1)$, (βλ. προηγούμενον τύπον (3).

Ἑπομένως :

$$V = \frac{1}{3} \alpha^2 \upsilon (3 + \sqrt{2} - 1) \text{ ἢ } V = \frac{1}{3} \alpha^2 \upsilon (2 + \sqrt{2}).$$

Πρόβλημα 741—III

1900ζ. **Παραλληλεπιπέδου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ῥόμβοι, τῶν ὁποίων μία διαγώνιος ἰσοῦται μὲ τὴν πλευράν των. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου.**

Ἂς εἶναι Α ἡ κορυφὴ μιᾶς τριέδρου γωνίας τοῦ στερεοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ καὶ ΔΑΒ εἶναι ὀξεῖαι. Ἐπειδὴ ἡ διαγώνιος τοῦ ῥόμβου ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευράν του, θὰ κεῖται αὕτη ἀπέναντι ὀξείας γωνίας (60 μοιρῶν) τοῦ σχήματος, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ καὶ ΑΒ θὰ εἶναι ἴσαι καὶ τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ κανονικόν.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου, τοῦ ὁποίου τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι τὸ ἥμισυ, ἐπὶ τὸ ὕψος υ, τὸ ἀγόμενον ἐκ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΒΑΓ.

$$\text{Ἐμβαδὸν ῥόμβου} = \frac{\alpha^2}{2} \sqrt{3}.$$

$$\upsilon = \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Ἑπομένως : $V = \frac{\alpha^2}{3} \sqrt{3} \,.\, \alpha \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha^3 \sqrt{2}}{2}$. .

Πρόβλημα 741—IV

1900η. **Αἱ ἕδραι ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ῥόμβοι ἴσοι, πλευρᾶς α καὶ μία τῶν διαγωνίων του ἔχει μῆκος β. Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ συναρτήσει τῶν α καὶ β καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ προκύπτουσα παράστασις.**

Ἂς εἶναι Α ἡ κορυφὴ μιᾶς τῶν τριέδρων τοῦ στερεοῦ, τῆς ὁποίας αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι κεῖνται ἀπέναντι τῆς διαγωνίου β. Ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ

εἶναι β, καὶ τρία τρίγωνα ἰσοσκελῆ, ὅπως τὸ ΒΑΓ, τοῦ ὁποίου ΑΒ = ΑΓ = α καὶ ΒΓ = β.

Θὰ εὑρεθῇ ὁ ζητούμενος ὄγκος ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 2(ΒΑΓ) ἐπὶ τὸ ὕψος υ, τὸ ἀγόμενον ἐκ Δ ἐπὶ τὴν ΒΑΓ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος υ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ΒΑΓΔ θὰ πρέπει ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ΒΑΓ ἐπὶ $\frac{υ}{3}$, ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΒΓΔ ἐπὶ $\frac{k}{3}$, ὅπου k τὸ ὕψος τὸ ἀγόμενον ἐκ τῆς Α ἐπὶ τὴν ΒΓΔ.

Ὥστε:

$$(ΒΑΓ) \cdot υ = (ΒΓΔ) \cdot k,$$

ἐξ ἧς

$$υ = \frac{(ΒΓΔ)}{(ΒΑΓ)} \cdot k. \qquad (1)$$

Ἀρκεῖ ἐπομένως νὰ ἐκφράσωμεν τὰ ΒΓΔ καὶ k συναρτήσει τῶν δοθέντων.

Ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου ΒΓΔ, ἔχοντος πλευρὰν β εἶναι

$$E = \frac{β^2}{4}\sqrt{3}. \qquad (2)$$

Τὸ ὕψος k εἶναι ἡ κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχοντος ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν ἑτέραν κάθετον ἴσην πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΒΓΔ.

Ἄρα:

$$\frac{2}{3}\ ὕψους\ ΒΓΔ = \frac{2}{3} \cdot \frac{β}{2}\sqrt{3}$$

καὶ ἐπομένως:

$$k^2 = α^2 - \frac{β^2}{3} \quad ἢ \quad k = \sqrt{\frac{3α^2 - β^2}{3}}. \qquad (3)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (1) τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν k καὶ (ΒΓΔ) λαμβάνομεν:

$$υ = \frac{\frac{β^2}{4}\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3α^2 - β^2}}{\sqrt{3}}}{(ΒΑΓ)} = \frac{\frac{β^2}{4}\sqrt{3α^2 - β^2}}{(ΒΑΓ)} = \frac{β^2\sqrt{3α^2 - β^2}}{4(ΒΑΓ)}. \qquad (4)$$

Ὄγκος παραλληλεπιπέδου $V = 2(ΒΑΓ) \cdot υ$.

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$V = 2(ΒΑΓ) \cdot \frac{β^2\sqrt{3α^2 - β^2}}{4(ΒΑΓ)},$$

ἢ

$$V = \frac{β^2\sqrt{3α^2 - β^2}}{2} \qquad (5)$$

Διερεύνησις. Ἡ πλευρὰ β πρέπει νὰ περιέχεται μεταξὺ O καὶ 2α. Ἂν θέσωμεν β = α θὰ ἔχωμεν:

$$V = \frac{\alpha^2 \sqrt{2\alpha^2}}{2} = \frac{\alpha^3 \sqrt{2}}{2},$$

ὅ,τι εὕρομεν δηλ. καὶ προηγουμένως.

Ἐὰν ὁ ῥόμβος εἶναι τετράγωνον, θὰ ἔχωμεν $\beta = \alpha\sqrt{2}$ καὶ ὁ τύπος (5) δίδει

$$V = \frac{2\alpha^2}{2}\sqrt{3\alpha^2 - 2\alpha^2} = \alpha^3,$$

καὶ ὅπως ἔπρεπε ἄλλωστε νὰ ἀνεμένομεν, ἀφοῦ τὸ παραλληλεπίπεδον καθίσταται κύβος, ἔχων ἀκμὴν μήκους α.

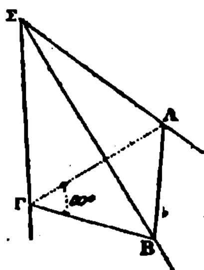
Πρόβλημα 742

1901. **Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας ἑκάστου τῶν κυρτῶν κανονικῶν πολυέδρων.**

Τὸ ζήτημα ἀνήκει εἰς τὴν ἁρμοδιότητα τοῦ Γεωμετρικοῦ σχεδίου· τὰ ἀναπτύγματα ταῦτα εὑρίσκομεν εἰς τὰς ἀσκήσεις τῆς παραστατικῆς Γεωμετρίας, 3η ἔκδοσις, n° 483 καὶ ἑξῆς.

Πρόβλημα 742—I

1901 α. **Πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ μίαν ἀκμὴν ὀρθογωνίου τριέδρου γωνίας τέμνει ταύτην κατ' ὀρθὴν γωνίαν.**



Σχ. 1228.

Καλοῦμεν ὀρθογώνιον τρίεδρον, τὴν τρίεδρον τῆς ὁποίας ἡ μία δίεδρος εἶναι γωνία ὀρθή. Ἂν ΣΑΒΓ εἶναι ἡ στερεά, τῆς ὁποίας ἡ δίεδρος ΣΓ εἶναι ὀρθή, τὸ ἐπίπεδον ΣΓΑ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΣΓΒ.

Τὸ Θεώρημα εἶναι προφανές, ἂν τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς ὀρθῆς διέδρου ΣΓ· διότι τότε θὰ δώσῃ ὡς τομὴν τὴν ἀντίστοιχον γωνίαν τῆς διέδρου, ἥτις εἶναι ὀρθή. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τὸ τέμνον ἐπίπεδον ΓΑΒ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΣΑ· θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ τομὴ ΑΓΒ εἶναι γωνία ὀρθή.

Ἐξ ὑποθέσεως, τὸ ἐπίπεδον ΣΓΒ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΣΓΑ. Εἶναι ἄρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΓΑ κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΣΓΑ, ἀφοῦ ἡ ΣΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓΒ. Ἐπομένως, καὶ τὸ διὰ τῆς ΣΑ διερχόμενον ἐπίπεδον ΣΓΑ θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΑΓΒ· ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο ἐπίπεδα ΣΓΒ καὶ ΒΓΑ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ΣΓΑ καὶ ἡ τομὴ των ΓΒ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ΣΓΑ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τοῦ ΣΓΑ, τὴν ΓΑ. Εἶναι ἐπομένως ἡ γωνία ΒΓΑ ὀρθή.

Γεωμετρικὸς τόπος 742—II

1901 β. **Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ μιᾶς τριέδρου λαμβάνομεν ἴσα μήκη ΑΑ' = ΒΒ' = ΓΓ' = λ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τὸν ὁποῖον**

διαγράφει τὸν κοινὸν σημεῖον τῶν τριῶν ἐπιπέδων ΒΓΑ', ΓΑΒ', ΑΒΓ', Ο, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ μήκους λ μεταβάλλεται.

Τὸ κοινὸν σημεῖον Δ τῆς ΒΓ' καὶ ΓΒ' διαγράφει εὐθεῖαν Δ, κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΣΒΓ. Τὸ δὲ σημεῖον Ο παραμένει εἰς ἓν ὡρισμένον ἐπίπεδον, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς Δ καὶ τοῦ σημείου Α. Ὁμοίως τὸ Ο ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον, τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ Β καὶ τῆς εὐθείας Δ', ἣν διαγράφει τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΑΓ' καὶ Γ'Α· ὁ τόπος ἑπομένως τοῦ Ο εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων δηλ. εὐθεῖα.

Σημείωσις. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει ὅταν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΣΑ τμῆμα αλ, ἐπὶ τῆς ΣΒ τμῆμα βλ καὶ ἐπι ΣΓ γλ, ὅπου α, β καὶ γ εἶναι τρεῖς ἀριθμητικοὶ συντελεσταὶ σταθεροὶ καὶ λ μῆκος μεταβλητὸν (*Mathesis*, 1893, σ. 206).

Πρόβλημα 742—III

1901 γ. Νὰ τμηθῇ τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

Ἀναγόμεθα εἰς τὸ ἀντίθετον πρόβλημα. Τὸ ζήτημα συνίσταται εἰς τὸ νὰ ὁρισθῇ τὸ κοινὸν σημεῖον τριῶν σφαιρῶν (§ 1822).

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ τάμωμεν οἱανδήποτε δοθεῖσαν τρίεδρον στερεὰν δι' ἐπιπέδου εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τομὴ ΑΒΓ νὰ εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν τρίγωνον. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι δυσκολώτερον τοῦ προηγουμένου, ἡ δὲ λύσις του μᾶς ὁδηγεῖ εἰς ἐξίσωσιν βαθμοῦ οὐχὶ κατωτέρου τοῦ τετάρτου. (Βλ. *Mathesis* 1896 σ. 18, n° 7).

Σημείωσις. 1) Τὸ πρόβλημα ἀναφαίνεται ἀπὸ τοῦ 1754. Ὁ Estéve, τῆς βασιλικῆς ἑταιρείας τοῦ *Montpellier* ἐπεχείρησε νὰ τὸ λύσῃ, ἀλλὰ δὲν τὸ κατώρθωσε. Κατὰ τὸ 1773, ὁ Lagrange ἔλαβεν ὡς ἀγνώστους τὰς τρεῖς ἀκμὰς τοῦ τετραέδρου καὶ ἀνήχθη διὰ τὴν λύσιν του εἰς ἐξίσωσιν 8ου βαθμοῦ. Ὁ αὐτὸς σοφὸς εἰς τὰ 1795 κατέληξε εἰς λύσιν ἐξισώσεως 4ου μόνον βαθμοῦ.

Ὁ Monge ἐπεξειργάσθη τὸ πρόβλημα διὰ τῆς παραστατικῆς Γεωμετρίας, καὶ καθώρισε τὴν μορφὴν τῆς τριέδρου ὡς τομὴν τριῶν *σπειρῶν*, μὲ ἄξονας τὰς πλευρὰς τοῦ δοθέντος τριγώνου καὶ μεσημβρινοὺς τόξα δεχόμενα γωνίας ἴσας πρὸς τὰς ἕδρας τοῦ τριέδρου.

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ τρίεδρος ἔχει καὶ τὰς τρεῖς της γωνίας ἴσας, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εὐκόλως εἰς τὴν κατασκευὴν ἑνὸς τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς δύο διαγωνίους, μίαν πλευρὰν καὶ τὰς γωνίας τὰς ἴσας μεταξύ των, αἵτινες πρόσκεινται εἰς τὴν πλευράν, ἥτις εἶναι ἀπέναντι τῆς γνωστῆς. Ἀρκεῖ, πράγματι, νὰ κατακλίνωμεν τὰς ἕδρας τῆς τριέδρου, τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης.

2) Τὸ προηγούμενον πρόβλημα εἶναι μία ἰδιαιτέρα περίπτωσις τοῦ προβλήματος τοῦ Bruno de Naples: *Δίδονται ἓν σημεῖον* Α *καὶ 2 εὐθεῖαι εἰς τὸν χῶρον* β *καὶ* γ. *Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς* β *ἓν σημεῖον* Β *καὶ ἐπὶ τῆς* γ *ἓν σημεῖον* Γ *εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τρίγωνον* ΑΒΓ *νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον* αβγ.

Ὁ Bruno, ὁ διατυπώσας τὸ πρόβλημα, καὶ κατόπιν οἱ Quetelet καὶ Hachette προσδιώρισαν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου. (*Mathesis* 1896, σ. 18 καὶ 19, n° 7 καὶ 8).

3) Πρόβλημα τοῦ Gergonne. *Δίδονται τρία σημεῖα* Α, Β *καὶ* Γ *κείμενα ἐκτὸς ἐπιπέδου* Π *καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ σημεῖον* Ο *τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα* . ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ *νὰ εἶναι ἐλάχιστον*. Ἤτοι : *Δίδεται ἡ βάσις* ΑΒΓ *ἑνὸς τετραέδρου καὶ ζητεῖται ἡ θέσις τῆς κορυφῆς τοῦ* Ο *ἐπὶ ἑνὸς δοθέντος ἐπιπέδου κατὰ τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του νὰ εἶναι ἐλάχιστον*. (*A. de G.* τομ. XII, 1821 - 1822 σ. 380).

Εἰδικὴ περίπτωσις. *Τὸ ἐπίπεδον* Π *νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς* ΑΒΓ.

Ὁρίζομεν τὸ ἰσογώνιον κέντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. (Θεώρημα προταθὲν ὑπὸ τοῦ Fermat πρὸς τὸν Torricelli, § 755). Ἂς εἶναι Μ τὸ σημεῖον αὐτό. Φέρομεν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, μέχρι τὸ ἐπίπεδον Π. Ἂν Σ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς, τοῦτο θὰ εἶναι καὶ τὸ ζητούμενον.

Αἱ τρεῖς ἀκμαὶ τοῦ ΣΑΒΓ, αἱ ἀγομεναι ἐκ τοῦ Σ, εἶναι ἰσοκλινεῖς πρὸς τὰ δύο ἐπίπεδα Π καὶ ΑΒΓ, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τοῦ στερεοῦ περὶ τὸ Σ εἶναι ἴσαι μεταξύ των αἱ δὲ ΣΑ, ΣΒ καὶ ΣΓ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ΜΑ, ΜΒ καὶ ΜΓ.

Ἐπειδὴ τὸ Μ ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀποστάσεις τοιαύτας, ὥστε τὸ ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ νὰ εἶναι ἐλάχιστον, ἕπεται ὅτι διὰ τὴν θέσιν ταύτην τοῦ Σ ἐπὶ τοῦ Π τὸ ἄθροισμα ΣΑ + ΣΒ + ΣΓ γίνεται ἐλάχιστον.

Σημείωσις. Τὸ ὡς ἄνω τετράεδρον πληροῖ τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προηγουμένου προβλήματος.

1879 α. Νομίζομεν ὅτι τὸ γενικὸν πρόβλημα τὸ προταθὲν εἰς τὰ *A. de G.* ἔχει μείνει μέχρι τοῦδε (1911) ἄλυτον.

Θεώρημα 742—IV

1901 δ. **Δύο τρίγωνα ἴσα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν τυχοῦσαν θέσιν πρὸς ἄλληλα εἰς τὸν χῶρον. Ἐὰν ὑπάρχῃ ἓν σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε τὰ τετράεδρα ΟΑΒΓ καὶ ΟΑ΄Β΄Γ΄ νὰ εἶναι ἴσα, τὰ κάθετα τότε ἐπίπεδα εἰς τὰ μέσα τῶν εὐθειῶν, τῶν ἑνουσῶν τὰς κορυφὰς τῶν ἴσων γωνιῶν τῶν ἴσων τριγώνων, διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἥτις τέμνει τὴν εὐθείαν καθ' ἣν τέμνονται τὰ ἐπίπεδα τῶν δύο τριγώνων.** (*J. M. E.*, τοῦ Longchamps, 1894, σ. 196, G. Tarry.

Πολύγωνα ἢ πολύεδρα ἀστεροειδῆ

Ἐμβαδὸν τῶν ἀστεροειδῶν πολυγώνων

1901 ε. Εἰς τὴν σημείωσιν ταύτην εἰσάγομεν τὰ ἀκόλουθα σύμβολα :

Τὸ P^1_μ θὰ σημαίνῃ τὸ κυρτὸν πολύγωνον μὲ μ πλευράς.

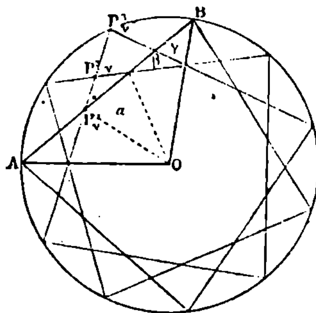
Τὸ P^2_μ » » τὸ ἀστεροειδὲς πολύγωνον ποὺ θὰ προκύψῃ ἂν ἑνώσωμεν ἀνὰ 2 τὰς κορυφὰς τοῦ πρώτου.

Τὸ P^3_μ θὰ σημαίνῃ τὸ ἀστεροειδὲς πολύγωνον ποὺ θὰ προκύψῃ, ἂν ἑνώσωμεν ἀνὰ τρεῖς τὰς κορυφὰς τοῦ πρώτου.

Τὸ P^ν_μ θὰ σημαίνῃ τὸ ἀστεροειδὲς πολύγωνον ποὺ θὰ προκύψῃ ἂν ἑνώσωμεν τὰς κορυφὰς τοῦ πρώτου ἀνὰ ν, ὅπου $\nu < \frac{\mu}{2}$.

1) Ὅταν κατασκευάζωμεν ἓν πολύγωνον ἀστεροειδὲς τοῦ εἴδους P_{μ}^{ν}, αἱ διασταυρώσεις τῶν γραμμῶν ποὺ θὰ φέρωμεν διὰ τὴν κατασκευήν του θὰ μᾶς δώσουν ὅλα τὰ ἀστερειδῆ $P_{\mu}^{\nu-1}$, $P_{\mu}^{\nu-2}, \ldots P_{\mu}^{1}$,

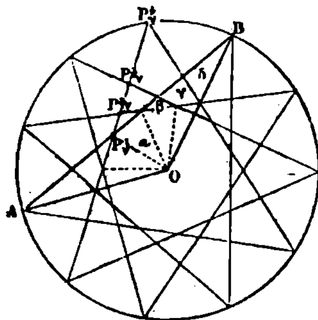
2) Ἀντιστρόφως, δοθέντος ἑνὸς κανονικοῦ κυρτοῦ πολυγώνου



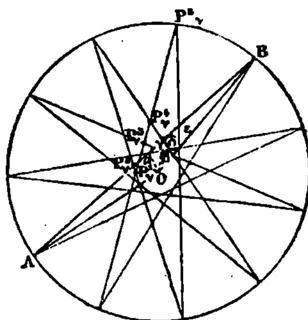
Σχ. 1.

P^{1}_{μ}, ἂν προεκτείνωμεν τὰ πλευρὰς του θὰ σχηματισθῶσι διαδοχικῶς ὅλι τὰ εἴδη τῶν ἀστεροειδῶν πολυγώνων $P^{2}\mu$, $P^{3}\mu \ldots P_{\mu}^{\nu}$.

3) Εἰς ἓν ἀστεροειδὲς πολύγωνον P_{μ}^{ν}, τὸ ἄθροισμα τῶν μ τρι-



Σχ. 2.



Σχ. 3.

γώνων, τῶν ἐχόντων βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου καὶ ὕψος τὸ ἀπόστημα, θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν πολυγώνων τοῦ σχήματος ἢ

ἄθροισμα τριγώνου $AOB = \Sigma(AOB) = P_{\mu}^{\nu} + P_{\mu}^{\nu-1} \ldots P_{\mu}^{1}$

Πράγματι, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α τὰ τρίγωνα τοῦ ἐσωτερικοῦ

πολυγώνου τοῦ P^1_μ καὶ β, γ, δ, καὶ ε, τὰ διάφορα σχήματα τὰ περιεχόμενα εἰς τὸ ΑΟΒ, θὰ ἔχωμεν διὰ τὸ P^3_{11} λ.χ. (σχ. 1).

$$AOB = 3\alpha + 2\beta + 2\gamma$$
$$\Sigma(AOB) = 33\alpha + 22\beta + 22\gamma$$
$$P^1_{11} = 11\alpha$$
$$P^2_{11} = 11\alpha + 11\beta$$
$$P^3_{11} = 11\alpha + 11\beta + 22\gamma$$

ἐξ ὧν $\Sigma(AOB) = P^1_{11} + P^2_{11} + P^3_{11}$.

4) Σκεπτόμενοι ἀναλόγως, θὰ λάβωμεν διὰ τὰ σχήματα 2 καὶ 3.

$$\Sigma(AOB) = P^1_{11} + P^2_{11} + P^3_{11} + P^4_{11}$$
$$\Sigma(AOB) = P^1_{11} + P^2_{11} + P^3_{11} + P^4_{11} + P^5_{11}.$$

5) Γενικῶς, δι' ἓν πολύγωνον κανονικὸν μ πλευρῶν ἔχομεν.

$$\Sigma(AOB) = P^1_\mu + P^2_\mu + \ldots + P^\nu_\mu$$

Κανονικὰ πολύεδρα ἀστεροειδῆ

1901 ζ. Τὰ ἀστεροειδῆ κανονικὰ πολύεδρα, 4 τὸν ἀριθμόν, ἐπενοήθησαν ἀπὸ τὸν Poinsot (§ 1832 α).

Ἐκ τοῦ κυρτοῦ κανονικοῦ δωδεκαέδρου προκύπτει τὸ ἀστεροειδὲς δωδεκάεδρον μὲ 12 ἕδρας πεντάγωνα ἀστεροειδῆ καὶ 20 κορυφάς.

Ἐκ τοῦ κυρτοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου προκύπτουν τρία εἴδη ἀστεροειδῶν κανονικῶν πολυέδρων:

Ἓν εἰκοσάεδρον μὲ 20 τριγωνικὰς ἕδρας καὶ 12 κορυφάς.

Ἓν δωδεκάεδρον μὲ 12 κυρτὰς πενταγωνικὰς ἕδρας καὶ 12 κορυφάς.

Ἓν δωδεκάεδρον μὲ 12 ἕδρας=πεντάγωνα ἀστεροειδῆ καὶ 12 κορυφάς.

Ἕκαστον τῶν κανονικῶν ἀστεροειδῶν ἔχει 30 ἀκμάς.

Σχετικῶς βλέπε: *Traité de Géométrie* τῶν Rouché καὶ Comberousse, 7η ἔκδοσις, τόμ. II, σ. 247 ἕως 259.

ΒΙΒΛΙΟΝ VII

Μέθοδοι διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ὄγκων

1902. Ἡ *Γεωμετρία τοῦ μέτρου* ὀφειλεται εἰς τὸν Ἀρχιμήδη, ἐνῷ ἡ *Γεωμετρία τῆς θέσεως* ἐκαλλιεργήθη κυρίως ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου καὶ τοῦ Ἀπολλωνίου.

Διὰ τὴν σπουδὴν τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν μὲ περίμετρον καμπυλόγραμμον, ὁ μέγας Συρακούσιος γεωμέτρης ἐφεῦρε τὴν μέθοδον τῆς *ἐξαντλήσεως* (par exhaustion). Θὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον ταύτην διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ παραβολικοῦ χωρίου (βλ. ἐπμ., § 2145).

Ὁ Cavalieri ἐγενίκευσε τὰς σκέψεις τοῦ Ἀρχιμήδους, τὰς ἁπλοποίησεν καὶ ἐδημιούργησεν, ὑπὸ τὸ ὄνομα *Μέθοδος τῶν ἀδιαιρέτων*, μία νέαν μέθοδον, γόνιμον μὲν εἰς ἀποτελέσματα ἀλλ' οὐχὶ ἀπηλλαγμένην σοβαρῶν ἐπιφυλάξεων ἐπὶ τῆς ἀξίας της. Διὰ τὸν μαθηματικὸν τοῦτον, ἓν τρίγωνον, ἐπὶ παραδείγματι, εἶναι ἄθροισμα εὐθυγράμμων ἐπαλλήλων τμημάτων καὶ τῶν ὁποίων τὰ μήκη σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, μὲ πρῶτον ὅρον τὸ μηδὲν καὶ τελευταῖον τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου. Ὁμοίως, δύο τετράεδρα, ἰσοδυνάμων βάσεων καὶ ἴσων ὑψῶν, εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἀποτελούμενα ἐξ ἀπειρίας ἐπιπέδων τομῶν, ἰσοδυνάμων ἀνὰ δύο.

Σήμερον, ἀντὶ τῶν *εὐθειῶν τοῦ Cavallieri*, ἐχουσῶν πάχος ἀπειροστόν, θεωροῦμεν ὀρθογώνια, κατασκευαζόμενα ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπ' ἀλλήλων κειμένων. Εἰς τὸ ὅριον, ὅταν τὸ ὕψος ἑκάστου τῶν ὀρθογωνίων τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν δεχόμεθα ὅτι δίδει τὸ ἐμβαδὸν τῆς θεωρουμένης ἐπιφανείας.

Ὁμοίως, εἷς κῶνος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὅριον τοῦ ἀθροίσματος κυλίνδρων μὲ βάσεις παραλλήλους τομὰς τοῦ κώνου καὶ εἰς ἴσας ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις, ὅταν τὸ κοινόν των ὕψος τείνῃ εἰς τὸ μηδέν.

Διὰ τὴν σύγκρισιν δύο ὄγκων ἀρκεῖ νὰ συγκρίνωμεν ἀντιστοίχους τομὰς αὐτῶν· οὕτω, ἐκ τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (G., n° 912). Διὰ τὸν ἀπ' εὐθείας ὅμως ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου ἑνὸς στερεοῦ, θὰ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν στοιχειωδῶν κυλίνδρων, οἵτινες κατασκευάζονται ἐπὶ τῶν διαφόρων τομῶν. Καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ σκοπὸς τῆς *Μεθόδου τῆς ἀθροίσεως* (G., n° 943).

Ἡ Στοιχειώδης Ἄλγεβρα ἐπαρκεῖ διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἀθροισμάτων τούτων καὶ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐμβαδῶν καὶ ὄγκων πολλῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν καὶ στερεῶν· τὸ γενικὸν ὅμως πρόβλημα ἐξετάζεται ὑπὸ τοῦ κλάδου τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ, τοῦ φέροντος τὸ ὄνομα Ὁλοκληρωτικὸς Λογισμός.

Ἐν τούτοις, παρὰ τὰς μεγίστας ὑπηρεσίας τὰς ὁποίας προσέφερον αἱ μέθοδοι τῶν Leibnitz καὶ Νεύτωνος διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἐν λόγῳ ἀθροισμάτων, εἴμεθα πολλάκις ἠναγκασμένοι νὰ ἱκανοποιούμεθα μὲ μόνον τὴν κατὰ προσέγγισιν εὕρεσιν αὐτῶν.

1902 α. Σημείωσις. Βλ. ἄρθρον τοῦ Paul Tannery : *Sur les origines du calcul infinitésimal* εἰς *Notions de Mathématiques* τοῦ Jules Tannery, ἀκολουθούμεναι καὶ ὑπὸ *Notions historiques* τοῦ Paul Tannery (1904, σ. 339).

Ὄγκοι καὶ σχέσεις

Θεώρημα 743

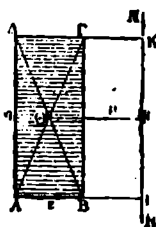
1903. Ὁ ὄγκος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἐπέκτασις τῆς ἀναλόγου ἰδιότητος ἑνὸς κανονικοῦ πρίσματος (§ 1848).
Ὁ κύλινδρος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κανονικὸν πρῖσμα, ἔχον ἀπειρίαν παραπλεύρων ἑδρῶν.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι $2\pi\rho\upsilon$, τὸ γινόμενόν της ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος εἶναι $2\pi\rho\upsilon \cdot \frac{\rho}{2} = \pi\rho^2\upsilon$, κατὰ τὸν γνωστὸν τύπον.

Θεώρημα 744

1904. Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου, διὰ περιστροφῆς τοῦ ὁποίου παράγεται τὸ στερεόν, ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, ἣν γράφει τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.



Σχ. 1229.

Ἂν ρ, υ εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ἐμβαδόν του εἶναι ρ . υ καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας $2\pi \cdot \frac{\rho}{2} = \pi\rho$. Ἑπομένως :

$$V = \rho\upsilon \times \pi\rho = \pi\rho^2\upsilon.$$

1904 α. Παρατήρησις. Ὁ ὄγκος ἑνὸς κοίλου κυλίνδρου (κυλινδρικὸς δακτύλιος) ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παράγοντος τὸ στερεὸν ὀρθογωνίου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἣν γράφει τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου (σχ. 1229).

Πράγματι, τὸ στερεὸν αὐτὸ εἶναι διαφορὰ δύο κυλίνδρων ἐχόντων τὸ αὐτὸ ὕψος υ :

$$V = \pi AI^2\upsilon - \pi BI^2\upsilon = \pi\upsilon(AI - BI)(AI + BI)$$

ἢ

$$V = \pi\upsilon AB \,.\, 2\,\Theta H = (AB\Gamma\Delta) \,.\, 2\pi\mu.$$

Θεώρημα 745

1905. Εἰς τὸν ὀρθὸν κυκλικὸν κύλινδρον, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια Ε ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων, ὃν τὸ ὕψος αὐτοῦ πρὸς τὴν ἀκτῖνα.'

Πράγματι,

$$V = \beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma \times \ddot{\upsilon}\psi o\varsigma = B \,.\, \upsilon$$

καὶ $V = \text{κυρτὴ ἐπιφάνεια} \times \frac{1}{2}\,\text{ἀκτῖνος} = \frac{1}{2} E \, . \, \rho.$

Ἄρα $B\upsilon = \frac{1}{2} E\rho,$

ἢ $\frac{E}{2B} = \frac{\upsilon}{\rho}.$

Θεώρημα 746

1906. Εἰς ὀρθὸν κυκλικὸν κύλινδρον, ἡ τομὴ αὐτοῦ Σ κατὰ τὸν ἄξονα ἔχει λόγον πρὸς τὴν βάσιν Β, ὃν καὶ τὸ ὕψος υ πρὸς τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας Γ τῆς βάσεως.

Ἡ τομὴ Σ εἶναι διπλασία τοῦ παράγοντος τὸ στερεὸν ὀρθογωνίου. Ἑπομένως :

$$\frac{B}{\Sigma} = \frac{\pi\rho^2}{2\rho\upsilon} = \frac{2\pi\rho}{4\upsilon} = \frac{\upsilon}{\frac{1}{4}\Gamma}.$$

Παρατήρησις. Εἰς τὸν ἐκ περιστροφῆς κῶνον εἶναι:

$$\frac{\Sigma}{B} = \frac{\upsilon}{\frac{1}{2}\Gamma}.$$

Θεώρημα 747

1907. Ἐὰν τὸ ὕψος κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ, ὁ ὄγκος εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν πολλαπλασιασμένην ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

Θεωρήσωμεν τὴν ἐγγεγραμμένην σφαῖραν εἰς τὸν κύλινδρον καὶ τοῦτον ὡς ἀποτελούμενον ἐκ δύο μερῶν:

1) Ἐκ δύο κώνων μὲ κοινὴν κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ βάσεις τὰς τοῦ κυλίνδρου· τὸ ὕψος ἑκατέρου εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ἢ τοῦ κυλίνδρου.

2) Ἐκ τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου διὰ περιστροφῆς περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου τριγώνου, ἔχοντος βάσιν τὴν γενέτειραν τοῦ κυλίνδρου καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι γινόμενον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ. Ἑπομένως :

$$V = 2\left[\frac{B \, . \, \rho}{3}\right] + 2\pi\rho \, . \, 2\rho \, . \, \frac{1}{3}\rho = \frac{2}{3}\pi\rho^3 + \frac{4}{3}\pi\rho^3,$$

η $V = 6\pi\rho^2 \, . \, \frac{1}{3}\rho = \text{ὁλικὴ ἐπιφάνεια} \times \frac{1}{3}\,\text{ἀκτῖνος}.$

Θεώρημα 748

1908. Ὁ ὄγκος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου εἶναι γινόμενον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἀπὸ τῆς γενετείρας τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

Εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ, τοῦ παραγομένου ὑπὸ τριγώνου στρεφομένου περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ μιᾶς κορυφῆς του καὶ κείμενον εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου. Ἀποτελεῖ δὲ ἐπίσης καὶ ἐπέκτασιν τῆς ἤδη ἀποδειχθείσης ἀναλόγου ἰδιότητος κανονικῆς πυραμίδος (§ 1849).

Θεώρημα 749

1909. **Ὁ ὄγκος κώνου περιγεγραμμένου εἰς σφαῖραν εἶναι ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας καὶ τοῦ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.**

Ὡς καὶ προηγουμένως (§ 1907), δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸν κῶνον ὡς ἀποτελούμενον:

1) Ἐξ ἑνὸς κώνου μὲ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας καὶ βάσιν τὴν τοῦ δοθέντος κώνου, καὶ

2) Ἐκ τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου διὰ στροφῆς περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κώνου τριγώνου, ἔχοντος κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ βάσιν μίαν γενέτειραν τοῦ κώνου.

Εἶναι, ἑπομένως, ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας καὶ τοῦ τρίτου τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

Θεώρημα 750

1910. **Ὁ ὄγκος κώνου εἶναι ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{1}{3}$ τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου τοῦ παράγοντος τὸ στερεὸν ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου.**

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι $\frac{1}{2}\rho\upsilon$ καὶ $2\pi\rho$ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως· τὸ τρίτον τοῦ γινομένου αὐτῶν ἑπομένως εἶναι

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\rho\upsilon\,.\,2\pi\rho = \frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon.$$

Θεώρημα 751

1911. **Ὁ ὄγκος κολούρου κώνου περιγεγραμμένου εἰς σφαῖραν εἶναι ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας καὶ τοῦ τρίτου τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.**

Ὡς καὶ προηγουμένως (§§ 1907, 1909).

Θεώρημα 752

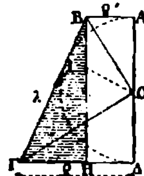
1912. **Οἱ ὄγκοι δύο τυχόντων στερεῶν, περιγεγραμμένων εἰς ἴσας σφαίρας, εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ ὁλικαί των ἐπιφάνειαι Ε καὶ Ε′.**

Ἐπειδή:

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3}E\rho}{\frac{1}{3}E'\rho} = \frac{E}{E'}.$$

Θεώρημα 753

1913. **Ἐὰν ἡ πλευρὰ λ κολούρου κώνου εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων ρ καὶ ρ′ τῶν βάσεών του, τὸ ὕψος αὐτοῦ υ εἶναι διπλάσιον τοῦ μέσου ἀναλόγου μήκους τῶν ἀκτίνων ρ, ρ′. Ὁ δὲ ὄγκος του εἶναι ἴσος μὲ τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειάν Ε, πολλαπλασιασμένην ἐπὶ τὸ ἕκτον τοῦ ὕψους αὐτοῦ.**



Σχ. 1230.

1) Ἡ πλευρὰ λ εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ καθέτους πλευρὰς υ καὶ ρ − ρ′· ἄρα

$$υ^2 = λ^2 - (ρ - ρ')^2 = (ρ + ρ')^2 - (ρ - ρ')^2 = 4ρρ'.$$

ἢ $$υ = 2\sqrt{ρρ'}.$$

2) $$V = \frac{1}{3}υ\left[B + B' + \sqrt{BB'}\right] = \frac{1}{3}πυ\left[ρ^2 + ρ'^2 + ρρ'\right]$$

καὶ $$E = πρ^2 + πρ'^2 + λπ(ρ + ρ') =$$

$$= π\left[ρ^2 + ρ'^2 + (ρ + ρ')^2\right] = 2π\left[ρ^2 + ρ'^2 + ρρ'\right].$$

Ἐπομένως $$\frac{V}{E} = \frac{1}{6}υ \quad ἢ \quad V = \frac{E \cdot υ}{6}.$$

1914. Παρατήρησις. Διὰ πάντα κόλουρον κῶνον περιγεγραμμένον εἰς σφαῖραν, ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ἢ γενέτειρα εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν $λ = ρ + ρ'$, ἐγγράφεται σφαῖρα εἰς τὸν κόλουρον τοῦτον κῶνον.

Θεώρημα 754

1915. **Ἐὰν τὸ ὕψος κολούρου κώνου εἶναι τετραπλάσιον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων, ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων τῶν δύο σφαιρῶν μὲ ἀκτῖνας τὰς τῶν βάσεων.**

Διὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ διὰ τὰ ἀνάλογα πρὸς αὐτό, διαπιστοῦμεν συνήθως τὴν ταυτότητα τῶν λαμβανομένων τύπων πρὸς ἄλλους γνωστοὺς καὶ παρέχοντας τὰς ἰδίας ποσότητας. Οὕτω

$$V = \frac{1}{3}πυ\left[ρ^2 + ρ'^2 + ρρ'\right] = \frac{4}{3}π(ρ - ρ')\left[ρ^2 + ρ'^2 + ρρ'\right].$$

ἢ $$V = \frac{4}{3}πρ^3 - \frac{4}{3}πρ'^3.$$

Θεώρημα 755

1916. **Ἐὰν εἰς τετράεδρον ἐγγράφεται σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν ἀκμῶν του, τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ τρία ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν.**

Ἐπειδὴ αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τῆς ἐν λόγῳ σφαίρας εἶναι ἴσαι, κλπ., ὡς διὰ περιγράψιμον, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, τετράπλευρον.

Θεώρημα 755—I

1917. Ἐὰν εἰς ἑξάεδρον ἐγγράφεται σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν ἀκμῶν αὐτοῦ, αἱ δώδεκα ἀκμαὶ διαιροῦνται εἰς τρεῖς τετράδας εὐθειῶν συνδεουσῶν, ἀνὰ δύο, τὰς κορυφὰς τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκμῶν ἑκάστης τετράδος εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς τρεῖς τετράδας.

Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὀκτὼ τμημάτων ἐπὶ τῶν τεσσάρων ἀκμῶν μιᾶς τετράδος, τὸ αὐτὸ ἄθροισμα εὑρίσκομεν καὶ διὰ τὰς δύο ἄλλας τετράδας.

Θεώρημα 756

1918. Δίδονται σφαῖρα καὶ σταθερὸν σημεῖον· ἐὰν διὰ τοῦ σημείου ἀχθοῦν τρία τυχόντα ἐπίπεδα, κάθετα ἀνὰ δύο, ταῦτα τέμνουσιν τὴν σφαῖραν κατὰ τρεῖς κύκλους, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν εἶναι σταθερόν.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 30).

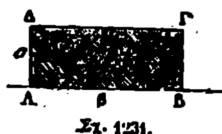
Θεώρημα 757

1919. Τὸ μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων σφαιρῶν, ἀκτίνων α καὶ β, περιεχόμενον στερεὸν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸν κόλουρον κῶνον, μὲ βάσεις μεγίστους κύκλους τῶν δύο σφαιρῶν καὶ ὕψος τετραπλάσιον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

$$V=\frac{4}{3}\pi\alpha^3-\frac{4}{3}\pi\beta^3=\frac{4}{3}\pi(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\,.\,4(\alpha-\beta)\left[\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\right]\cdot$$

Θεώρημα 758



Σχ. 1231.

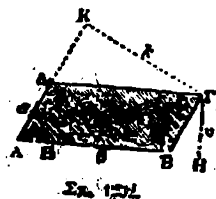
1920. Τὰ στερεὰ τὰ παραγόμενα διὰ διαδοχικῶν περιστροφῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου περὶ τὰς πλευράς του, ἔχουν ὄγκους ἀντιστρόφως ἀναλόγους τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν.

$$V=\pi\alpha^2\beta,\quad V'=\pi\beta^2\alpha\cdot$$

ἄρα :

$$\frac{V}{V'}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Θεώρημα 758—I



Σχ. 1232.

1921. Τὸ αὐτὸ διὰ τυχὸν παραλληλόγραμμον.

Τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον διὰ περιστροφῆς τοῦ παραλληλογράμμου περὶ τὴν πλευράν του $AB=\beta$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου ΗΔΓΗ στρεφομένου περὶ τὴν $HH=\beta$:

$$V_\beta=\pi\upsilon^2\beta \text{ καὶ ἀναλόγως } V_\alpha=\pi k^2\alpha,$$

όπου $υ, k$ τά έπί τάς ΑΒ, ΑΔ ύψη τοΰ παραλληλογράμμου. Ὥστε

$$\frac{V_\beta}{V_\alpha}=\frac{\upsilon^2\beta}{k^2\alpha}=\frac{\alpha^2\beta}{\beta^2\alpha}=\frac{\alpha}{\beta},$$

ἀφοῦ $$(ΑΒΓΔ)=\alpha k=\beta\upsilon \quad \text{καί} \quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\upsilon}{k}.$$

Θεώρημα 759

1922. Ἂν V_α, V_β, V_γ εἶναι οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν, τῶν παραγομένων διὰ διαδοχικῶν περιστροφῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου περὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὰς καθέτους αὐτοῦ πλευράς, θὰ εἶναι

$$\frac{1}{V_\alpha{}^2}=\frac{1}{V_\beta{}^2}=\frac{1}{V_\gamma{}^2}.$$

Ἔστω $υ$ τό έπί τήν ύπότείνουσαν ΰψος. Ἔχομεν

$$V_\alpha=\frac{\pi\upsilon^2\alpha}{3},\quad V_\beta=\frac{\pi\gamma^2\beta}{3},\quad V_\gamma=\frac{\pi\beta^2\gamma}{3}$$

καί ή δεικτέα σχέσις άνάγεται είς τήν

$$\beta^4\gamma^2.\gamma^4\beta^2=\upsilon^4\alpha^2\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)=\upsilon^4\alpha^4\beta^2\gamma^2,$$

ή τήν $$\beta^4\gamma^4=\alpha^4\upsilon^4,$$

άληθή, άφοΰ $$2E=\beta\gamma=\alpha\upsilon.$$

Ἄλλη ἀπόδειξις, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Guldin :

$$V_\alpha=2\pi E.\frac{\upsilon}{3},\quad V_\beta=2\pi E.\frac{\beta}{3},\quad V_\gamma=2\pi E.\frac{\gamma}{3}.$$

Ἡ δεικτέα σχέσις άνάγεται τώρα είς τήν

$$\frac{1}{\upsilon^2}=\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\gamma^2+\beta^2}{\gamma^2\beta^2}=\frac{\alpha^2}{\beta^2\gamma^2},$$

δηλ. τήν άληθή $$\beta\gamma=\alpha\upsilon=2E.$$

Θεώρημα 760

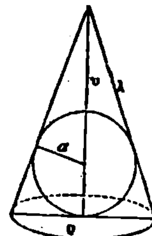
1923. Μεταξὺ τῶν ἀκτίνων ρ καὶ α κώνου καὶ ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸν σφαίρας ὑφίσταται ἡ σχέσις

$$\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\rho^2}=\frac{2}{\alpha\upsilon},$$

ὅπου υ τὸ ὕψος τοῦ κώνου.

(Dostor, *Archives de mathématiques et de physique*, 1877, σ. 313).

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων τοῦ σχήματος λαμβάνομεν



Σχ. 1233.

$$\frac{\alpha}{\rho}=\frac{\sqrt{\upsilon(\upsilon-2\alpha)}}{\upsilon},\quad \frac{\alpha^2}{\rho^2}=1-\frac{2\alpha}{\upsilon},$$

ὅθεν $$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha\upsilon} \quad ἤ \quad \frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\rho^2}=\frac{2}{\alpha\upsilon}.$$

Θεώρημα 761

1924. Ἂν V, E καὶ K εἶναι ἀντιστοίχως ὁ ὄγκος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια καὶ ἡ κυρτὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια, θὰ εἶναι

$$8\pi V^2 = K^2 (E - K).$$

Ἐπειδή:

$$V = \pi\rho^2 \upsilon, \quad 8\pi V^2 = 8\pi^3\rho^4\upsilon^2,$$

$$K = 2\pi\rho\upsilon, \quad K^2 = 4\pi^2\rho^2\upsilon^2,$$

$$E = 2\pi\rho\upsilon + 2\pi\rho^2, \quad E - K = 2\pi\rho^2$$

καὶ

$$8\pi V^2 = 4\pi^2\rho^2\upsilon^2 . 2\pi\rho^2 = K^2 (E - K).$$

Θεώρημα 762

1925. Ὁμοίως, διὰ κῶνον ἐκ περιστροφῆς εἶναι

$$9\pi V^2 = E (E - K) (2K - E). \qquad \text{(Dostor)}$$

Ἐπειδή:

$$V = \frac{\pi\rho^2\upsilon}{3}, \quad K = \pi\rho\sqrt{\rho^2 + \upsilon^2}, \quad E = \pi\rho\sqrt{\rho^2 + \upsilon^2} + \pi\rho^2,$$

$$9\pi V^2 = \pi^3\rho^4\upsilon^2, \quad E - K = \pi\rho^2,$$

$$2K - E = \pi\rho\sqrt{\rho^2 + \upsilon^2} - \pi\rho^2,$$

καὶ

$$E . (E - K) (2K - E) = (\pi\rho\sqrt{\rho^2 + \upsilon^2} + \pi\rho^2) (\pi\rho^2) (\pi\rho\sqrt{\rho^2 + \upsilon^2} - \pi\rho^2) =$$

$$= \pi^3\rho^4\upsilon^2 = 9\pi V^2.$$

Θεώρημα 762—I

1926. Διὰ δοθέντος σημείου ἐπὶ τοῦ ἄξονος κώνου (K) ἐκ περιστροφῆς φέρομεν τυχὸν ἐπίπεδον. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν μηκῶν τῶν, ἀπὸ τῆς κορυφῆς μέχρι τοῦ ἐπιπέδου, τμημάτων ἀπέναντι (διαμετρικῶν) γενετειρῶν εἶναι σταθερόν.

(*Μέθοδοι*, § 280).

Θεώρημα 762—II

1927. Ἐὰν ὁ ἀνωτέρω κῶνος εἶναι ὀρθός, μὲ ὁδηγὸν τυχοῦσαν καμπύλην ἔχουσαν κέντρον, καὶ θεωρήσωμεν δύο σταθερὰς ἀπέναντι γενετείρας αὐτοῦ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν ἰδίων ἐπ' αὐτῶν μηκῶν εἶναι σταθερόν, διὰ πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

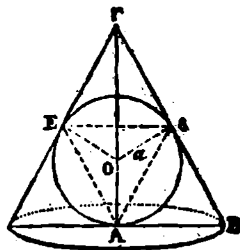
Διὰ πάντα ὀρθὸν κῶνον μὲ ὁδηγὸν καμπύλην ἔχουσαν κέντρον, τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι διχοτόμος πάντοτε τῆς γωνίας δύο ἀπέναντι γενετειρῶν. Θὰ ἔχωμεν ἑπομένως

$$\frac{1}{KA} + \frac{1}{KB} = \text{σταθ.}$$

ὅπου A, B αἱ τομαὶ τῶν γενετειρῶν καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου. Ἐπειδὴ ἡ σταθερὰ αὕτη ποσότης ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς γωνίας τῶν θεωρουμένων γενετειρῶν (§ 280), μεταβαλλομένου τοῦ ζεύγους τούτου γενετειρῶν, μεταβάλλεται καὶ ἡ τιμὴ ταύτης.

Θεώρημα 763

1928. **Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔχει λόγον πρὸς τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὴν ἰσοπλεύρου κώνου ἴσον πρὸς $\frac{4}{9}$. Τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουν καὶ οἱ ὄγκοι τῶν ἰδίων στερεῶν** *(Ἀρχιμήδης)*.



Σχ. 1234.

Ἰσόπλευρος λέγεται εἷς κῶνος ἐὰν ἡ τομή του δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον.

Ἔστω α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας. Ἡ ἀκτὶς ΑΒ τῆς βάσεως εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γενετείρας ΒΓ καὶ ἴση πρὸς ΔΕ· εἶναι δὲ ἡ ΔΕ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν ἀκτῖνος α (κατὰ τὸ σχῆμα). Ἑπομένως

$$ΑΒ = ΔΕ = α\sqrt{3}, \quad ΔΕ^2 = 3α^2.$$

Ἄρα $\quad ΓΟ^2 = 4α^2, \quad ΓΟ = 2α \quad$ καὶ $ΓΑ = 3α$

καὶ $\quad$ Ὁλ. ἐπ. κώνου $= πΑΒ^2 + π.ΑΒ.ΓΔ = 9πα^2$.

Ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου εἶναι

$$\frac{4πα^2}{9πα^2} = \frac{4}{9}.$$

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι

$$V = \frac{1}{3}πΑΒ^2.ΑΓ = \frac{9}{3}πα^3$$

καὶ ὁ τῆς σφαίρας: $V' = \frac{4}{3}πα^3$. Ὥστε

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{4}{3}πα^3}{\frac{9}{3}πα^3} = \frac{4}{9}.$$

Θεώρημα 763—1

1928 α. **Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου εἰς σφαῖραν εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τῆς τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὴν ἰσοπλεύρου κώνου. Ὁμοίως διὰ τοὺς ὄγκους.**

Πράγματι, ἐὰν ἓν πολύεδρον, κῶνος ἢ κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένον εἰς σφαῖραν, οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν τούτων ἔχουν λόγον, ὃν καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ὁλικαὶ ἐπιφάνειαί των.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ 4 ἐπιφ. μονάδων τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ἡ τοῦ κυλίνδρου εἶναι 6 καὶ ἡ τοῦ κώνου 9 ἐπιφ. μονάδες. Ἀλλ' εἶναι

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$$

Ὥστε ...

Θεώρημα 763—II

1928 β. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ εἰς σφαῖραν περιγεγραμμένου κυλίνδρου εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ταύτης καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸν κύλινδρον σφαίρας.

Θεώρημα τοῦ Ἀρχιμήδους 763—III

1928 γ. Πᾶσα σφαιρικὴ ἐπιφάνεια προβάλλεται κατὰ ἰσοδύναμον ἐπιφάνειαν ἐπὶ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κυλίνδρου, ὅταν αἱ προβάλλουσαι συναντοῦν τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου καὶ εἶναι κάθετοι ἐπ' αὐτόν.

Ἐπειδὴ αἱ ἀντίστοιχοι σφαιρικαὶ καὶ κυλινδρικαὶ ζῶναι εἶναι ἰσοδύναμοι, ὡς ἰσοϋψεῖς. Οὕτω διατυποῦται τὸ κύριον θεώρημα τοῦ Ἀρχιμήδους· ἐξ αὐτοῦ μεταβαίνομεν εὐκόλως εἰς τὴν κατωτέρω βασικὴν διατύπωσιν:

1928 δ. Πᾶσα σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ΑΒΓ... προβάλλεται κατ' ἰσοδύναμον ἐπιφάνειαν Α'Β'Γ'... ἐπὶ ἐπιπέδου ἐφαπτομένου τῆς σφαίρας, ὅταν ἕκαστον σημεῖον Α, Β, Γ... τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς Α', Β', Γ'... διὰ κυκλικῶν τόξων ΑΑ', ΒΒ'... ἐχόντων ὡς κοινὸν κέντρον τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ρ.

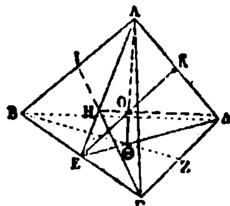
Θεωρήσωμεν ἐπὶ τῆς σφαίρας σφαιρικὴν ζώνην μὲ μίαν βάσιν, ἔχουσαν τὸ σημεῖον Ρ ὡς κορυφὴν καὶ ΡΑ ὡς χορδὴν τοῦ παράγοντος αὐτὴν τόξου. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς ζώνης εἶναι $\pi(\mathrm{AP})^2$ καὶ ἡ τοῦ κύκλου (Ρ, ΡΑ' = ΡΑ) ἴση πρὸς αὐτὴν $= \pi(\mathrm{PA'})^2 = \pi(\mathrm{PA})^2$.

1928 ε. Πᾶσα σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ΑΒΓ... προβάλλεται κατ' ἰσοδύναμον ἐπιφάνειαν Α'Β'Γ'... ἐπὶ περιγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν κώνου, ὅταν ἕκαστον σημεῖον Α, Β, Γ... προβάλλεται ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας διὰ κυκλικῶν τόξων ΑΑ', ΒΒ'..., ἐχόντων κέντρον τὴν κορυφὴν Κ τοῦ κώνου.

(Βλ. *Mathesis*, 1905, σ. 203, ἄρθρον τοῦ C.E. Wasteels).

Παρατήρησις. Τὰ θεωρήματα §§ 1928 β καὶ γ εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις, πάλαι γνωσταί, τοῦ θεωρήματος τῆς § 1928 δ. Ἰδοὺ ἡ γενίκευσις τούτου:

1928 ζ. Πᾶσα σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ΑΒΓ... ἔχει σταθερὸν λόγον πρὸς τὴν προβολήν της Α'Β'Γ'... ἐπὶ κώνου ἐκ περιστροφῆς, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὅταν τὰ σημεῖα αὐτῆς Α, Β, Γ... προβάλλωνται εἰς Α', Β', Γ' διὰ κυκλικῶν τόξων ἐχόντων κοινὸν κέντρον τὴν κορυφὴν Κ τοῦ κώνου. (*Mathesis*, αὐτ.).



Σχ. 1235.

Θεώρημα 764

1929. Εἰς τὸ κανονικὸν τετράεδρον, ἡ ἀκτὶς τῆς ἐφαπτομένης τῶν ἓξ ἀκμῶν σφαίρας εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἀκτίνων τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τετράεδρον σφαίρας. (Dostor, N. A., 1874, σ. 568).

Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ τετραέδρου. Τοῦτο εἶναι κοινόν, προφανῶς, κέντρον τῶν τριῶν θεωρουμένων σφαιρῶν, μὲ ἀκτῖνας ΟΑ διὰ τὴν περι-

γεγραμμένην, ΟΘ διὰ τὴν ἐγγεγραμμένην καὶ ΟΕ διὰ τὴν ἐφαπτομένην τῶν ἀκμῶν· ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΟΕ = ΟΚ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ δὴ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΚ καὶ ΟΕΘ, λαμβάνομεν

$$\frac{ΟΑ}{ΟΕ} = \frac{ΟΚ}{ΟΘ} = \frac{ΟΕ}{ΟΘ} \quad ἢ \quad ΟΑ \, . \, ΟΘ = ΟΕ^2.$$

Θεώρημα τοῦ Durrande 764—I

1929 α. Ἡ ἀπόστασις δ τῶν κέντρων τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης εἰς τετράεδρον σφαίρας δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$δ^2 = (R - ρ)^2 - 4ρ^2. \qquad (α)$$

Διὰ τὴν παρεγγεγραμμένην εἰς τὸ τετράεδρον καὶ εἰς τὴν στερεὰν γωνίαν Α αὐτοῦ, θὰ εἶναι

$$δ^2_α = (R + ρ_α)^2 - 4ρ^2_α. \qquad (β)$$

(*An. d. Gerg.*, τόμ. XIV, 1823—1824, σ. 56).

Θεώρημα 765

1930. Ἔστω σφαῖρα ἔχουσα κέντρον Ο καὶ θεωρήσωμεν μεταβλητὴν σφαῖραν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Ο. Δείξατε ὅτι, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ἀκτὶς ρ τῆς δευτέρας σφαίρας, ἡ ὑπὸ τῆς πρώτης σφαίρας ἀποτεμνομένη ἐπὶ τῆς δευτέρας σφαιρικὴ ζώνη ἔχει σταθερὸν ἐμβαδόν. (N. A., 1851).

Ἔστω α ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης σφαίρας, Γ τὸ κέντρον τῆς δευτέρας σφαίρας. Θὰ εἶναι

$$ΟΔ = 2ΟΓ = 2ρ.$$

Ἐπειδὴ

$$σφ. \; ζώνη \; ΑΟΒ = 2πρ \, . \, ΟΗ,$$

θὰ πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὕψος ΟΗ τῆς ζώνης ταύτης.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΔ λαμβάνομεν:

$$ΟΔ \, . \, ΟΗ = ΟΑ^2 = α^2 \quad ἢ \quad 2ρ \, . \, ΟΗ = α^2.$$

Σχ. 1203.

Ἄρα: $\quad σφ. \; ζώνη \; ΑΟΒ = πα^2 = σταθ.$

Ἤ: *Ἡ ἀποτεμνομένη σφαιρικὴ ζώνη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς μέγιστον κύκλον τῆς σταθερᾶς σφαίρας ἢ ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας μὲ διάμετρον τὴν ἀκτῖνα τῆς σταθερᾶς.*

Θεώρημα 765—I

1931. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι σφαῖραι μὲ ἀκτῖνας α καὶ β (α > β). Ἐπὶ πάσης σφαίρας διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου τῶν δύο πρώτων, ὁρί-

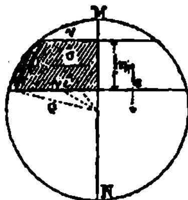
ζεται ὑπ' αὐτῶν σφαιρικὴ ζώνη μὲ δύο βάσεις, τῆς ὁποίας τὸ ἐμβαδὸν εἶναι σταθερόν, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς μεταβλητῆς σφαίρας.

Ἐπειδή:

$$\text{σφαιρικὴ ζώνη} = \pi(\alpha^2 - \beta^2).$$

Θεώρημα τοῦ Maclaurin 766

1932. Ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὄγκον κυλίνδρου, ἰσοϋψοῦς πρὸς τὸ τμῆμα καὶ ἔχοντος βάσιν τομὴν τῆς σφαίρας ἴσον ἀπέχουσαν τῶν βάσεων τοῦ τμήματος, ἠλαττωμένον κατὰ τὸν ἥμισυ ὄγκον τῆς σφαίρας μὲ διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ τμήματος.



Σχ. 1237.

Ἔστωσαν μ, ν αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ τμήματος, σ ἡ ἀκτὶς τῆς μέσης τομῆς, υ τὸ ὕψος καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

Μεταξὺ τῶν μηκῶν μ, ν, σ καὶ υ ὑφίσταται ἡ σχέσις (§ 1449):

$$\mu^2 + \nu^2 = 2\sigma^2 - 2\cdot\left(\frac{\upsilon}{2}\right)^2.$$

Ὁ γνωστὸς τύπος τοῦ ὄγκου σφαιρικοῦ τμήματος

$$V = \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 + \frac{1}{2}\pi\upsilon(\mu^2 + \nu^2),$$

γράφεται διαδοχικῶς

$$V = \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 + \frac{1}{2}\pi\upsilon\left(2\sigma^2 - 2\cdot\frac{\upsilon^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 + \pi\sigma^2\upsilon - \frac{1}{4}\pi\upsilon^3 =$$

$$= \pi\sigma^2\upsilon - \frac{1}{12}\pi\upsilon^3. \qquad \text{Ὅ. ἔ. δ.}$$

Παρατήρησις. Ἐὰν αἱ βάσεις τοῦ τμήματος ἴσον ἀπέχουν τοῦ κέντρου, δηλ. ἐὰν $\sigma = \rho$, λαμβάνομεν:

$$V = \pi\rho^2\upsilon - \frac{1}{12}\pi\upsilon^3.$$

καὶ ἐὰν πρὸς τούτοις $\upsilon = 2\rho$,

$$V = \pi\rho^2 \cdot 2\rho - \frac{1}{12}\pi\cdot(2\rho)^3 = \frac{4}{3}\pi\rho^3,$$

δηλ. τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας.

Θεώρημα 766—I

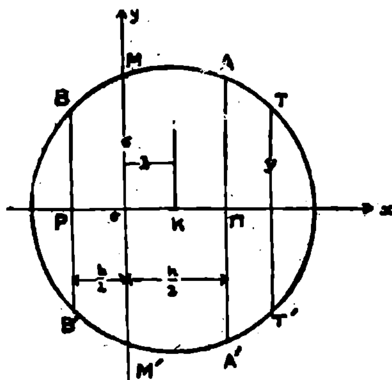
1932 α. Εἰς δύο τυχούσας σφαίρας, τὰ ἰσοϋψῆ καὶ τῆς αὐτῆς μέσης τομῆς σφαιρικὰ τμήματα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐπειδὴ ὁ προηγούμενος τύπος εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

1939 α. Σημείωσις. *Άλλη ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τοῦ Maclaurin* (§ 1932). Ὅταν καταφεύγωμεν εἰς τὸν Ὁλοκληρωτικὸν Λογισμὸν διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου δοθέντος στερεοῦ, συνηθίζομεν νὰ τοποθετοῦμεν τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων εἰς τὸ κέντρον τοῦ στερεοῦ (ὅταν ὑπάρχῃ τοῦτο) ἢ εἰς τὴν κορυφὴν ἑνὸς μεσημβρινοῦ. Διὰ τὴν σφαῖραν λ. χ., ἀναχωροῦμεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $x^2+y^2=\rho^2$ (ἑνὸς μεγίστου κύκλου (Γ) αὐτῆς) καὶ λαμβάνομεν τὸν ὄγκον ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος, τοῦ ὁποίου μία βάσις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου. Ἀκολούθως καὶ τῇ βοηθείᾳ ἀλγεβρικῶν ὑπολογισμῶν, κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ἐπιπόνων, ἀναγόμεθα εἰς τὸ σφαιρικὸν τμῆμα μὲ δύο τυχούσας βάσεις, θεωροῦντες αὐτὸ ὡς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο σφαιρικῶν τμημάτων μὲ κοινὴν βάσιν τὸν κύκλον (Γ).

Ἤ, ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς ἐξισώσεως $x^2+y^2-2\rho x=0$ (ἡ ἀρχὴ Ο τῶν ἀξόνων ἐπὶ περιφερείας μεγίστου πάλιν κύκλου, ὁ ἄξων ΟΧ κατὰ διάμετρον αὐτοῦ), φθάνομεν πάλιν εἰς τὸν τύπον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος μὲ δύο βάσεις καὶ ἀκολούθως εἰς τὸν τύπον τοῦ τυχόντος σφαιρικοῦ τμήματος, θεωροῦντες αὐτὸ ὡς διαφορὰν δύο τμημάτων μὲ μίαν βάσιν.

Ὁ ταχύτερος πάντως τρόπος ὑπολογισμοῦ τοῦ ὄγκου τοῦ τυχόντος σφαιρ. τμήματος εἶναι ὁ ἀπ' εὐθείας, συναρτήσει τοῦ ὕψους καὶ τῆς μέσης αὐτοῦ τομῆς· κατόπιν, δι' ἁπλῶν πάντοτε μετασχηματισμῶν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν τύπον συναρτήσει τῶν βάσεων κλπ.



1237 α

1ον Παράδειγμα. Ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος μὲ δύο τυχούσας βάσεις καὶ μὲ διαμέτρους (σχ. 1237 α) τὰς ΑΑ' καὶ ΒΒ'.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ μεσημβρινοῦ ΒΑ Α'Β', διὰ ἀρχὴν ἀξόνων Ο τὸ μέσον τοῦ ὕψους πρ = h, εἶναι

$$(x-\lambda)^2+y^2=\rho^2 \quad \text{ἢ} \quad y^2=\rho^2-\lambda^2+2\lambda x-x^2, \qquad (1)$$

ὅπου ΚΟ = λ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ μεσημβρινοῦ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς Ο.

Διὰ $x=0$ λαμβάνομεν :

$$y^2=\sigma^2=\rho^2-\lambda^2,$$

δηλ. τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τῆς μέσης τομῆς ΜΜ'.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς τυχούσης τομῆς ΤΤ' (x) εἶναι

$$\pi y^2=\pi(\rho^2-\lambda^2+2\lambda x-x^2)=\pi(\sigma^2+2\lambda x-x^2) \qquad (2)$$

καὶ ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΑΑ'Β'Β τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \pi y^2 dx = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma^2 + 2\lambda x - x^2)\, dx.$$

Μία παράγουσα τῆς ὁλοκληρωτέας συναρτήσεως εἶναι ἡ

$$\pi\left((\sigma^2 x + \lambda x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \qquad (3)$$

καὶ ἑπομένως :

$$V = \left[\pi\left(\sigma^2 x + \lambda x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}},$$

ἤ, μετὰ τὰς πράξεις,

$$V = \pi\left(\sigma^2 h - \frac{h^3}{12}\right), \qquad (4)$$

δηλ. ὁ γνωστὸς τύπος τῆς § 1932. Ἐκ τούτου ἕπεται εὐκόλως ὁ τύπος τοῦ ὄγκου συναρτήσει τῶν βάσεων κλπ. τοῦ τμήματος.

2ον Παράδειγμα. *Ὑπολογισμὸς τοῦ ὄγκου τμήματος (μὲ δύο βάσεις) διχώνου ὑπερβολοειδοῦς, παραγομένου διὰ στροφῆς τῆς ὑπερβολῆς $x^2 - y^2 = \alpha^2$ περὶ τὸν πρωτεύοντα ἄξονα αὐτῆς.*

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ στερεοῦ, διὰ ἀρχὴν ἀξόνων πάλιν τὸ μέσον τοῦ ὕψους h τοῦ τμήματος, εἶναι

$$y^2 = x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 - \alpha^2.$$

(ὅπου λ = ἀπόστασις κέντρου μεσημβρινοῦ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς O > α).

Διὰ x = 0 λαμβάνομεν ὁμοίως

$$y^2 = \sigma^2 = \lambda^2 - \alpha^2,$$

δηλ. τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τῆς μέσης τομῆς.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς τυχούσης τομῆς (x) εἶναι

$$\pi y^2 = \pi(x^2 + 2\lambda x + \sigma^2),$$

καὶ ὁ ὄγκος τοῦ τμήματος :

$$V = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dx = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (x^2 + 2\lambda x + \sigma^2)\, dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} + \lambda x^2 + \sigma^2 x\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}.$$

Μετὰ τὰς πράξεις εὑρίσκομεν:

$$V = \pi\left[\sigma^2 h + \frac{h^3}{12}\right]. \qquad (5)$$

Παρατήρησις. Ὁ ὄγκος τοῦ τμήματος μὲ δύο βάσεις ἑνὸς ἰσοπλεύρου ἐκ περιστροφῆς μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, δίδεται ὑπὸ τοῦ ἰδίου τύπου (5), καθὼς καὶ ὁ ὄγκος κολούρου κώνου, τοῦ ὁποίου αἱ γενέτειραι ἔχουν κλίσιν πρὸς τὸν ἄξονα 45°. Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι τμήματα τῶν δύο τούτων στερεῶν εἶναι ἰσοδύναμα, ἐὰν ταῦτα εἶναι ἰσοϋψῆ καὶ ἔχουν ἰσοδυνάμους μέσας τομάς. (*Appendice aux Exercices de Géométrie*, n° 848).

Θεώρημα 767

1934. **Ἐὰν ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον περιστραφῇ περὶ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ καὶ διερχομένην διὰ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, τὸ παραγόμενον στερεὸν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὴν σφαῖραν μὲ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ τριγώνου.**

1) Εἶναι ἁπλῆ συνέπεια τοῦ θεωρήματος ἐν G., n° 583.

2) Ἀποδεικνύεται ἐπίσης διὰ τοῦ θεωρήματος τῶν Πάππου — Guldin. (G., n° 904).

3) Ὁ ἀνωτέρω ὄγκος συνάγεται καὶ ἐκ τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ, τοῦ παραγομένου διὰ περιστροφῆς ὑπερβολικοῦ τμήματος περὶ τὸν μὴ διαπερῶντα τὴν καμπύλην ἄξονα αὐτῆς. (G., n° 978).

1935 α. ***Συμπληρώματα ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ Ἀρχιμήδους.*** Αἱ στοιχειώδεις ἀποδείξεις τὰς ὁποίας ἐδώσαμεν κατέστησαν κοινὸν κτῆμα καὶ συνεπλήρωσαν ἐπιτυχῶς τὸ *θεώρημα τοῦ Ἀρχιμήδους*, τὸ σχετικὸν πρὸς τὴν σφαῖραν καὶ τὸν περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν κύλινδρον.

Οὕτω, διὰ τὸ τυχὸν σφαιρικὸν τμῆμα:

1) Ἡ ζώνη αὐτοῦ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀντίστοιχον κυλινδρικὴν ζώνην.

2) Ἑκάστη βάσις τοῦ τμήματος εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου, ἠλαττωμένην κατὰ τὴν ἀντίστοιχον τομὴν τοῦ διχώνου κώνου, τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύλινδρον.

3) Τὸ σφαιρικὸν τμῆμα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἰσοϋψὲς κυλινδρικὸν τμῆμα, ἠλαττωμένον κατὰ τὸν ἀντίστοιχον κόλουρον κῶνον [πρώτου ἢ δευτέρου εἴδους] (106).

Παρὰ τὴν ἄκραν ἁπλότητα τῶν ἀποδείξεων τῶν προτάσεων τούτων, θὰ πρέπει νὰ ἀναγνωρισθῇ ὅτι αὗται ἐμφανίζονται ὡς *ἁπλαῖ συνέπειαι* τῶν τύπων οὓς λαμβάνομεν διὰ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ.

Παράδειγμα. Διὰ τὸ σφαιρικὸν τμῆμα τοῦ ὁποίου μία βάσις εἶναι μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος, ἡ τομὴ αὐτοῦ εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τοῦ κέντρου ἔχει ἐμβαδὸν

$$\pi y^2 = \pi(\rho^2 - x^2)$$

---

106. Σημ. μετ. Κῶνος *δευτέρου εἴδους* εἶναι τμῆμα διχώνου κώνου μεταξὺ δύο παραλλήλων καὶ ἑκατέρωθεν τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τομῶν αὐτοῦ AB, ΓΔ. Ἂν υ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν τομῶν καὶ B, B' τὰ ἐμβαδά των, ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τούτου εἶναι $V = \frac{1}{3} υ\,[B + B' - \sqrt{BB'}\,]$.

καὶ ἑπομένως $V = \pi \int_0^h (\rho^2 - x^2)\, dx = \pi\rho^2 h - \frac{\pi h^3}{3}$.

$\pi\rho^2 h$ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἰσοϋψοῦς πρὸς τὸ σφ. μῆμα κυλινδρικοῦ τμήματος, $\frac{\pi h^3}{3} = \frac{h}{3}$. πh^3 δὲ εἶναι ὁ ὄγκος ἰσοϋψοῦς ἐπίσης πρὸς τὸ τμῆμα κώνου καὶ ἔχοντος ἀκτῖνα βάσεως h — δηλαδή, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος ἀμέσως φαίνεται, τμῆμα τοῦ διχώνου κώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν περιγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν κύλινδρον.

Διὰ τμῆμα τυχόντος ἐλλειψοειδοῦς, λαμβάνομεν :

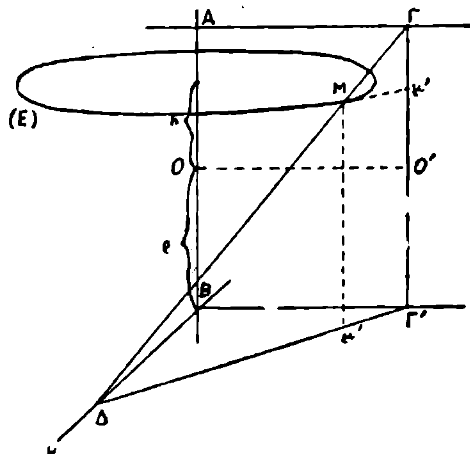
$$V = \frac{\pi\beta\gamma}{\alpha^2}\left(\alpha^2 h - \frac{h^3}{3}\right),$$

ὅπου α, β, γ οἱ ἡμιάξονες τοῦ στερεοῦ καὶ αἱ βάσεις τοῦ τμήματος κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα 2α περιστροφῆς. $\frac{\pi\beta\gamma}{\alpha^2} \cdot \alpha^2 h = \pi\beta\gamma h$ εἶναι καὶ πάλιν ὁ ὄγκος τοῦ ἰσοϋψοῦς κυλινδρικοῦ τμήματος καὶ $\frac{\pi\beta\gamma h^3}{3\alpha^2}$ ὁ ὄγκοςτοῦ ἰσοϋψοῦς κωνικοῦ τμήματος.

Διὰ τὰ ὑπερβολοειδῆ ἔχομεν ἀναλόγους τύπους

Θεώρημα 767—I

1935 β. Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου διὰ τῆς κινήσεως εὐθυγράμμου τμήματος ΓΔ (σχ. 1237 β) μήκους λ, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα



Σχ. 1237 β

γράφουν δύο εὐθείας ΑΧ, ΒΥ, ἀσυμβάτους, ὀρθογωνίους καὶ ἐχούσας ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν $AB = 2\rho = \frac{\lambda\sqrt{2}}{2}$ [107], εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας μὲ διάμετρον ΑΒ.

107. Σημ. μετ. Καὶ ὄχι ὡς ἐν τῷ κειμένῳ $\frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθοῦν ἴσαι αἱ τομαὶ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῆς ἐν λόγῳ σφαίρας καὶ τῆς ἐπιφανείας (S), τῆς παραγομένης ὑπὸ τῆς κινητῆς εὐθείας ([108]).

Πᾶσα τομὴ τῆς ἐπιφανείας (S) εἶναι ἔλλειψις (E), μὲ ἡμιάξονας

$$\alpha = \mu'\Gamma = \rho - h, \quad \beta = \mu'\Gamma' = \rho + h,$$

ὅπου h ἡ ἀπόστασις τῆς τομῆς (E) ἀπὸ τοῦ μέσου O τῆς AB ([109]).
Ἐπομένως:

$$\text{ἐμβαδὸν ἐλλείψεως (E)} = \pi\alpha\beta = \pi(\rho^2 - h^2).$$

Ἡ ἀντίστοιχος τῆς (E) τομὴ (K) τῆς σφαίρας ἔχει ἀκτῖνα $\sqrt{\rho^2 - h^2}$. Ἄρα:

$$\text{ἐμβαδὸν περιφερείας (K)} = \pi(\rho^2 - h^2),$$

ἤτοι αἱ τομαὶ (E) καὶ (K) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἐγγραφὴ καὶ θέσις

Θεώρημα 768

1936. Εἰς πᾶν ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα, δύναται νὰ ἐγγραφῇ καὶ νὰ περιγραφῇ κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς.

Πράγματι, εἰς ἑκάστην τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος δύνανται νὰ ἐγγραφοῦν ἢ νὰ περιγραφοῦν περιφέρειαι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Οἱ κύλινδροι μὲ ὁδηγὸν τὴν μίαν τῶν περιφερειῶν τούτων καὶ γενετείρας παραλλήλους πρὸς τὰς παραπλεύρους τοῦ πρίσματος ἀκμὰς εἶναι προφανῶς οἱ ἐν τῇ ἐκφωνήσει ἀναφερόμενοι.

Θεώρημα 768—I

1937. Δοθέντων τριῶν ἐπιπέδων, τεμνομένων ἀνὰ δύο καὶ παραλλήλων πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ὑπάρχουν τέσσαρες κυκλικοὶ κύλινδροι ἐφαπτόμενοι αὐτῶν.

Πράγματι, τὰ τρία ταῦτα ἐπίπεδα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς αἱ παράπλευροι ἕδραι ἑνὸς ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, μὲ βάσιν

---

108. Σημ. μετ. Ἐπειδὴ οἱ ἀντίστοιχοι στοιχειώδεις ἰσοϋψεῖς κύλινδροι θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ τὰ ἀντίστοιχα ὅρια ὁλοκληρώσεως τὰ αὐτὰ O ... 2ρ.

109. Σημ. μετ. Ἐπειδὴ ἡ τομὴ αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ εἰς σταθερὸν σημεῖον M καὶ ἡ καμπύλη (E) (σχ. 1287 б· τὸ σημεῖον μ' ἐπὶ τῆς ΔΓ' εἶναι μ) θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γραφομένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΔΒΓ ὑπὸ τῆς προβολῆς μ τοῦ M ἐπ' αὐτό. Ἀλλὰ τὸ μῆκος ΔΓ' εἶναι σταθερὸν (ἴσον πρὸς 2ρ, ἕνεκα τοῦ ἰσοσκελοῦς ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΓ Γ), τὸ σημεῖον μ σταθερὸν ἐπίσης σημεῖον ἐπ' αὐτοῦ—καὶ κατὰ στοιχειώδη κ. σιν τῆς Ἀν. Γεωμετρίας, τὸ σημεῖον μ θὰ γράφει ἔλλειψιν μὲ ἡμιάξονας

$$\alpha = \mu\Gamma' = M\mu = \mu\Gamma, \quad \beta = \mu\Delta = M\mu = \mu'\Gamma',$$

ὅπου μ' ἡ προβολὴ τοῦ ἐπὶ τὴν ΓΓ.

Ἄρα: $\alpha + \beta = \mu'\Gamma + \mu'\Gamma' = \Gamma\Gamma' = 2\rho.$

κάθετον τομὴν (Κ) τῶν τριῶν ἐπιπέδων. Οἱ κύλινδροι μὲ ὁδηγοὺς τὰς τέσσαρας περιφερείας, αἵτινες ἐγγράφονται εἰς τὸ τρίγωνον (Κ), καὶ γενετείρας παραλλήλους πρὸς τὴν κοινὴν διεύθυνσιν τῶν δοθέντων ἐπιπέδων, εἶναι προφανῶς οἱ ἐν τῇ ἐκφωνήσει ἀναφερόμενοι.

Θεώρημα 769

1938. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον γωνίαν ἐγγράφεται καὶ περιγράφεται κῶνος ἐκ περιστροφῆς.

Διὰ τὸ πρῶτον πρόβλημα, ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ ἡ κοινὴ τομὴ ΚΙ τῶν διχοτομούντων ἐπιπέδων τὰς διέδρους τῆς γωνίας Κ καὶ νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ΑΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΙ. Ἡ ἐγγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἡ ὁδηγὸς τοῦ ζητουμένου κώνου μὲ κορυφὴν Κ.

Διὰ τὸ δεύτερον, λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ἴσα μήκη ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ καὶ περιγράφομεν περιφέρειαν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Αὐτὴ εἶναι ἡ ὁδηγὸς τοῦ ζητουμένου περιγεγραμμένου κώνου μὲ κορυφὴν Κ.

Θεώρημα 770

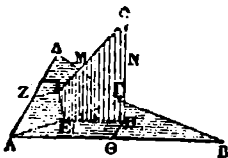
1939. Διὰ τριῶν εὐθειῶν διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, διέρχονται τέσσαρες κῶνοι ἐκ περιστροφῆς μὲ δύο χώνας ἕκαστος.

Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι μετὰ τῶν προεκτάσεών των σχηματίζουν, ἀνὰ δύο, τρία ἐπίπεδα καὶ ὀκτὼ στερεὰς γωνίας, κατὰ κορυφὴν ἀνὰ δύο. Οἱ περιγεγραμμένοι κῶνοι μὲ δύο χώνας εἰς ἕκαστον ζεῦγος κατὰ κορυφὴν τριέδρων εἶναι οἱ ἐν τῇ ἐκφωνήσει ἀναφερόμενοι.

1940. *Παρατήρησις.* Πλεῖστα τῶν θεωρημάτων ἐπὶ τῶν τριγώνων ἔχουν τὰ ἀνάλογά των εἰς τὰ τρίεδρα. *Ἡ περιφέρεια τῶν ἐννέα σημείων* λ. χ. εἰς τρίγωνον ἀντιστοιχεῖ εἰς κῶνον διερχόμενον διὰ ἐννέα ὡρισμένων εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τοῦ τριέδρου.

Θεώρημα 771

1941. Διὰ τεσσάρων σημείων Α, Β, Γ, Δ μὴ κειμένων ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, διέρχεται σφαῖρα καὶ μία μόνον.



Σχ. 1239

Τὰ δοθέντα σημεῖα ὁρίζουν δύο τρίγωνα, ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ. Διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ, Θ, μέσων τῶν διὰ τοῦ Α πλευρῶν τῶν τριγώνων τούτων, φέρομεν τὰς ΕΗ, ΘΗ καὶ ΕΙ, ΖΙ καθέτους ἐπ' αὐτὰς καὶ εἰς τὰ ἀντίστοιχα ἐπίπεδα κειμένας, ὡς καὶ τὰς εὐθείας ΗΝ, ΙΜ καθέτους ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ταῦτα. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Η καὶ Ι εἶναι τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, αἱ ἀχθεῖσαι τελευταῖαι κάθετοι εἶναι οἱ τόποι τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν διερχομένων διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ καὶ Α, Γ, Δ, ἀντιστοίχως.

Οἱ τόποι οὗτοι τέμνονται εἰς σημεῖον Ο. Πράγματι, τὸ ἐπίπεδον ΙΕΗ εἶναι προφανῶς κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὰ δι' αὐτῆς διερχόμενα ἐπίπεδα ΑΓΒ καὶ ΑΓΔ. Περιέχει ἑπομένως τὰς ἐπ' αὐτὰ καθέτους ΗΝ καὶ ΙΜ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι εὐθεῖαι αὗται τέμνονται—ἄλλως τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ θὰ ἔκειντο ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ — ἕπεται ὅτι τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ διερχομένης σφαίρας.

2) Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΗΝ εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τὰ Α, Β, Γ καὶ ἡ εὐθεῖα ΙΜ ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσων ἀπεχόντων ἀπὸ τὰ Α, Γ, Δ, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Ο εἶναι τὸ μόνον δι' ὃ ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ.

Ἐπομένως...

1942. Παρατηρήσεις. 1) Τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς κορυφαὶ τετραέδρου. Ἄρα: *Εἰς τὸ τυχὸν τετράεδρον περιγράφεται σφαῖρα καὶ μίαν μόνον.*

2) Αἱ ἀνάλογοι τῶν ΗΝ καὶ ΙΜ εὐθειῶν, αἱ ἀγόμεναι ἐπὶ τὰς ἄλλας ἕδρας τοῦ τετραέδρου, διέρχονται διὰ τοῦ ἰδίου σημείου Ο. Ἐπομένως:

Εἰς πᾶν τετράεδρον, αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας εἰς τὰ κέντρα τῶν περιγεγραμμένων εἰς αὐτὰς περιφερειῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Θεώρημα 772

1943. Εἰς πᾶν τετράεδρον ἐγγράφεται σφαῖρα.

Τὸ κέντρον ταύτης εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἓξ διχοτομούντων ἐπιπέδων τὰς διέδρους τοῦ τετραέδρου (§ 1833).

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦτο ἴσον ἀπέχει τῶν ἓξ ἑδρῶν, ἡ σφαῖρα μὲ κέντρον αὐτὸ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασίν του ἀπὸ τῆς τυχούσης ἕδρας θὰ ἐφάπτεται καὶ τῶν ἓξ ἑδρῶν.

Θεώρημα 772—I

1943 α. Ἐὰν εἰς τετράεδρον τὰ ἀθροίσματα ἀντικειμένων ἀκμῶν εἶναι τὰ αὐτά, αἱ ἐγγεγραμμέναι περιφέρειαι εἰς τὰς ἓξ ἕδρας ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτήν, ἐφαπτομένην τῶν ἓξ ἀκμῶν, σφαῖραν. (*A. d. Gerg.*, τόμ. V, 1814 - 15, σ. 304, πρόβλημα II, J. - B. Durrande).

Ἐπειδή, λόγῳ τῆς τεθείσης συνθήκης, αἱ περιφέρειαι αὗται ἐφάπτονται, ἀνὰ δύο, ἑκάστης ἀκμῆς εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον - αἱ κάθετοι ἑπομένως εἰς τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους ἕδρας τέμνονται ἀνὰ δύο, κλπ.

Θεώρημα 773

1944. Δύο σφαῖραι δύνανται νὰ ἔχουν πρὸς ἀλλήλας πέντε διαφόρους θέσεις. Δι' ἑκάστην θέσιν, αἱ συνθῆκαι διὰ τὰς ἀκτῖνας καὶ τὴν διάκεντρον εἶναι αἱ ἴδιαι, ὡς καὶ διὰ δύο περιφερείας.

Πράγματι, διὰ περιστροφῆς δύο περιφερειῶν, εἰς μίαν τυχοῦσαν θέσιν αὐτῶν, περὶ τὴν διάκεντρον, παράγονται δύο σφαῖραι εἰς ἀντίστοιχον θέσιν ἐκείνης τῶν δύο περιφερειῶν κείμεναι.

Θεώρημα 774

1945. Ἐὰν τρεῖς σφαῖραι τέμνωνται ἀνὰ δύο, τὰ ἐπίπεδα τομῆς διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καθέτου ἐπὶ τὸ διακεντρικὸν τῶν τριῶν σφαιρῶν ἐπίπεδον.

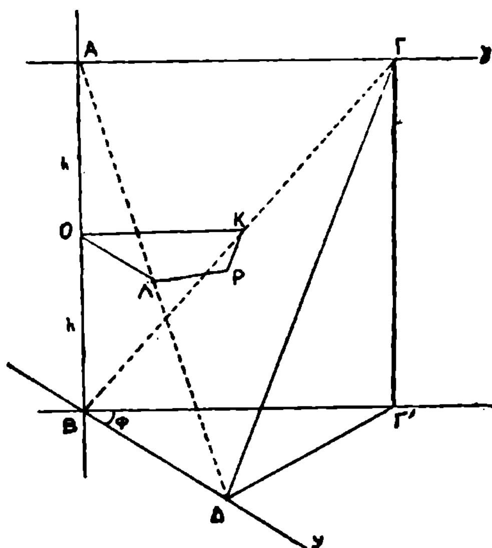
Πράγματι, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο Π τέμνει τὰς τρεῖς σφαίρας κατὰ τρεῖς μεγίστους κύκλους αὐτῶν καὶ τῶν ὁποίων αἱ κοιναὶ χορδαὶ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ρ. Ἐὰν δὲ διὰ τῶν τριῶν χορδῶν φέρωμεν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὸ διακεντρικὸν ἐπίπεδον, λαμβάνομεν τὰ τρία ἐπίπεδα τομῆς τῶν σφαιρῶν· ταῦτα θὰ τέμνωνται κατὰ τὴν διὰ τοῦ Ρ κάθετον εὐθεῖαν ἐπὶ τὸ Π.

Παρατήρησις. Τὸ κοινὸν σημεῖον Ρ τῶν τριῶν χορδῶν εἶναι τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν περιφερειῶν. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δὲν εἶναι παρὰ εἰδικὴ περίπτωσις ἑνὸς γενικωτέρου. (G., n° 839, 4°).

Θεώρημα 774—I

***1945** α.* Ἔστωσαν ΑΧ, ΒΥ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι, ΑΒ ἡ κοινὴ αὐτῶν κάθετος καὶ ΓΔ εὐθύγραμμον τμῆμα σταθεροῦ μήκους α, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα ὀλισθαίνουν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΧ, ΒΥ. Δείξατε ὅτι ἡ περιγεγραμμένη σφαῖρα εἰς τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ διατηρεῖ πάντοτε σταθερὰν τὴν ἀκτῖνα.

Ἔστω Ρ τὸ κέντρον τῆς ἐν λόγῳ σφαίρας, Κ, Λ τὰ μέσα τῶν



Σχ. 1238 α

ΒΓ, ΑΔ καὶ κέντρα τῶν περὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ περιγεγραμμένων περιφερειῶν. Κατὰ τὴν § 942, 2, τὸ σημεῖον Ρ εἶναι τομὴ τῶν καθέτων ΡΚ, ΡΛ ἐπὶ τὰς ἕδρας ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ.

Θεωρήσωμεν τὸ τετράπλευρον ΡΚΟΛ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον προφανῶς πρὸς τὰς ΑΧ, ΒΥ καὶ τέμνον τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Ο. Ἂν Γ' εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Γ

ἐπὶ τὸ διὰ τῆς Βy παράλληλον πρὸς τὴν ΑΧ ἐπίπεδον (Π), ἐπειδὴ $ΟΚ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{Α'Γ'}{2}$, $ΟΛ = \frac{ΒΔ}{2}$, τὰ τρίγωνα ΔΒΓ' καὶ ΛΟΚ εἶναι ὅμοια καὶ $ΛΚ = \frac{1}{2} ΔΓ' = \frac{1}{2}\sqrt{α^2 - 4h^2}$, ὅπου $2h = ΑΒ$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΔΒΓ' μεταβάλλεται εἰς τρόπον, ὥστε ἡ μὲν γωνία Β αὐτοῦ νὰ μένῃ ἀμετάβλητος, ἡ δὲ ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰ ΔΓ' νὰ διατηρῇ σταθερὸν μῆκος, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 702 α, ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας μένει ἐπίσης σταθερὰ $= λ$. Τὸ αὐτὸ ἑπομένως θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ ΔΒΓ' τρίγωνον ΛΟΚ καὶ διὰ τὸ ὁποῖον ἡ περιγεγραμμένη εἰς αὐτὸ περιφέρεια διέρχεται διὰ τοῦ Ρ — ἀφοῦ τὸ τετράπλευρον ΟΚΡΛ εἶναι δισορθογώνιον.

Εἶναι ἄρα : $ΟΡ = λ$

καὶ R = ἀκτὶς τῆς σφαίρας $ΑΒΓΔ = ΡΑ = \sqrt{λ^2 + h^2}$,

δηλαδὴ σταθερά.

Παρατήρησις. Ἡ περιβάλλουσα τῶν ἴσων τούτων σφαιρῶν εἶναι *σπεῖρα*, ἔχουσα ἀκτῖνα τοῦ γενήτορος κύκλου ἴσην ἐπίσης πρὸς R.

1945 β. Σημείωσις. Θεωρήσωμεν τὴν πλέον ἐνδιαφέρουσαν περίπτωσιν, καθ' ἣν αἱ εὐθεῖαι ΑΧ, ΒΥ εἶναι ὀρθογώνιοι καὶ $ΓΔ = (ΑΒ) . \sqrt{2}$ (παρβ. σημείωσιν εἰς § 1935 β).

Ἕκαστον σημεῖον τῆς κινητῆς εὐθείας ΓΔ γράφει ἔλλειψιν ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ τῶν ΑΧ, ΒΥ καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἄθροισμα τῶν ἀξόνων εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς ΑΒ.

Ἡ παραγομένη ἐπιφάνεια ἔχει πολὺ τὸ ἐνδιαφέρον. (*Exercices de Géom. descriptive*, 4η ἔκδ., σ. 883 — 888, nos 1232, x, y, z).

Τὸ *περίγραμμα* (contour apparent) τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ παντὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ εἶναι *ἀστροειδὴς* (§ 793 α)· ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΧ ἢ ΒΥ *ζεῦγος εὐθειῶν* καὶ ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ καὶ πρὸς τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τὴν γωνίαν τῶν εὐθειῶν ΑΧ, ΒΥ, *ἰσόπλευρος ὑπερβολή*.

Ὁ ὄγκος ὁ περιεχόμενος ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης ὑπὸ τῆς εὐθείας ΓΔ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν τῆς σφαίρας μὲ διάμετρον ΑΒ (§ 1935 β).

2) Ἡ διατύπωσις τοῦ θεωρήματος τῆς 1945 α εἶναι τοῦ Otto Böcklen (1861) (*Mathesis*, 1901, σ. 272, nº 23). Οὗτος δίδει καὶ τὴν ἀκόλουθον πρότασιν :

1) *Ἐὰν εἰς δύο σταθερὰ σημεῖα* Α, Β *δοθείσης σφαίρας θεωρήσωμεν χορδὰς* ΑΓ, ΒΔ, *καθέτους ἐπὶ τὴν* ΑΒ *καὶ σχηματιζούσας σταθερὰν γωνίαν πρὸς ἀλλήλας ἀλλὰ μεταβλητῶν διευθύνσεων [εἰς τὰ ἀντίστοιχα ἐπίπεδά των], ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων* Γ, Δ *αὐτῶν παραμένει σταθερά.*

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ γράφουν ἐπὶ τῆς σφαίρας κύκλους ἴσους, παραλλήλους, καὶ κινοῦνται ἐπ' αὐτῶν μὲ τὴν ἰδίαν ταχύτητα. Ἑπομένως, ἡ εὐθεῖα ΓΔ παράγει κατὰ τὴν κίνησιν ὑπερβολοειδὲς ἐκ περιστροφῆς.

Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν καὶ τρίτην, ἀνάλογον τῶν προηγουμένων, πρότασιν :

2) *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι* ΓΧ, ΔΥ *στρέφωνται περὶ δύο σταθερὰ σημεῖα* Γ *καὶ* Δ *εἰς τρόπον, ὥστε ἡ γωνία των νὰ παραμένῃ σταθερά, καθὼς καὶ ἡ*

ἐλαχίστη αὐτῶν ἀπόστασις AB, *ἡ σφαῖρα* ΑΒΓΔ *θὰ διατηρῇ πάντοτε σταθερὰν ἀκτῖνα.*

Παρατήρησις. Ἔστω ΓΓ′ μῆκος τυχούσης διευθύνσεως ἴσον πρὸς τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν $AB = 2h$ (Σχ. 1238 α). Ἐκ τοῦ σχήματος γίνεται φανερὸν ὅτι ἂν ΓΧ εἶναι τυχοῦσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΓ′, τὸ διὰ τῆς (σταθερᾶς) ΓΓ′ ἀγόμενον ἐπίπεδον (Π) καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν (σταθερὰν) ΓΓ′ εἶναι παράλληλον πρὸς πάσας τὰς εὐθείας ΓΧ.

Ἔστω Γ′Β παράλληλος τῆς ΓΧ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ καὶ ΔΥ εὐθεῖα αὐτοῦ σχηματίζουσα μετὰ τῆς Γ′Β γωνίαν φ. Ἐπειδὴ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν εὐθειῶν ΓΧ καὶ ΔΥ εἶναι προφανῶς $AB = 2h$ καὶ $\Delta\Gamma = \alpha$, τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι τὸ τῆς προτάσεως (§ 1945 α).

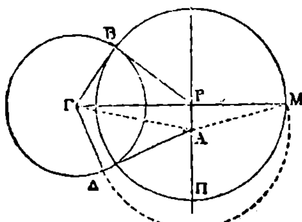
Ὅταν ἡ εὐθεῖα ΑΓΧ στρέφεται περὶ τὸ Β διατηρουμένη κάθετος πάντοτε ἐπὶ τὴν ΓΓ′, τὸ σημεῖον Β γράφει κ. τόξον διὰ τῶν Δ καὶ Γ′ δεχόμενον γωνίαν φ, τὸ δὲ κάθετον τμῆμα $AB = 2h$ ἐπὶ τὸ (Π) γράφει τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τμήματος κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

3) Μολονότι, εἰς τὰς τρεῖς προγουμένας προτάσεις, ἡ εὐθεῖα ΓΔ γράφει ἑκάστοτε διαφόρους ἐπιφανείας, ἡ ἀπόδειξις αὐτῶν παραμένει πάντοτε ἡ ἰδία.

Θεώρημα 775

1946. **Δίδονται σφαῖρα (Γ) καὶ ἐπίπεδον (Π). Δείξατε ὅτι αἱ σφαῖραι μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Α τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἀκτῖνας ἴσας πρὸς τὰς ἐκ τῶν σημείων τούτων ἐφαπτομένας τῆς σφαίρας διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου.** (*N. A.*, 1868, σ. 42, Vittorio Sanndi).

Ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν μεσημβρινὴν τομὴν τοῦ σχήματος διὰ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς καθέτου ΓΡ ἐκ τοῦ κέντρου Γ τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π). Ἐπειδή, ἐὰν τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθές, τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν σφαιρῶν (Α) θὰ εὑρίσκεται, λόγῳ συμμετρίας, ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης.



Σχ. 1239.

Ἂς λάβωμεν λοιπὸν ΡΜ=ΡΒ καὶ ἂς δείξωμεν ὅτι διὰ τυχοῦσαν ἐφαπτομένην ΑΔ θὰ εἶναι

$$AM = A\Delta.$$

Ἂς θέσωμεν $\Gamma P = \alpha$, $\Gamma B = \rho$· θὰ ἔχωμεν

$$PM^2 = PB^2 = \alpha^2 - \rho^2 \quad \text{καὶ} \quad PM^2 + PA^2 = \alpha^2 + PA^2 - \rho^2,$$

ἢ

$$MA^2 = \Gamma A^2 - \rho^2 = A\Delta^2.$$

Εἶναι ἑπομένως $MA = \Delta A$ καὶ ἡ σφαῖρα (Α) μὲ ἀκτῖνα ΑΔ διέρχεται διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου Μ.

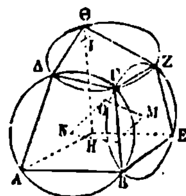
Παρατηρήσεις. 1) Ἡ εὐθεῖα ΑΡ εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῆς περιφερείας ΓΔΒ καὶ τοῦ σημείου - περιφερείας $(M, \rho = 0)$, τὸ δὲ ἐπίπεδον (Π) τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον τῆς σφαίρας (Γ) καὶ τοῦ σημείου Μ.

2) Αἱ σφαῖραι (Α) διέρχονται φυσικά καὶ διὰ τοῦ συμμετρικοῦ Μ' τοῦ σημείου Μ πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

Θεώρημα 776

1947. **Ἓν ἑξάεδρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς σφαῖραν ὅταν αἱ ἕδραι του εἶναι ἐγγράψιμα τετράπλευρα.**

Θεωρήσωμεν δύο τῶν περιφερειῶν τῶν ἑδρῶν, τὰς ΑΒΓΔ καὶ ΕΒΓΖ μὲ κέντρα Μ, Ν ἀντιστοίχως. Αἱ κάθετοι εἰς τὰ Μ, Ν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓΔ καὶ ΒΓΖΕ κεῖνται ἐπὶ τοῦ εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ καὶ καθέτως ἐπ' αὐτὴν ἀγομένου ἐπιπέδου καὶ τέμνονται προφανῶς εἰς τὸ κέντρον Ο σφαίρας (Σ), διερχομένης διὰ τῶν δύο θεωρουμένων περιφερειῶν (§ 1941).



Σχ. 1240.

Ἡ τομὴ τῆς σφαίρας ταύτης καὶ τῆς ἕδρας ΔΓΖ, θὰ πρέπει νὰ περιέχῃ ἀναγκαίως καὶ τὴν κορυφὴν Θ ἐπὶ τῆς ἕδρας ταύτης, ὡς τετάρτην κορυφὴν ἐγγραψίμου τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου τρεῖς κορυφαὶ κεῖνται ἤδη ἐπὶ τῆς τομῆς ταύτης. Ἀναλόγως, καὶ ἡ κορυφὴ Η θὰ πρέπει ὁμοίως νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς τομῆς τῆς σφαίρας (Σ) καὶ τῆς ἕδρας ΑΒΕ.

Ἤτοι, ἡ σφαῖρα (Σ) διέρχεται καὶ διὰ τῶν ὀκτὼ κορυφῶν τοῦ ἑξαέδρου καὶ τοῦτο εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτήν.

Θεώρημα 776—Ι

1947 α. Ἐὰν ἐκ τεσσάρων σφαιρῶν ἑκάστη ἐφάπτεται τῶν τριῶν ἄλλων, τὰ ἓξ σημεῖα ἐπαφῆς κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας.

(*A. d. Gergonne*, 1814 - 15, σ. 32 καὶ 301, J. - B. Durrande).
Τὸ θεώρημα τοῦτο δὲν διαφέρει τοῦ τῆς § 1943 α.

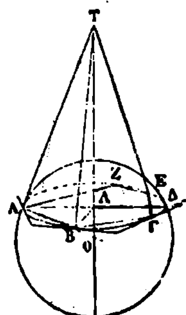
Θεώρημα 777

1948. **Ἐὰν ἐπίπεδον πολύγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς σφαῖραν Ο, τὰ εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς σφαίρας τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.**

Ἔστω ΑΒΓΖ τὸ πολύγωνον καὶ Λ τὸ κέντρον τῆς τομῆς τῆς σφαίρας (Ο) διὰ τοῦ ἐπιπέδου του. Ἐὰν Τ εἶναι ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ΟΛ καὶ τοῦ εἰς τὸ Α ἐφαπτομένου αὐτῆς ἐπιπέδου, τὰ σημεῖα Ο, Τ, Α κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ διὰ τῆς ΟΤ μεσημβρινοῦ ἐπιπέδου. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΤ λαμβάνομεν

$$\text{ΟΤ}\,.\,\text{ΟΛ} = \text{ΟΑ}^2 = \text{R}^2$$

ἤ
$$\text{ΟΤ} = \frac{\text{ΟΑ}^2}{\text{ΟΛ}} = \text{σταθ.}$$



Σχ. 1241.

Εἶναι δηλ. ἡ ἀπόστασις ΟΤ σταθερά, οἱασδήποτε οὔσης τῆς κορυφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐπιπέδου.

Διέρχονται ἐπομένως τὰ εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα ἐφαπτόμενα τῆς σφαίρας ἐπίπεδα διὰ τοῦ σημείου Τ.

Θεώρημα 777—I

1949. Ἐὰν ἐπίπεδον πολύγωνον εἶναι περιγεγραμμένον εἰς σφαῖραν, τὰ διὰ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς σφαίρας διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἐπειδὴ ταῦτα εἶναι τὰ εἰς τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ..., τοῦ πολυγώνου τῶν σημείων ἐπαφῆς καὶ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν, ἀγόμενα ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα (§ 1948).

Θεώρημα 778

1950. Ἐὰν αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ ἑνὸς ἐγγεγραμμένου εἰς σφαῖραν ὀκταέδρου κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ τρεῖς διαγώνιοι τοῦ στερεοῦ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Τὰ εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ ὀκταέδρου τούτου ἐφαπτόμενα τῆς σφαίρας ἐπίπεδα σχηματίζουν ἑξάεδρον περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν καὶ τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι, ἀνὰ τέσσαρες, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 32).

Θεώρημα 778—I

1951. Τὰ ἐκ σημείου Τ ἀγόμενα ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα σφαίρας ἐφάπτονται αὐτῆς κατὰ τὰς κορυφὰς ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν ἐπιπέδου πολυγώνου.

Θεώρημα 778—II

1952. Ἡ καμπύλη ἐπαφῆς σφαίρας καὶ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κώνου εἶναι περιφέρεια.

Θεώρημα 778—III

1952 α. 1) Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ὀκταέδρου εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (Ο), τὰ ὀρθόκεντρα τῶν ἑδρῶν του κεῖνται ἐπὶ μιᾶς σφαίρας (Σ). (S. Steiner).

(Βλ. 7ην ἔκδ. τῶν Θεωρημάτων καὶ Προβλημάτων τῆς Στοιχ. Γεωμετρίας τοῦ Catalan, *Théoréme* XLIV, σ. 406 ἢ *Mathesis*, 1904, σ. 258, λύσις τοῦ Abramescu).

2) Ἐὰν τὸ ἐν λόγῳ ὀκτάεδρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς σφαῖραν κέντρου ω, ἡ σφαῖρα (Σ) διέρχεται καὶ διὰ τῶν κέντρων βάρους τῶν ἑδρῶν, τὸ δὲ κέντρον της διαιρεῖ τὴν ἀπόστασιν Οω εἰς λόγον $\frac{1}{2}$.

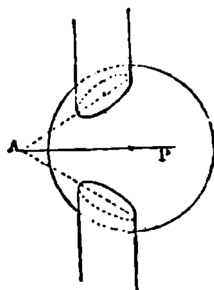
(J. Neuberg, *Mathesis*, 1904, σ. 258, ζήτ. 1479). Διὰ τὰς λύσεις, (βλ. § 2068 λ, μ, ν).

Θεώρημα 779

1953. Ἐὰν εἷς κύλινδρος εἰσέρχεται ἐντὸς σφαίρας διὰ κύκλου, ἐξέρχεται ταύτης ἐπίσης διὰ κύκλου.

Θεωροῦντες τὴν τομὴν τοῦ σχήματος δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἰσόδου καὶ

παραλλήλου πρὸς τὰς γενετείρας τοῦ κυλίνδρου, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ καμπύλαι εἰσόδου καὶ ἐξόδου εἶναι προφανῶς συμμετρικαὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίστου κύκλου, τὸ κάθετον πρὸς τὸ ἀχθὲν καὶ τὰς γενετείρας τοῦ κυλίνδρου. Εἶναι δηλ. ἡ καμπύλη ἐξόδου ἐπίσης περιφέρεια.



Σχ. 1242.

Θεώρημα 780

1954. **Ἡ ἀντιπαράλληλος πρὸς τὴν βάσιν πλαγίου κυκλικοῦ κώνου τομὴ αὐτοῦ εἶναι περιφέρεια.**

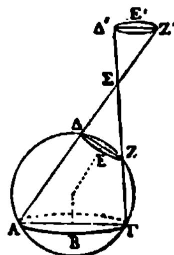
Ἔστω ΣΑΒΓ ὁ κῶνος καὶ ΔΕΖ ἡ ἐν λόγῳ τομή· ἡ γωνία ΣΔΖ = Γ, ΣΖΔ = Α, τὸ τετράπλευρον ἑπομένως ΑΓΖΔ ἐγγράψιμον καὶ

$$\frac{ΣΑ}{ΣΓ} = \frac{ΣΖ}{ΣΔ}.$$

Ἐπὶ τῆς δευτέρας χώνης τοῦ κώνου ἂς λάβωμεν τμήματα ΣΖ′ = ΣΖ, ΣΔ′ = ΣΔ. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{ΣΑ}{ΣΓ} = \frac{ΣΖ'}{ΣΔ'}.$$

καὶ ἡ τομὴ Δ′Ε′Ζ′ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒΓ καὶ ἑπομένως κυκλική. Ἐπειδὴ δὲ αἱ τομαὶ ΔΕΖ, Δ′Ε′Ζ′ εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ διὰ τῆς κορυφῆς Σ ἐπίπεδον, τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΑΣΓ, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ τομὴ ΔΕΖ θὰ εἶναι ἐπίσης κυκλική.



Σχ. 1243.

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ βάσις ΑΒΓ μετὰ τυχούσης ἀντιπαραλλήλου πρὸς αὐτὴν τομῆς ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν.

2) Τὸ θεώρημα ἀποδεικνύεται κατὰ πολλοὺς τρόπους, λ. χ. καὶ ὡς συνέπεια τοῦ ἑπομένου θεωρήματος. Κρίνομεν ὅμως ἁπλουστάτην τὴν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν.

Σημείωσις. Βλέπε καὶ *Cosmographie,* ὑπὸ F. J. n° 70.

Θεώρημα 781

1955. **Ἐὰν εἷς κυκλικὸς κῶνος εἰσέρχεται εἰς σφαῖραν διὰ περιφερείας, ἐξέρχεται ταύτης ἐπίσης διὰ περιφερείας.**

Ἔστω ΑΒΓ ὁ κῶνος μὲ βάσιν τὴν περιφέρειαν ΑΜΒ· θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ καμπύλη ἐξόδου ΔΝΕ εἶναι περιφέρεια.

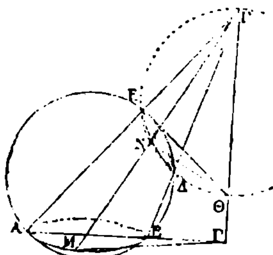
Ἐκ τῆς κορυφῆς Γ φέρομεν κάθετον ΓΡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, ὡς καὶ διὰ τοῦ Ρ διάμετρον τῆς βάσεως ΑΒΡ, εἰς δὲ τὸ ἐπίπεδον ΑΓΡ φέρομεν τὴν ΕΘ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΕ.

Ἔστω τέλος ΓΜ τυχοῦσα γενέτειρα τοῦ κώνου καὶ Ν τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς της μετὰ τῆς σφαίρας.

1) Θὰ ἔχωμεν:

$$ΓΜ . ΓΝ = ΓΑ . ΓΕ = ΓΡ . ΓΘ,$$

ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΑΡ, ΓΘΕ. Εἶναι ἐπομένως τὰ τρίγωνα ΓΜΡ, ΓΘΝ ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν κοινὴν καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους· ἀλλ' εἶναι ΓΡΜ = 90°, ἄρα καὶ ΓΝΘ = 90°.


Σχ. 1244.

2) Ἀνήκουν κατὰ ταῦτα τὰ σημεῖα Ε, Ν, Δ εἰς σφαῖραν (Σ) διαμέτρου ΓΘ καὶ κατὰ συνέπειαν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιφερείας, καθ' ἣν τέμνονται ἡ δοθεῖσα σφαῖρα καὶ ἡ σφαῖρα αὕτη (Σ).

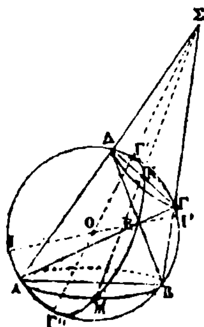
Παρατήρησις. Ἐπειδὴ εἶναι ἐπίσης: ΓΕ . ΓΑ = ΓΒ . ΓΔ, ἡ περιφέρεια ΕΝΔ εἶναι ἀντιπαράλληλος τομὴ κώνου, τοῦ ΓΑΜΒ. Ὥστε καὶ πάλιν:

Αἱ ἀντιπαράλληλοι πρὸς τὴν βάσιν κυκλικοῦ κώνου τομαὶ αὐτοῦ εἶναι περιφέρειαι.

Θεώρημα 782

1956. Διὰ δύο περιφερειῶν (ΑΒ), (ΓΔ) σφαίρας διέρχονται δύο κῶνοι, ἔχοντες τὰς περιφερείας ταύτας ὡς παραλλήλους ἢ ἀντιπαραλλήλους τομάς.

Διὰ τῶν κέντρων τῆς σφαίρας καὶ τῶν δύο περιφερειῶν φέρομεν ἐπίπεδον, κάθετον, ὡς γνωστόν, ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν δύο περιφερειῶν. Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο· αἱ ΑΒ, ΓΔ εἶναι διάμετροι τῶν περιφερειῶν.


Σχ. 1245.

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔΣ, ΒΓΣ καὶ ΑΡΓ, ΒΡΔ. Τὰ σημεῖα Σ καὶ Ρ εἶναι αἱ κορυφαὶ τῶν ἐν τῇ ἐκφωνήσει κώνων.

Πράγματι, ὁ κῶνος ΣΑΒ λ. χ., ὁ εἰσερχόμενος εἰς τὴν σφαῖραν διὰ τῆς περιφερείας ΑΜΒ, θὰ ἐξέρχεται αὐτῆς κατὰ περιφέρειαν (§ 1955), ἔχουσαν διάμετρον ΓΔ καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΣΑΒ. Συμπίπτει ἐπομένως ἡ περιφέρεια αὕτη ἐξόδου πρὸς τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν (ΓΔ).

1957. *Παρατήρησις.* Πᾶσα γενέτειρα ΣΝΜ, τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς σημεῖα ἀντιομόλογα, ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΑΜ, ΔΝ εἶναι ἀντιπαράλληλοι. Καὶ ἀπ' εὐθείας ἄλλωστε ἀποδεικνύεται τοῦτο, ἀφοῦ ΣΜ . ΣΝ = ΣΑ . ΣΔ = δύναμις τοῦ Σ πρὸς τὴν σφαῖραν.

Δυνάμεθα ἀκόμη νὰ εἴπωμεν: τὸ ἐπίπεδον ΑΣΜ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ περιφέρειαν, εἰς ἣν εἶναι ἐγγεγραμμένον τὸ τετράπλευρον ΑΜΝΔ· εἶναι ἄρα αἱ πλευραὶ ΑΜ, ΔΝ αὐτοῦ ἀντιπαράλληλοι.

Λαμβάνομεν, οὕτω, σημεῖα ἀντιομόλογα Μ, Ν, θεωροῦντες τὰ σημεῖα τομῆς τῆς σφαίρας καὶ τυχούσης γενετείρας ΣΝΜ. Διὰ

τὴν σπουδὴν τῶν περιφερειῶν τῶν γραφομένων ἐπὶ τῆς σφαίρας, χρησιμοποιοῦμεν τὰ *κέντρα ὁμοιότητος* Γ, Γ' καὶ Ι, Ι'. (Βλ. ἐπμ., § 1962).

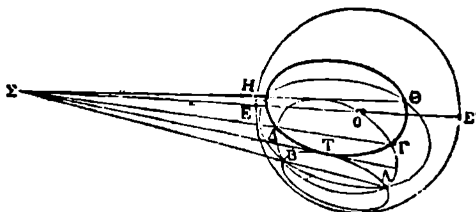
Θεώρημα 783

1958. Ἐὰν ἡ βάσις πυραμίδος εἶναι ἐγγράψιμον πολύγωνον, πᾶσα σφαῖρα (Σ) διερχομένη διὰ τῆς βάσεως τέμνει τὰς ἀκμὰς τῆς πυραμίδος κατὰ τὰς κορυφὰς ἐγγραψίμου ἐπίσης πολυγώνου.

Ἔστωσαν Α, Β, Γ... αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, Α', Β', Γ'... σημεῖα τομῆς τῆς σφαίρας (Σ) καὶ τῶν ἀκμῶν ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ... Τὰ σημεῖα ταῦτα ἀνήκουν εἰς τὴν καμπύλην ἐξόδου τοῦ κώνου (Σ — Α, Β, Γ...), μὲ βάσιν τὴν περιφέρειαν (ΑΒΓ...), καὶ κεῖνται ἑπομένως ἐπὶ περιφερείας (§ 1955).

Θεώρημα 784

1959. Θεωρήσωμεν τὰς περιφερείας σφαίρας, τὰς διερχομένας διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β αὐτῆς καὶ τεμνουσῶν δοθεῖσαν ἄλλην περιφέρειαν τῆς σφαίρας. Δείξατε ὅτι οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς σφαίρας,



Σχ. 1246.

οἱ διερχόμενοι διὰ τῶν σημείων τομῆς τῆς σταθερᾶς περιφερείας μετὰ τῶν μεταβλητῶν περιφερειῶν, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν διάμετρον.

Ἔστω ΓΔΘΗ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια, ΓΔ ἡ χορδὴ—τομὴ αὐτῆς μετὰ μιᾶς τῶν μεταβλητῶν περιφερειῶν.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ὡς κείμεναι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς δευτέρας διὰ περιφερείας, τέμνονται εἰς σημεῖον Σ.

1) Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι πᾶσα ἄλλη κοινὴ χορδὴ ΘΗ διέρχεται τοῦ σημείου Σ.

Ἕνεκα τῆς σφαίρας, ἢ τῆς περιφερείας ΑΒΓΔ, θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma A . \Sigma B = \Sigma\Gamma . \Sigma\Delta.$$

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΣΘ καὶ καλέσωμεν Η τὸ σημεῖον, καθ' ὃ αὕτη συναντᾷ τὴν περιφέρειαν ΒΑΘ καὶ Η' τὸ σημεῖον καθ' ὃ (ἔστω ὅτι) συναντᾷ τὴν περιφέρειαν ΔΓΘ. Θὰ ἔχωμεν:

$$\Sigma\Theta . \Sigma H = \Sigma A . \Sigma B = \Sigma\Gamma . \Sigma\Delta = \Sigma\Theta . \Sigma H';$$

Δηλ. τὰ σημεῖα Η καὶ Η' συμπίπτουν.

2) Συνδέομεν τὸ σημεῖον Σ μετὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διὰ τῆς εὐθείας ΣΕΟΕ'. Τὰ ἐπίπεδα, τὰ ἀγόμενα διὰ τῆς ΣΕΕ' καὶ ἑκάστης κοινῆς χορδῆς, δίδουν περιφερείας ΕΑΒΕ', ΕΔΓΕ', ΕΗΘΕ' διερχομένας φυσικὰ διὰ τῆς διαμέτρου ΕΕ' τῆς σφαίρας.

1960. Πόρισμα. *Ἐὰν εἰς σφαῖραν δύο περιφέρειαι αὐτῆς* ΑΤΒ, ΗΤΘ *ἐφάπτωνται, ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς* Σ *τῶν κοινῶν χορδῶν* ΑΒ, ΓΔ· *ὁ δὲ μέγιστος κύκλος* ΕΤΕ′ *ἐφάπτεται τῶν περιφερειῶν* ΑΤΒ *καὶ* ΓΤΔ.

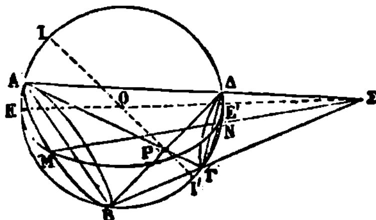
Θεώρημα 784—Ι

***1961.* Τὸ αὐτὸ θεώρημα (§ 1959), ὅταν τὰ σημεῖα Α, Β δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν.**

Ἔστω Σ τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα ΑΒ τέμνει τὸ ἐπίπεδον τοῦ δοθέντος κύκλου (Κ). Πᾶν ἐπίπεδον (Π) διὰ τῆς εὐθείας ΑΣΒ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ περιφέρειαν (Λ); ἡ δὲ τομὴ τοῦ (Π) καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ δοθέντος κύκλου διέρχεται διὰ τοῦ Σ καὶ εἶναι ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν κύκλων (Κ) καὶ (Λ). Ἄρα...

Θεώρημα 785

1962. Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν μιᾶς σφαίρας (Ο) ὁρίζονται δύο κέντρα ὁμοιότητος αὐτῶν. Οἱ μέγιστοι κύκλοι, οἱ διερχόμενοι διὰ τῶν τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου τῶν κέντρων τούτων, τέμνουν τὰς δοθείσας περιφερείας κατὰ ζεύγη ὁμολόγων σημείων, τοιαῦτα, ὥστε αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι αὐτὰ ἀνὰ δύο, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.



Σχ. 1247

Ἔστω Σ ἡ ἐξωτερικῶς τῆς σφαίρας κορυφὴ τοῦ κώνου τοῦ διερχομένου διὰ τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν. Τὰ σημεῖα τομῆς Ε, Ε′ τῆς σφαίρας (Ο) καὶ τῆς εὐθείας ΣΟ εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, τὰ ἐξωτερικὰ *κέντρα ὁμοιότητος* τῶν δύο περιφερειῶν.

Ἐπὶ παντὸς μεγίστου κύκλου διερχομένου διὰ τῆς εὐθείας ΕΕ′ ὁρίζονται σημεῖα ὁμόλογα. Πράγματι, ἡ τυχοῦσα γενέτειρα ΣΜΝ τοῦ κώνου τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς τὰ σημεῖα Μ, Ν, διὰ τὰ ὁποῖα

$$ΣΜ \,.\, ΣΝ = ΣΕ \,.\, ΣΕ',$$

καὶ ἑπομένως τὰ σημεῖα Ε, Μ, Ν, Ε′ ἀνήκουν εἰς μέγιστον τῆς σφαίρας κύκλον.

Ἀντιστρόφως. 1) Πᾶς μέγιστος κύκλος ΕΜΕ′ ὁρίζει δύο σημεῖα Μ, Ν, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ εὐθεῖα ΜΝ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Σ.

2) Αἱ χορδαὶ ΑΜ, ΔΝ εἶναι ἀντιπαράλληλοι (§ 1957).

Ἐὰν αἱ γενέτειραι ΣΑ, ΣΜ πλησιάζουν συνεχῶς πρὸς ἀλλήλας, αἱ ἀντιπαράλληλοι χορδαὶ ΑΜ, ΔΝ θὰ ἔχουν ὡς ὅρια τὰς ἐφαπτομένας τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν εἰς τὰ Μ καὶ Ν. Εἶναι, ἑπομένως, καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται ἀντιπαράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΣΝΜ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ Μ, Ν τοῦ μεγίστου κύκλου ΕΜΝΕ′ εἶναι ἀντιπαράλληλοι· τοῦτο ἄλλωστε συμβαίνει πάντοτε διὰ χορδὴν περιφερείας καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς.

3) Ἡ γωνία τῶν εἰς τὸ σημεῖον Μ ἐφαπτομένων εἶναι ἴση μὲ

τὴν τῶν εἰς τὸ Ν ἐφαπτομένων (§ 241). *Τέμνει, ἄρα, ὁ μέγιστος κύκλος τὰς δοθείσας περιφερείας κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν.*

Παρατήρησις. Ἡ διάμετρος ΙΟΡΙ′ ὁρίζει μετὰ τῆς σφαίρας τὰ *ἐσωτερικὰ κέντρα* Ι. Ι′ ὁμοιότητος τῶν δύο περιφερειῶν.

1962 α. Σημείωσις. Τὸ 1853 εἰς τὰ *N. A.*, σ. 113, ὁ A. Mannheim ἐδημοσίευσεν ὡραῖον ἄρθρον: *Lieu des centres des circonférences coupant sous des angles égaux trois circonférences données.*

Θεωρεῖ κατὰ πρῶτον δύο μικροὺς κύκλους τῆς σφαίρας, διατυπώνει τὰ θεωρήματα τῶν §§ 1956, 1959, 1962 καὶ μεταβαίνει ἀκολούθως ἐκ τῶν κύκλων τῆς σφαίρας εἰς τοὺς κύκλους ἐπιπέδου, τῇ βοηθείᾳ τῆς στερεογραφικῆς προβολῆς (§ 244).

Θεώρημα 785—I

1962 β. Αἱ τομαὶ κώνου καὶ κυλίνδρου, ἀμφοτέρων ἐκ περιστροφῆς, ἀνήκουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν σφαῖραν, ὅταν ὁ ἄξων τοῦ κώνου εἶναι γενέτειρα τοῦ κυλίνδρου.

(*Bulletin des Sciences Math. et Physiques élémentaires* τοῦ L. Gérard, 1898 - 99, n° 4, σ. 60, n° 464).

Θεώρημα 785—II

1962 γ. Σημεῖον Μ, εὑρισκόμενον ἀρχικῶς εἰς σημεῖον Α τοῦ ἰσημερινοῦ ἐπιπέδου σφαίρας (Ο), ἄρχεται κινούμενον, μετὰ σταθερᾶς γωνιώδους ταχύτητος, κατὰ μῆκος μεσημβρινοῦ ΑΡ τῆς ἐπιφανείας, ἐνῷ ταυτοχρόνως τὸ ἐπίπεδον ΑΡ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα ΟΡ μετὰ τῆς ἰδίας σταθερᾶς γωνιώδους ταχύτητος.

Δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ τῆς τροχιᾶς τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἰσημερινοῦ εἶναι περιφέρεια ἔχουσα διάμετρον τὴν ΑΟ.

Σχ. 1248.

Ἔστω μ ἡ ὁριζόντιος προβολὴ τοῦ κινητοῦ σημείου εἰς τὴν θέσιν Μ, POA_1 ἡ ἀντίστοιχος τοῦ Μ θέσις τοῦ μεσημβρινοῦ ἐπιπέδου. Ἐπειδὴ αἱ γωνιώδεις ταχύτητες εἶναι αἱ αὐταί, τὸ ἰσημερινὸν τόξον AA_1 εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον $A_1M = AN$ καὶ κατὰ συνέπειαν τὰ τρίγωνα ΜμΟ, ΑμΟ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν πλευρὰν μΟ κοινήν, τὴν πλευρὰν $MO = OA$ καὶ τὴν γωνίαν $AOA_1 = A_1OM = AON$.

Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον εἰς μ καὶ τὸ δεύτερον θὰ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον καὶ ὁ τόπος τοῦ σημείου μ θὰ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΟΑ.

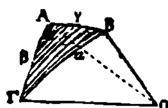
1962 δ. Σημείωσις. 1) Ἐπανευρίσκομεν τὸ γνωστὸν θέμα τοῦ σχεδίου τῶν *Exercices de Géométrie descriptive*, n° 1153, ἐπὶ τοῦ *προβλήματος τοῦ Viviani.*

Ἡ προβολὴ τῆς τροχιᾶς—τῆς ὁποίας τὸ τμῆμα ΑΘΡΗΑ εἶναι τὸ ἥμισυ—ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κατατομῆς ΑΝΡ εἶναι παραβολικὸν τόξον, ἐπὶ δὲ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μεσημβρινοῦ ΒΔΡΕΓ (καθέτου ἐπὶ τὸ πρῶτον) εἶναι καμπύλη, γνωστὴ ὑπὸ τὸ ὄνομα *Λημνῖσκος τοῦ Gérono*.

Σφαιρικὰ τρίγωνα

Θεώρημα 786

1963. Εἰς πᾶν σφαιρικὸν τρίγωνον, ἀπέναντι μεγαλυτέρας πλευρᾶς εὑρίσκεται μεγαλυτέρα γωνία· καὶ ἀντιστρόφως.



Σχ. 1249.

Θεωρήσωμεν τὸ *κεντρικὸν* τρίεδρον (Ο τὸ κέντρον τῆς σφαίρας) ΟΑΒΓ. Ἐὰν $\alpha > \gamma$, θὰ ἔχωμεν ἐπίσης ἕδρα ΒΟΓ > ἕδρας ΒΟΑ καὶ ἐπομένως (§ 1781)

δίεδρος ΟΑ > διέδρου ΟΓ ἢ $\widehat{A} > \widehat{\Gamma}$.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν $\widehat{A} > \widehat{\Gamma}$, ἕπεται δίεδρος ΟΑ > διέδρου ΟΓ, ἄρα ἕδρα ΒΟΓ < ἕδρας ΒΟΑ ἢ τοξ. ΒΓ > τοξ. ΒΑ.

1963 α. Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τὸ σχετικὸν πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου (G. n° 607), διετυπώθη ὑπὸ τοῦ Albert Girard εἰς Ἄμστερνταμ, τὸ 1629, ἀλλὰ ἡ ἀπόδειξίς του δὲν εἶναι αὐστηρά. Κατὰ τὸν Lagrange, τὸ θεώρημα θὰ πρέπει νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὸν Cavallieri, ὅστις τὸ ἐδημοσίευσεν καὶ τὸ ἀπέδειξεν τὸ 1627. Ἡ θεώρησις τοῦ *πολικοῦ* ἢ *παραπληρωματικοῦ* τριγώνου ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ὀφείλεται εἰς τὸν Snellius, 1627. Προηγουμένως αὐτοῦ, ὁ Girard τὸ 1626 καὶ ἀκόμη καὶ ὁ Viéte (ἀποθ. 1603) εἶχον θεωρήσει τρίγωνον σχετιζόμενον καθ' ὡρισμένον τρόπον πρὸς δοθὲν σφαιρικὸν τρίγωνον· ἐν τούτοις τὸ *ἀντίστροφον* τοῦτο *τρίγωνον* τοῦ Viéte δὲν παρουσιάζει τὰ πλεονεκτήματα τοῦ γνωστοῦ *πολικοῦ τριγώνου*. (*Aperçu historique*, σ. 54 καὶ 546 καὶ *N. A.*, 1855, σ. 152, βιογραφικὸν σημείωμα τοῦ Prouhet).

Θεώρημα 786—I

1964. Εἰς πᾶν σφαιρικὸν τετράπλευρον περιγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν, τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

Αἱ πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου εἶναι τόξα μεγίστων κύκλων.

Ἡ ἐπίδειξις εἶναι ἀνάλογος ἐκείνης διὰ τὸ ἐπίπεδον τετράπλευρον (§ 744)· ἐπειδὴ τόξα μεγίστων κύκλων, ἀγόμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ἐφαπτόμενα τοῦ αὐτοῦ μικροῦ κύκλου τῆς σφαίρας, εἶναι ἴσα.

Θεώρημα τοῦ Gergonne 787

1965. Ἕν σφαιρικὸν τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον, ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀντικειμένων πλευρῶν του εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

(*Annales de Mathématiques*, τόμ. V, 1814 - 15, σ. 384 καὶ τόμ. VI, σ. 49, λύσις ὑπὸ J.-B. Durrande).

Ἡ πρότασις ἀποδεικνύεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ὡς καὶ εἰς τὴν Ἐπιπεδομετρίαν (§ 745).

Παρατήρησις. Τὸ *θεώρημα τοῦ Gergonne* εἶναι τὸ *ἐναλλακτὸν* ἐκείνου τοῦ *Cuéneau d'Aumont* (n° 1967). Μεταβαίνομεν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς εἰς τὸ ἄλλο τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐννοίας τοῦ παραπληρωματικοῦ πολικοῦ τριγώνου.

Ὑποθέσωμεν λ. χ. ὅτι α, β, γ, δ εἶναι πλευραὶ ἑνὸς σφαιρικοῦ τετραπλεύρου, δι' ἃς $\alpha+\gamma=\beta+\delta$. Διὰ τὸ παραπληρωματικὸν τετράπλευρον θὰ εἶναι

$$A'+\Gamma'=B'+\Delta'.$$

Πράγματι,

$$A'=180^\circ-\alpha,\quad B'=180^\circ-\beta,\quad \Gamma'=180^\circ-\gamma,\quad \Delta'=180^\circ-\delta$$

καὶ ἡ σχέσις $\alpha+\gamma=\beta+\delta$,

ἀνάγεται εἰς τὴν $A'+\Gamma'=B'+\Delta'$.

Θεώρημα τοῦ Fuss 788

1966. **Ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Γ σφαιρικοῦ τριγώνου, μὲ σταθερὰν τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ ἄθροισμα τῶν ἄλλων πλευρῶν ἴσον πρὸς ἡμιπεριφέρειαν, εἶναι μέγιστος κύκλος.**

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 149).

1966 α. Σημείωσις. Ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Γ σφαιρικοῦ τριγώνου, μὲ σταθερὰν τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ ἄθροισμα τῶν ἄλλων πλευρῶν ἐπίσης σταθερὸν ἀλλὰ διάφορον ἡμιπεριφερείας, ἐξητάσθη ὑπὸ τοῦ Fuss καὶ ὠνομάσθη *σφαιρικὴ ἔλλειψις*. (Διὰ τὴν καμπύλην ταύτην βλ. ἐπμ. § 2243. Κατὰ τὸν Magnus, *A. d. Gerg.*, τόμ. XVI, 1825 - 26, σ. 38).

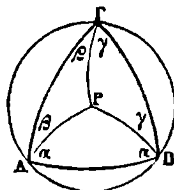
Θεώρημα τοῦ Gueneau d'Aumont—789

1967. **Εἰς πᾶν σφαιρικὸν τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν, τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.**

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 160).

Θεώρημα 790

1968. **Ἐὰν σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν καὶ διατηρῇ σταθερὰν τὴν βάσιν του ΑΒ, ἐνῷ ἡ κορυφὴ Γ γράφει τὴν περιφέρειαν, τὸ ἄθροισμα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν, ἠλαττωμένον κατὰ τὴν γωνίαν εἰς τὴν κορυφήν, παραμένει σταθερὰ ποσότης.**



Σχ. 1250.

Ἂς φέρωμεν διὰ τοῦ κέντρου Ρ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τρία τόξα ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ μεγίστων κύκλων. Τὸ τρίγωνον διαιρεῖται οὕτω εἰς τρία ἰσοσκελῆ σφαιρικὰ τρίγωνα, ἐπειδὴ

$$\widehat{PA}=\widehat{PB}=\widehat{P\Gamma}.$$

Ἑπομένως:

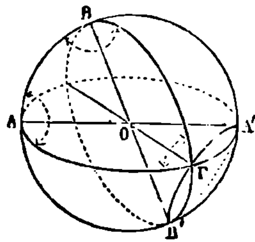
$$\widehat{A}+\widehat{B}-\widehat{\Gamma}=\alpha+\beta+\alpha+\gamma-\beta-\gamma=2\alpha=\text{σταθερὰ ποσότης}.$$

Ἀντίστροφον θεώρημα 790—1

1968 α. Ἐὰν εἰς σφαιρ. τρίγωνον $\widehat{A}+\widehat{B}-\widehat{\Gamma}$ εἶναι σταθερὰ ποσότης, ἡ δὲ βάσις ΑΒ παραμένῃ σταθερά, ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Γ εἶναι τόξον περιφερείας ΑΒΓ.

Θεώρημα τοῦ Lexell 791

1969. Σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἡ βάσις ΑΒ εἶναι σταθερὰ καθὼς καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Γ εἶναι μικρὸς κύκλος, διερχόμενος διὰ τῶν διαμετρικῶν τῶν Α καὶ Β σημείων Α′, Β′.



Σχ. 1251.

Ἀπόδειξις τοῦ Steiner. Ἔστω

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}-2 \text{ ὀρθαὶ} = T,$$

ποσότης σταθερά. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι $\widehat{A}'+\widehat{B}'-\widehat{\Gamma}$ εἶναι σταθερὰ ποσότης, ἐπειδὴ (§ 1968) ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Γ θὰ εἶναι τότε μικρὸς κύκλος Α′Β′Γ.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α, Α′ ὡς καὶ αἱ Β, Β′ εἶναι παραπληρωματικαί, ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως ἕπεται

$$2 \text{ ὀρθαὶ} - \widehat{A}' + 2 \text{ ὀρθαὶ} - \widehat{B}' + \widehat{\Gamma} - 2 \text{ ὀρθ.} = T,$$

ἢ

$$\widehat{A}'+\widehat{B}'-\widehat{\Gamma} = 2 \text{ ὀρθαὶ} - T = \text{σταθ.}$$

Ὁ τόπος ἑπομένως τῆς κορυφῆς Γ εἶναι πράγματι μικρὸς κύκλος Α′Β′Γ.

Θεώρημα 792

1970. **Μὲ πόλους τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ ἑνὸς σφαιρικοῦ τετραπλεύρου, γράφομεν τόξα μεγίστων κύκλων περατούμενα εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου, προεκτεινομένας κατὰ τὴν αὐτὴν πάντοτε φοράν. Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ λαμβανομένου σχήματος εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.**

Ἔστωσαν Α′, Β′, Γ′, Δ′ αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι καὶ παραπληρωματικαὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ. Ἂς παραστήσωμεν διὰ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου καὶ διὰ Ε′ τὸ ἐμβαδὸν τῶν τεσσάρων τριγώνων, τῶν λαμβανομένων διὰ τῆς ὡς ἄνω κατασκευῆς.

Ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα ἐπιφανείας τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον καὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν διὰ μονάδα τῶν γωνιῶν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι

$$E = A + B + \Gamma + \Delta - 4 \text{ ὀρθαί.} \quad (\text{G., n}^{o}\ 607,\ 3^{o}) \quad (1)$$

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον τὸ σχηματιζόμενον διὰ τοῦ τόξου τοῦ γραφομένου μὲ πόλον τὸ Α, ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραπλεύρου καὶ ὑπὸ τῆς προεκτάσεως μιᾶς ἄλλης προσκειμένης εἰς τὴν πρώτην, εἶναι δισορθογώνιον, ἀφοῦ τὸ Α εἶναι ὁ πόλος τῆς ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρᾶς.

Ἐὰν A' εἶναι ἡ γωνία αὐτοῦ εἰς τὴν κορυφήν, αὕτη θὰ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς A καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι (ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω προϋποθέσεις ἐπὶ τῶν μέτρων ἐπιφανειῶν καὶ γωνιῶν) ἁπλῶς A'.

Ἐπομένως:

$$E' = A' + B' + \Gamma' + \Delta'. \qquad (2)$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) σχέσεων λαμβάνομεν:

$$E + E' = A + A' + B + B' + \Gamma + \Gamma' + \Delta + \Delta' - 4 \text{ ὀρθαί}.$$

Ἀλλ' εἶναι $A' = 2$ ὀρθαὶ $- A$, $B' = 2$ ὀρθαὶ $- B$ κλπ.

Ἄρα $$E + E' = 4 \text{ ὀρθαί},$$

ἴσον δηλαδὴ πρὸς τέσσαρα τρισορθογώνια τρίγωνα ἢ πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

Θεώρημα 792—1

1971. Τὸ αὐτὸ ζήτημα διὰ τὸ τυχὸν σφαιρικὸν πολύγωνον.

Τὸ ἐμβαδὸν $E + E'$ ἐκφράζεται πάλιν διὰ 4· ἰσοῦται δηλ. πρὸς $2\pi R^2$ καὶ εἶναι ἀνεξάρτητον ἑπομένως τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τοῦ θεωρουμένου πολυγώνου. (Gerono, *N. A.*, 1864, σ. 455).

Ἀντιστροφὴ εἰς τὸν χῶρον

Θεώρημα 793

1972. Τὸ ἀντίστροφον σχῆμα σφαίρας, πρὸς πόλον ἀντιστροφῆς ἐπ' αὐτῆς κείμενον, εἶναι ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ πόλου διάμετρον.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 240· ὁμοίως καὶ διὰ πολλὰς τῶν ἑπομένων ἀσκήσεων).

Θεώρημα 794

1973. Τὸ ἀντίστροφον σχῆμα ἐπιπέδου, πρὸς πόλον ἀντιστροφῆς μὴ κείμενον ἐπ' αὐτοῦ, εἶναι σφαῖρα διερχομένη διὰ τοῦ πόλου καὶ τῆς ὁποίας ἡ διὰ τοῦ πόλου διάμετρος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Θεώρημα 795

1974. Τὸ ἀντίστροφον σχῆμα σφαίρας, πρὸς πόλον μὴ κείμενον ἐπ' αὐτῆς, εἶναι σφαῖρα. Ὁ πόλος ἀντιστροφῆς εἶναι κέντρον ὁμοιότητος τῶν δύο σχημάτων.

Θεώρημα 796

1975. Εἰς ἀντίστροφα σχήματα, αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 241).

Θεώρημα 797

1976. Τὸ ἀντίστροφον σχῆμα περιφερείας, πρὸς πόλον μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της, εἶναι περιφέρεια.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 242).

Θεώρημα τοῦ Chasles—798

1977. Τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τῆς λαμβανομένης διὰ στερεογραφικῆς προβολῆς περιφερείας (K) μιᾶς σφαίρας, εἶναι ἡ στερεογραφικὴ προβολὴ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν καὶ ἐφαπτομένου αὐτῆς κατὰ τὴν περιφέρειαν (K).

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 245).

Θεώρημα 799

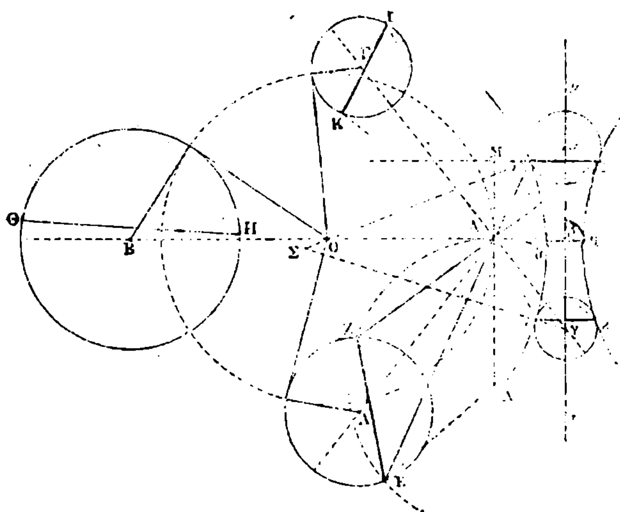
1978. Πᾶς κύκλος σφαίρας διερχόμενος διὰ τοῦ πόλου ἀντιστροφῆς ἔχει εὐθεῖαν ὡς ἀντίστροφον σχῆμα. Πᾶς δὲ ἄλλος κύκλος αὐτῆς, κύκλον.

Θεωρήματα τοῦ Dupuis—800

1979 Ἐὰν σφαῖρα μεταβλητῆς ἀκτῖνος ἐφάπτεται τριῶν σταθερῶν σφαιρῶν, ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς ἐφ' ἑκάστης σφαίρας εἶναι κύκλος.

Ἔστωσαν (Α), (Β), (Γ) τρεῖς σφαῖραι, ΑΒΓ ≡ (Π) τὸ διακεντρικὸν αὐτῶν ἐπίπεδον καὶ τέμνον αὐτὰς κατὰ τρεῖς μεγίστους κύκλους.

Διὰ τὴν καλλιτέραν ἐποπτείαν τοῦ τόπου, ἂς μετασχηματίσωμεν δι' ἀντιστροφῆς τὰς τρεῖς δοθείσας σφαίρας εἰς τρεῖς ἄλλας



Σχ. 1252.

ἐχούσας τὰ κέντρα των ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. Πρὸς τοῦτο, ὁρίζομεν τὸ ριζικὸν κέντρον Ο τῶν τριῶν περιφερειῶν (Α), (Β), (Γ) ἐπὶ τοῦ (Π) (§ 1481) καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν (Ο), τὴν τέμνουσαν ὀρθογωνίως τὰς τρεῖς ταύτας περιφερείας.

Ἐκλέγοντες ὡς πόλον ἀντιστροφῆς τυχὸν σημεῖον Δ τῆς περιφερείας (Ο) καὶ ὡς δύναμιν ἀντιστροφῆς τυχοῦσαν k^2, λαμβάνο-

μεν, ὡς ἀντίστροφον σχῆμα τῆς περιφερείας (Ο), εὐθεῖαν xy, κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΟ εἰς σημεῖον αὐτῆς β τοιοῦτον ὥστε

$$Δβ . 2 ΔΟ = k^2. \; (^{110})$$

Αἱ δὲ περιφέρειαι (Α), (Β), (Γ) θὰ ἔχουν ὡς ἀντίστροφα αὐτῶν σχήματα περιφερείας (α), (β), (γ), τῶν ὁποίων τὰ κέντρα θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς xy· ἐπειδή, ἀφοῦ ἡ περιφέρεια (Ο) τέμνει ὀρθογωνίως τὰς (Α), (Β), (Γ), τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὰ ἀντίστροφα τῶν τεσσάρων περιφερειῶν σχήματα καὶ ἑπομένως κατ' ἀνάγκην τὰ κέντρα α, β, γ θὰ πρέπει νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς xy.

Πᾶσα σφαῖραν ἐφαπτομένη τῶν τριῶν δοθεισῶν ἔχει ὡς ἀντίστροφον σφαῖραν ἐφαπτομένην τῶν (α), (β), (γ) καὶ ἀντιστρόφως· πᾶσαι δὲ αἱ σφαῖραι (Σ) αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν τριῶν τελευταίων εἶναι προφανῶς ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Δι' ἑκάστην σφαῖραν (Σ), τὰ τρία σημεῖα ἐπαφῆς καὶ ἡ εὐθεῖα xy κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Εἰς τὸ ἐπίπεδον (Π), Σ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ μεγίστου κύκλου εθι μιᾶς τῶν σφαιρῶν αὐτῶν. Ἡ περιβάλλουσα δὲ τῶν σφαιρῶν (Σ) εἶναι σπεῖρα με ἄξονα τὴν εὐθεῖαν xy.

Ἡ καμπύλη ἐπαφῆς τῆς σπείρας ταύτης καὶ τῆς σφαίρας (α) λ. χ., δηλ. ὁ τόπος ἐπὶ τῆς (α) τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν σφαιρῶν, αἵτινες ἐφάπτονται τῶν (α), (β) καὶ (γ) σφαιρῶν, εἶναι κύκλος τῆς (α) μὲ διάμετρον εζ κάθετον ἐπὶ τὴν xy. Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς σφαίρας (β) καὶ (γ).

Τὸ ἀντίστροφον σχῆμα τοῦ κύκλου εζ εἶναι κύκλος φυσικὰ (§ 1976) καὶ κείμενος ἐπὶ τοῦ ἀντιστρόφου τῆς σφαίρας (α), δηλ. ἐπὶ τῆς σφαίρας (Α). Ἀναλόγως, τὰ ἀντίστροφα τῶν κύκλων θη καὶ ικ ἐπὶ τῶν σφαιρῶν (β) καὶ (γ) εἶναι κύκλοι ΘΗ καὶ ΙΚ τῶν (Β) καὶ (Γ). Ὅ. ἔ. δ.

1979 α. *Παρατήρησις.* **Ἐφ' ἑκάστης σφαίρας, ὁ τόπος εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν, ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων κύκλων.**

Πράγματι, ἐπὶ τοὺς ἐξωτερικῶς ἀλλήλων κειμένους τρεῖς κύκλους (α), (β) καὶ (γ) δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τέσσαρα ζεύγη περιφερειῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν καὶ ἑπομένως ὁρίζονται τέσσαρες σπεῖραι ὡς περιβάλλουσαι τῶν ἐφαπτομένων σφαιρῶν τῶν (α), (β), (γ), (σφαιρῶν).

Τὸ ζεῦγος λ. χ. τῶν περιφερειῶν εθι καὶ ζηκ ἐφάπτονται τῶν κύκλων (α), (β), (γ) ἐξωτερικῶς, ὑπάρχει δὲ ἐπίσης καὶ ζεῦγος ἴσων περιφερειῶν ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς τῶν (β), (γ) καὶ ἐσωτερικῶς τῆς (α), κλπ.

Ἕκαστον τῶν τεσσάρων ζευγῶν περιφερειῶν ὁρίζει ἐφ' ἑκάστης τῶν σφαιρῶν (α), (β), (γ) καὶ ἀνὰ ἕνα κύκλον ἀντιστρεφόμενον, κατὰ τὰ προηγούμενα, εἰς κύκλον ἐπὶ τῆς ἀντιστρόφου τῆς θεωρουμένης σφαίρας.

Οὕτω, διὰ τρεῖς σφαίρας (Α), (Β), (Γ) ἐξωτερικῶς ἀλλήλων κειμένας, *ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς ἐφ' ἑκάστης σφαίρας ἀποτελεῖται ἐκ τεσσάρων κύκλων. Τούτων τὰ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ* (Π), ἐπειδὴ τὰ ἀντίστροφα αὐτῶν, δηλ. οἱ κύκλοι εζ κλπ., κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ τὴν xy.

---

110. Σημ. μετ. Εἰς τὸ σχῆμα ἡ δύναμις ἀντιστροφῆς ἐλήφθη ἀρνητική.

1979 β. Σημείωσις. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος διὰ τῆς ἀντιστροφῆς ὀφείλεται εἰς τὸν Mannheim (*N. A.*, 1860, σ. 67).

Διὰ νὰ καταστῇ τις ἐνήμερος τῆς ἰσχύος τῆς μεθόδου ἀντιστροφῆς ὡς ὀργάνου ἐρεύνης, ἀρκεῖ νὰ ἀναγνώσῃ μερικὰ σχετικὰ ἄρθρα εἰς *Nouvelles Annales de Mathématiques* καὶ ἰδιαιτέρως τὸ προαναφερθέν. Ὁ συγγραφεὺς τῆς *Κινητικῆς Γεωμετρίας* (Mannheim), ἐπεξεργάζεται διὰ τῆς μεθόδου ταύτης τὴν *κυκλίδα* ἢ περιβάλλουσαν ἐπιφάνειαν τῶν ἐφαπτομένων σφαιρῶν τριῶν ἄλλων δοθεισῶν.

Ἑκάστη ἰδιότης τῆς σπείρας—ἀντιστρόφου τῆς ἐπιφανείας ταύτης—ὁδηγεῖ εἰς ἀντίστοιχον ἰδιότητα τῆς κυκλίδος. Ἡ ἀξιόλογος αὕτη σπουδὴ κατανοεῖται εὐκόλως καὶ συγκρατεῖται εἰς τὴν μνήμην, ἕνεκα ὄχι μόνον τοῦ εὐτυχοῦς τρόπου ἐκθέσεώς της ἀλλὰ καὶ διὰ τά, συμφυῆ πρὸς τὴν μέθοδον τῆς ἀντιστροφῆς, πλεονεκτήματα ἅτινα παρουσιάζει.

Ἡ κυκλὶς ἐμελετήθη καὶ ὠνομάσθη ὑπὸ τοῦ Dupin κατὰ πρῶτον, αἱ δὲ τομαὶ τῆς σπείρας ἐσπουδάσθησαν ὑπὸ τῶν Villarceau καὶ Darboux.

Θεωρήματα τοῦ Ἀρχιμήδους 800—I

1979 γ. 1) Ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς ὀρθὸν πρῖσμα μὲ βάσιν τετράγωνον, ἰσοϋψὲς πρὸς τὸν κύλινδρον καὶ ἐφαπτόμενον αὐτοῦ κατὰ τέσσαρας εὐθείας παραλλήλους τῶν ἀκμῶν.

Διὰ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ἄνω βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ διὰ τῆς παραλλήλου πρὸς αὐτὴν διαμέτρου τῆς κάτω βάσεως φέρομεν ἐπίπεδον. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ — κυλινδρικοῦ ὄνυχος — τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, τῆς κάτω βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος.

2) Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ περιεχομένου μεταξὺ δύο ὀρθῶν κυκλικῶν κυλίνδρων, ἐχόντων ἄξονας καθέτους ἐπ' ἀλλήλους καὶ ἐγγεγραμμένων εἰς κύβον, εἶναι ἴσος πρὸς τὰ δύο τρία τοῦ ὄγκου τοῦ κύβου.

Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ προτάσεις αὗται ἄνευ τῆς χρήσεως τοῦ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ. (*Mathesis*, 1907, σ. 232, ζητήματα 1636 καὶ 1637).

Διάφοροι λύσεις ἐδόθησαν ὑπὸ τῶν Verhengen, Lez, Baidaf καὶ F. G.-M. (*Mathesis*, 1908, σ. 25-31).

Παραθέτομεν κατωτέρω τὰς ἡμετέρας λύσεις.

Πρῶτον θεώρημα. 1) Ἔστω h τὸ ὕψος καὶ R ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου, G τὸ κέντρον βάρους τῆς βάσεως - ἡμικυκλίου τοῦ ὄνυχος.

Ὁ ὄγκος ἑνὸς κολοβοῦ κυλινδρικοῦ τμήματος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τῆς καθέτου αὐτοῦ τομῆς καὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου βάρους G ἀγομένης παραλλήλου GM πρὸς τὰς γενετείρας αὐτοῦ. (Ἐπειδὴ εἶναι ἄθροισμα στοιχειωδῶν κολοβῶν ὀρθῶν παραλληλεπιπέδων, δι' ἃ ἰσχύει ἡ πρότασις κλπ.). Ἡ ἀπόστασις τοῦ G ἀπὸ τοῦ κέντρου O τοῦ κύκλου τῆς βάσεως εἶναι (G., nos 898 καὶ 901)

$$OG = \frac{4R}{3\pi},$$

ἡ δὲ ἐκ τοῦ G παράλληλος πρὸς τὰς γενετείρας μέχρι τῆς ἄνω βάσεως

$$GM = \frac{4h}{3\pi}.$$

'Επομένως:

$$V = \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{4h}{3\pi} = \frac{1}{6} \cdot 4R^2h.$$

2) Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν καὶ διὰ τῆς *μεθόδου τῆς συγκρίσεως τομῶν* (G., n° 971), τὴν ὁποίαν θὰ ἐφαρμόσωμεν διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα.

3) *'Η μέθοδος τῆς ἀθροίσεως* (G., n° 943) εὐκόλως ἐφαρμόζεται ἐπίσης ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως καὶ ἀποδεικνύει αὐτήν.

1979δ. Δεύτερον θεώρημα. 1) Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ἀγόμενον διὰ τῶν ἀξόνων τῶν δύο κυλίνδρων τέμνει τὸ κοινὸν αὐτῶν στερεὸν (Σ) κατὰ τετράγωνον (Τ), τὰ δὲ δύο ἐπίπεδα, τὰ ἀγόμενα δι' ἑκάστης τῶν διαγωνίων τοῦ τετραγώνου τούτου καὶ δύο ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ κύβου, διαιροῦν τὸ στερεὸν εἰς τέσσαρας κυλινδρικοὺς ὄνυχας—ὡς τοὺς ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι θεωρηθέντας.

'Επομένως:

$$V = 4 \cdot \frac{\delta^3}{6} = \frac{2}{3}\delta^3,$$

δ οὔσης τῆς διαμέτρου τῆς περιφερείας, τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τετράγωνον (Τ).

2) 'Εὰν πᾶν ἐπίπεδον, παράλληλον πρὸς δοθέν, τέμνῃ δύο στερεὰ κατὰ τομάς, τῶν ὁποίων αἱ ἐπιφάνειαι ἔχουν λόγον σταθερόν, οἱ ὄγκοι τῶν δύο στερεῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν τομῶν. (Πρβλ. Θεώρ. 767, Ι καὶ G., n° 914).

'Επὶ τοῦ προκειμένου, ἡ εἰς τὸ στερεὸν (Σ) ἐγγεγραμμένη σφαῖρα καὶ τὸ στερεὸν τοῦτο τέμνονται διὰ παντὸς ἐπιπέδου, παραλλήλου πρὸς τὸ τετράγωνον (Τ), κατὰ περιφέρειαν ἀκτῖνος ρ καὶ κατὰ τὸ περιγεγραμμένον εἰς αὐτὴν τετράγωνον. 'Επειδὴ δὲ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τούτων εἶναι

$$\lambda = \frac{\pi\rho^2}{4\rho^2} = \frac{\pi}{4},$$

ἕπεται ὅτι καὶ ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων ὄγκων εἶναι

$$\frac{V(\text{σφαίρας})}{V_\Sigma} = \frac{\pi}{4}.$$

"Αρα $$V_\Sigma = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{4}{3}\pi\rho^3 = \frac{16}{3}\rho^3 = \frac{2\delta^3}{3}.$$ (111)

1979ε. Παρατηρήσεις. 1) 'Υπὸ τοῦ τετραγώνου (Τ) τὸ στερεὸν (Σ) διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη. 'Η κυρτὴ ἐπιφάνεια, εἰς ἣν περατοῦται ἕκαστον τούτων, εἶναι *μοναστηριακὸς θόλος* μὲ βάσιν τετράγωνον· ὁ ὄγκος του εἶναι

$$V' = \frac{V_\Sigma}{2} = \frac{\delta^3}{3} = \delta^2 \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

ἢ $$V' = \text{Βάσις } (= \text{τετρ. (Τ)}) \times \text{ὕψος}.$$

---

111. Σημ. μετ. Διὰ τὴν λεπτομερεστέραν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως, βλ. *Συμπληρωματικὰς παραγράφους*, εἰς τὸ τέλος τοῦ VII Βιβλίου, §§ 2068 λ καὶ ἑπομένας.

Τὸν αὐτὸν τύπον τοῦ ὄγκου λαμβάνομεν καὶ διὰ πάντα μοναστηριακὸν θόλον, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ θόλου, ὑποτιθεμένης ἐλλείψεως τῆς ὁδηγοῦ καμπύλης. (G., n° 904).

2) Τὸ *δεύτερον θεώρημα* ἐπιδέχεται καὶ μίαν ἄλλην γενίκευσιν. Ἔστω τυχὸν παραλληλεπίπεδον (Π) καὶ θεωρήσωμεν τὰς ἓξ ἐλλείψεις αἵτινες ἐγγράφονται εἰς τὰς ἕδρας αὐτοῦ καὶ ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν ἑκάστης εἰς τὰ μέσα αὐτῶν. Αἱ ἐλλείψεις αὗται, ἴσαι ἀνὰ δύο, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς βάσεις ἐγγεγραμμένων πλαγίων κυλίνδρων εἰς τὸ παραλληλεπίπεδον (Π) καὶ μὲ γενετείρας παραλλήλους πρὸς τὰς τέσσαρας ἄλλας ἀκμὰς τοῦ (Π).

Ἀνὰ δύο τῶν κυλίνδρων τούτων ὁρίζουν ἓν κοινὸν αὐτῶν στερεόν. *Τὰ τρία ταῦτα κοινὰ στερεὰ εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὰ δύο τρίτα τοῦ παραλληλεπιπέδου.*

3) Θεωροῦντες εἰς κανονικὸν τετράεδρον τοὺς τέσσαρας ἐκ περιστροφῆς κώνους, μὲ κορυφὰς τὰς κορυφὰς τοῦ τετραέδρου καὶ ἐγγεγραμμένους εἰς αὐτὸ καὶ γενικεύοντες, ἀγόμεθα εἰς τὸ ἑπόμενον θεώρημα:

Οἱ κῶνοι, μὲ κορυφὰς τὰς κορυφὰς τυχόντος τετραέδρου καὶ βάσεις ἐλλείψεις ἐγγεγραμμένας εἰς τὰς ἀπέναντι ἕδρας καὶ ἐφαπτομένας τῶν πλευρῶν ἑκάστης εἰς τὰ μέσα αὐτῶν ([112]), *εἶναι ἰσοδύναμοι.*

Διάφορα προβλήματα 800—II

1979 η. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τυχόντος κυλινδρικοῦ ὄνυχος.

1) *Ὁ κύλινδρος εἶναι ὀρθὸς κυκλικὸς ἀλλὰ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ὁρίζει ἐπὶ τῆς βάσεως χορδὴν διάφορον τῆς διαμέτρου.*

Θεωροῦντες τὸ στερεόν, ὡς καὶ ἐν § 1979 γ, ὡς ἄθροισμα ἀπειροστῶν ὀρθῶν πρισμάτων κλπ., καταλήγομεν εἰς τὸν αὐτὸν τύπον

$$V = \text{Βάσις} \times OG,$$

ἀλλ' ὅπου τώρα (G., n° 898):

$$OG = \frac{x^3}{6(\rho\tau - x\delta)},$$

(x ἡ χορδὴ τοῦ τόξου τῆς βάσεως, τ τὸ τόξον, ρ ἡ ἀκτὶς καὶ δ τὸ ἀπόστημα τῆς χορδῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου).

2) *Ὁ κύλινδρος εἶναι ὀρθὸς ἐλλειπτικός.* Ἡ περίπτωσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ ἀντίστοιχον κυκλικὸν τμῆμα τοῦ πρωτεύοντος τῆς ἐλλείψεως κύκλου ([113]).

3) *Ὁ κύλινδρος εἶναι πλάγιος.* Ἡ εὐθεῖα GG', παράλληλος πάντοτε πρὸς τὰς γενετείρας, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς κλίσεώς της πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως.

4) *Μοναστηριακὸς θόλος οἱουδήποτε.* Θεωροῦμεν αὐτὸν ἀποτελούμενον ἐκ κυλινδρικῶν ὀνύχων, ὡς οἱ προηγουμένως θεωρηθέντες.

---

112. Σημ. μετ. Δι' ἑκάστην ἕδραν, ἡ ἔλλειψις αὕτη εἶναι προβολή, ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν της τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, οὗτινος προβολὴ εἶναι ἡ ἕδρα αὕτη (§ 1844 α, Σημ. 1). περιφερείας.

113. Σημ. μετ. Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἐλλειπτικοῦ (τῆς βάσεως) τμήματος ἀλλὰ καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ κ. βάρους G αὐτῆς. (G., 902, Rem.).

5) *Σταυροθόλιον* [114]. Τὸ σταυροθόλιον εἶναι συμπλήρωμα τοῦ μοναστηριακοῦ θόλου. Ἐκ τῶν προηγουμένων, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸν ὄγκον ἑνὸς ὡρισμένου τμήματος τοῦ σταυροθολίου, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ - *ἄντυγος* ἢ *ἐσωρραχίου* καὶ *ὑπεράντυγος* ἢ *ἐξωρραχίου*, ἀντιστοίχως, εἰς τὴν Ἀρχιτεκτονικήν.

Κῶνοι. — Κωνοειδῆ. — Δομοειδῆ

1979θ. Κῶνοι. *Κῶνος* ὀνομάζεται τὸ στερεόν, τὸ ἔχον *βάσιν* τυχοῦσαν ἐπίπεδον κλειστὴν ἐπιφάνειαν καὶ περατούμενον πλευρικῶς ὑπὸ τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν ἑνούντων τὰ διάφορα σημεῖα τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως μετὰ σημείου — κορυφῆς τοῦ κώνου — ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως κειμένου.

Ὁ ὄγκος παντὸς κώνου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως καὶ τοῦ τρίτου τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Γνωρίζομεν νὰ ὑπολογίσωμεν διὰ στοιχειωδῶν μεθόδων τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ἢ μιᾶς πυραμίδος. Διὰ τὰ γενικώτερα ὅμως στερεὰ τοῦ εἴδους τούτου, ὡς λ.χ. διὰ τὸν ὀρθὸν ἐλλειπτικὸν κῶνον ἢ τὸν πλάγιον κυκλικόν, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ καταφεύγωμεν εἰς κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμούς.

Κωνοειδῆ. Ἐκ τῶν στερεῶν τούτων θὰ θεωρήσωμεν ἐκεῖνα μόνον διὰ τὰ ὁποῖα ἡ εὐθύγραμμος ὁδηγὸς — *κορυφογραμμὴ* κατὰ Ι. Χατζιδάκην (Ὁλ. Λογισμός, σ. 347) — εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν αὐτῶν.

Κωνοειδὲς εἶναι τὸ στερεὸν μὲ βάσιν τυχοῦσαν ἐπίπεδον κλειστὴν ἐπιφάνειαν καὶ τὸ ὁποῖον περατοῦται πλευρικῶς ὑπὸ εὐθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, παραλλήλων πρὸς ἐπίπεδον — *ὁδηγοῦν ἐπίπεδον* — καὶ τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα Α καὶ Β εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως καὶ ἐπὶ εὐθείας - *ὁδηγοῦ ἢ κορυφογραμμῆς.*

Ὁ ὄγκος παντὸς κωνοειδοῦς—μὲ κορυφογραμμὴν παράλληλον τῆς βάσεως αὐτοῦ — εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους (ἀποστάσεως τῆς κορυφογραμμῆς ἀπὸ τῆς βάσεως) *αὐτοῦ.*

Καὶ ἐνταῦθα δὲν ἔχομεν στοιχειώδεις μεθόδους διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῶν κωνοειδῶν εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν — ἐκτός, φυσικά, τῆς περιπτώσεως τοῦ κατακεκλιμένου ἐπὶ μιᾶς τῶν παραπλεύρων αὐτοῦ ἑδρῶν τριγ. πρίσματος.

Δομοειδῆ. *Δομοειδὲς* καλεῖται τὸ στερεὸν τὸ παραγόμενον ὑπὸ κλειστῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας, κινουμένης παραλλήλως ἑαυτῆς, παραμενούσης ὁμοίας πάντοτε πρὸς ἑαυτὴν καὶ τῆς ὁποίας ἓν ὡρισμένον σημεῖον γράφει μίαν εὐθεῖαν (ε), ἐνῷ ἕκαστον σημεῖον τῆς περιμέτρου αὐτῆς γράφει καμπύλην κειμένην εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μετὰ τῆς εὐθείας (ε).

Παράδειγμα. Ἡ σφαῖρα εἶναι *δομοειδές*, παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἰσημερινοῦ, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον γράφει τὴν διάμετρον τῶν πόλων ἐνῷ ἕκαστον σημεῖον τῆς περιφερείας γράφει τὸ ἥμισυ ἑνὸς μεσημβρινοῦ.

Ἐὰν ἀντικατασταθῇ ὁ ἰσημερινὸς κύκλος διὰ τοῦ περιγεγραμ-

---

114. Σημ. μετ. Θόλος σχηματιζόμενος ἐκ τῆς τομῆς δύο ἡμικυλίνδρων.

μένου εἰς αὐτὸν τετραγώνου, ἕκαστον σημεῖον ἐπαφῆς θὰ διαγράψῃ ἕνα ἡμιμεσημβρινόν, τὰ δὲ ἄλλα σημεῖα τῆς περιμέτρου θὰ γράψουν ἡμιελλείψεις, ἐχούσας διὰ μικρὸν ἄξονα τὴν διάμετρον τῶν πόλων. Λαμβάνομεν οὕτω τὸ *δομοειδὲς* μὲ βάσιν τετράγωνον καὶ *ὁδηγὸν* τὸ ἥμισυ ἑνὸς μεσημβρινοῦ.

Ὁ ὄγκος παντὸς δομοειδοῦς, ἔχοντος ὡς ὁδηγον ἡμιπεριφέρειαν ἢ ἡμιέλλειψιν, εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως καὶ τῶν δύο τρίτων τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Ἐὰν ἡ βάσις τοῦ δομοειδοῦς εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, τὸ στερεὸν ὀνομάζεται καὶ *ἰσοδομοειδές*.

Ἡ ἐσωτερικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς μοναστηριακοῦ θόλου, ἀπὸ τῆς κορυφῆς μέχρι τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως αὐτοῦ, εἶναι ἐπιφάνεια δομοειδοῦς.

Παρατήρησις. Τοὺς ὄγκους τῶν κώνων, κωνοειδῶν καὶ δομοειδῶν ὑπολογίζομεν ἀρκετὰ εὐκόλως, εἴτε διὰ τῆς *μεθόδου τῆς ἀθροίσεως*, εἴτε διὰ τῆς τῶν *συγκρινομένων τομῶν*.

Δομοειδὲς περιγεγραμμένον εἰς σφαῖραν. Δυνάμεθα νὰ περιορισθῶμεν εἰς τὸ ἡμιδομοειδὲς — ἥμισυ τοῦ στερεοῦ — τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸ ἡμισφαίριον· εἶναι ἡ συχνὰ ἀπαντῶσα εἰς τὴν Ἀρχιτεκτονικὴν περίπτωσις τοῦ μοναστηριακοῦ θόλου. Σχετικῶς ἔχομεν τὸ ἀκόλουθον (καὶ εὐκόλου ἀποδείξεως) θεώρημα:

Οἱουδήποτε ὄντος τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸν ἰσημερινὸν πολυγώνου (Π), *ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δομοειδοῦς ἔχει λόγον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὃν ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου* (Π) *πρὸς τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ ἰσημερινοῦ.*

Διὰ τὸ δομοειδὲς λ. χ. μὲ βάσιν τετράγωνον, ὁ λόγος οὗτος εἶναι $\frac{8\rho}{2\pi\rho} = \frac{4}{\pi}$· τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουν καὶ οἱ ὄγκοι τῶν δύο στερεῶν.

Τὸ προηγούμενον θεώρημα δὲν ἐφαρμόζεται παρὰ μόνον εἰς τὰ περιγεγραμμένα δομοειδῆ ([115]).

1979 ι. *Παρατηρήσεις*. 1) Διὰ ὁδηγὸν καμπύλην τοῦ δομοειδοῦς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὑπερβολὴν ἢ παραβολήν, ὅπως προηγουμένως εἴχομεν ἐκλέξει περιφέρειαν ἢ ἔλλειψιν. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν παραγομένων ἐπιφανειῶν, δὲν ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσίν μας στοιχειώδεις μεθόδους· ὅσον διὰ τοὺς ὄγκους, θὰ πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸν ὑπολογισμὸν αὐτῶν διὰ τμήματα μονοχώνων ἢ διχώνων ὑπερβολοειδῶν ἢ ἐλλειπτικῶν παραβολοειδῶν.

2) Διὰ τὰ ἰσοδομοειδῆ, ὁ ἄξων τῆς σφαίρας ἢ ἡ ὁδηγὸς εὐθεῖα εὑρίσκεται πρὸς τὰ κοῖλα τῆς περιφερείας ἢ τῆς ἐλλείψεως ὁδηγοῦ· καλοῦνται *ἰσοτρημοειδῆ (équitrémoïdes)* τὰ στερεά, ἅτινα παράγονται κατ᾽ ἀνάλογον πρὸς τὰ δομοειδῆ τρόπον ἀλλὰ διὰ τὰ ὁποῖα ὁ ἄξων εὑρίσκεται πρὸς τὰ κυρτὰ τῆς ὁδηγοῦ περιφερείας.

Τὸ ἁπλούστερον καὶ πλέον ἐνδιαφέρον ἐκ τῶν στερεῶν τούτων εἶναι τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν σφαῖραν. Ἡ παράπλευρος αὐτοῦ ἐπιφάνεια εἶναι ἡ παραγομένη ὑπὸ ἡμιπεριφερείας στρεφομένης περὶ τὴν ἐφαπτομένην, τὴν παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον τῶν περάτων αὐτῆς.

Διὰ τὸν ὑπολογισμον τῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ ὄγκου τοῦ στε-

---

[115]. Σημ. μετ. Σχετικῶς πρὸς τὰ στερεὰ ταῦτα, βλ. G., nos 958-974.

ρεοῦ αὐτοῦ, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἡμίσειαν *σπεῖραν*, τὴν παραγομένην ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἡμικυκλίου περὶ τὴν ἐφαπτομένην.

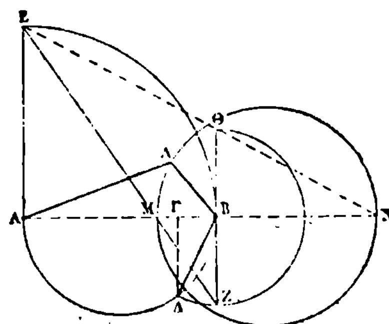
1979 κ. Σημείωσις. Οἱ ὅροι *domoïde, équidomoïde, équitrémoïde*, εἰσήχθησαν ὑπὸ τοῦ κόμητος Leopold Hugo, συγγραφέως διαφόρων ἐργασιῶν ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν κρυσταλλογραφικῶν μορφῶν. (*N. A.*, 1867, σ. 144 καὶ 526. — 1873, σ. 35, εὐμενεῖς σχετικαὶ κρίσεις τοῦ Housel. — 1875, σ. 233, σημείωσις τῆς Συντάξεως, διατυποῦσα ἐπιφυλάξεις ἐπ' αὐτῶν. Σχετικὰ εἰς : *I. d. M.*, 1901, σ. 276 n° 2223. Paul Tannery ἐπὶ τῆς *Géométrie pan-imaginaire* τοῦ ἰδίου συγγραφέως. — *Curiosités géométriques* τοῦ E. Fourrey (1907), ὅπου ἀφιερώνεται ὁλόκληρος παράγραφος ἐπὶ τῆς *Géométrie hugodomoïdale* (σ. 319 - 326).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Τόπος 801

1980. Ποῖος ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον φωτιζομένων ὑπὸ δύο φωτεινῶν πηγῶν Α, Β, τῶν ὁποίων αἱ ἐντάσεις εἶναι Ι καὶ Ι′;

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ποσότης τοῦ φωτὸς τοῦ προσπίπτοντος ἐπὶ ἑνὸς σημείου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεώς του ἀπὸ τῆς φωτεινῆς (σημειακῆς) πηγῆς.



Σχ. 1256.

Ἐπειδὴ αἱ ἐντάσεις Ι, Ι′ εἶναι ἀριθμοί, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ τμήματα ΑΒ, ΒΓ ἀνάλογα τῶν ποσοτήτων αὐτῶν:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{I}{I'} .$$

Διὰ τὸ τυχὸν σημεῖον Λ τοῦ τόπου θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\Lambda A^2}{\Lambda B^2} = \frac{I}{I'}, \quad \frac{\Lambda A}{\Lambda B} = \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{I'}} .$$

Εἰς τὸ ἐπίπεδον, ἑπομένως, ὁ τόπος τῶν σημείων Λ εἶναι ἡ περιφέρεια ΜΛΝ—τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον $\lambda = \frac{\sqrt{\mathrm{I}}}{\sqrt{\Gamma}}$.

Εἰς τὸν χῶρον, ὁ ἴδιος τόπος εἶναι ἡ σφαῖρα, ἡ παραγομένη διὰ περιστροφῆς τῆς ἡμιπεριφερείας ΜΛΝ περὶ τὴν ΑΒ.

Κατασκευή. Διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν συζυγῶν σημείων Μ, Ν τῶν τοιούτων, ὥστε :

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NB}} = \frac{\sqrt{\mathrm{I}}}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{\sqrt{\mathrm{AB}}}{\sqrt{\mathrm{B\Gamma}}},$$

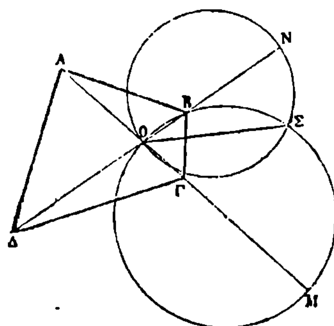
κατασκευάζομεν πρῶτον δύο τετράγωνα, ἔχοντα λόγον πρὸς ἄλληλα $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$. Γράφομεν πρὸς τοῦτο τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΔΒ καὶ ὑψοῦμεν κάθετον ΓΔ. Θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{B\Delta}^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\sqrt{\mathrm{AB}}}{\sqrt{\mathrm{B\Gamma}}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Delta}}.$$

Μεταφέρομεν ἀκολούθως τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΔ ἐπὶ τῶν ΑΕ καὶ ΒΘ, ΒΖ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΖ καὶ ΕΘ. Αἱ τομαὶ τούτων μετὰ τῆς ΑΒ εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα Μ, Ν.

Τόπος 802

1981. Πυραμὶς ἔχει ὡς βάσιν κυρτὸν τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς Ο. Ποῖος ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Κ τῆς πυραμίδος, ἐὰν πᾶσα κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΟ τομὴ αὐτῆς εἶναι παραλληλόγραμμον ;



Σχ. 1254.

Ἔστω Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, αἱ τομαὶ τῶν ἀκμῶν ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ ὑπὸ τοῦ τυχόντος καθέτου ἐπὶ τὴν ΚΟ ἐπιπέδου. Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον Α΄Β΄Γ΄Δ΄ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον, αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ θὰ τέμνωνται, εἰς τὸ ἴχνος Ο΄ τῆς τομῆς καὶ τῆς ΚΟ, εἰς ἴσα μέρη καὶ αἱ γωνίαι Α΄ΚΟ΄, Γ΄ΚΟ΄ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς καὶ αἱ γωνίαι Β΄ΚΟ΄ καὶ Δ΄ΚΟ΄.

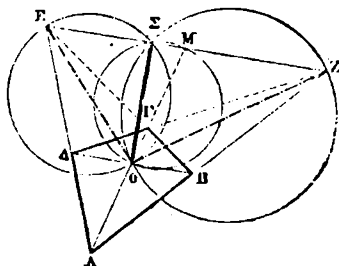
Ἐκ τοῦ σημείου Κ, κατὰ ἀκολουθίαν, τὰ τμήματα ΑΟ, ΟΓ καὶ ΒΟ, ΟΔ τῶν δύο διαγωνίων θὰ φαίνωνται ὑπὸ ἴσας γωνίας φ καὶ ω ἀντιστοίχως.

Ἀλλ᾽ ὁ τόπος τῶν σημείων εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραπλεύρου, ἐξ ὧν τὰ τμήματα ΑΟ, ΟΓ φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας, εἶναι περιφέρεια (§ 1366), ΟΜΣ. Ἀναλόγως, ὁ τόπος τῶν σημείων, δι᾽ ἃ τὰ τμήματα ΟΒ, ΟΔ φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας,

εἶναι ἄλλη περιφέρεια ΟΣΝ. Ἑπομένως, ὁ τόπος τῶν σημείων Κ τοῦ χώρου, δι' ἃ $\widehat{AKO} = \widehat{\Gamma OK}$ καὶ $\widehat{BKO} = \widehat{\Delta KO}$, θὰ εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν σφαιρῶν μὲ διαμέτρους ΟΜ, ΟΝ, δηλαδή, ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΟΣ (Σχ. 1254) καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Παρατήρησις. Διὰ πᾶσαν τετραγωνικὴν πυραμίδα μὲ βάσιν κυρτὸν τετράπλευρον, ὁρίζεται διεύθυνσις παραλλήλων ἐπιπέδων τεμνόντων αὐτὴν κατὰ παραλληλόγραμμα (§ 1842). Ἀλλ' ἐπὶ τοῦ προκειμένου ζητεῖται ὅπως τὰ ἐπίπεδα τῶν παραλληλογράμμων εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΚΟ.

1982. *Ἄλλη ἀπόδειξις.* Γνωρίζομεν ὅτι πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΚΕΖ, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν τὴν κορυφὴν Κ τῆς πυραμίδος μετὰ τῶν Ε καὶ Ζ, τομῶν τῶν ἀπέναντι τοῦ τετραπλεύρου πλευρῶν, τέμνει τὴν πυραμίδα κατὰ παραλληλόγραμμον, καὶ ἀντιστρόφως (§ 1842). Ὥστε, ἐὰν ἓν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΟ τέμνῃ τὴν πυραμίδα κατὰ παραλληλόγραμμον, θὰ πρέπει ἡ ΚΟ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΚΕΖ. Ἀλλ' ἐὰν τοῦτο συμβαίνῃ, ἡ εὐθεῖα ΚΟ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΚΕ καὶ ΚΖ τοῦ, ἐφ' οὗ εἶναι κάθετος, ἐπιπέδου ΚΕΖ. Θὰ εἶναι ἐπομένως αἱ γωνίαι ΟΚΕ καὶ ΟΚΖ ὀρθαὶ καὶ τὰ σημεῖα Σ κοινὰ τῶν σφαιρῶν μὲ διαμέτρους ΟΕ καὶ ΟΖ.



Σχ. 1255.

Ὁ τόπος κατ' ἀκολουθίαν θὰ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν σημείων τῆς περιφερείας μὲ διάμετρον ΟΣ τοῦ σχήματος 1255 καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν τῆς πυραμίδος.

1983. *Παρατηρήσεις.* 1) Αἱ περιφέρειαι μὲ διαμέτρους ΟΕ, ΟΖ τέμνονται εἰς τὸν πόδα τῆς ἐκ τοῦ Ο καθέτου ἐπὶ τὴν τρίτην διαγώνιον ΕΖ τοῦ τετραπλεύρου. Ἡ *διάμετρος*, ἐπομένως, *τοῦ ζητουμένου τόπου εἶναι ἡ κάθετος αὕτη.*

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο τρόπων ἀποδείξεως, πορίζόμεθα τὸ ἀκόλουθον θεώρημα :

Εἰς πᾶν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, *αἱ περιφέρειαι μὲ διαμέτρους* ΟΕ, ΟΖ *καὶ αἱ περιφέρειαι* (ΟΜ), (ΟΝ) — *τόποι τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο ἀπέναντι κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου ἔχουν λόγον σταθερὸν* $\left[\frac{OA}{OB} \text{ ἢ } \frac{O\Gamma}{O\Delta}\right]$ — *τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἐπὶ τῆς τρίτης διαγωνίου τοῦ πλήρους τετραπλεύρου κείμενον.*

Τόπος 803

1984. **Ποῖος ὁ τόπος τῶν κορυφῶν Σ τῶν τετραγωνικῶν πυραμίδων μὲ δοθεῖσαν βάσιν καὶ δυναμένων νὰ τμηθοῦν κατὰ ὀρθογώνια ;**

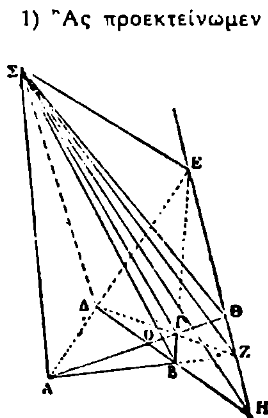
Εἶναι ἡ σφαῖρα μὲ διάμετρον τὴν τρίτην διαγώνιον ΕΖ τοῦ τε-

τραπλεύρου τῆς βάσεως· ἐπειδὴ τότε αἱ εὐθεῖαι ΣΕ, ΣΖ, πρὸς τὰς ὁποίας αἱ πλευραὶ τῶν τομῶν θὰ εἶναι παράλληλοι, θὰ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

Παρατήρησις. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν σφαιρῶν μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΟΕΖ, *τῶν τριῶν διαγωνίων σημείων τοῦ τετραπλεύρου* ΑΒΓΔ, *εἶναι ἡ κορυφὴ πυραμίδος δυναμένης νὰ τμηθῇ κατὰ τετράγωνον.*

Τόπος 803—I

1985. Ὁμοίως: Τόπος τῆς κορυφῆς Σ, ἵνα ἡ τομὴ εἶναι ῥόμβος ἢ τετράγωνον.



Σχ. 1256.

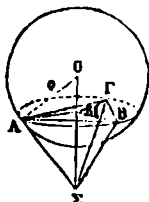
1) Ἂς προεκτείνωμεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΒΔ μέχρι τῶν τομῶν των μετὰ τῆς τρίτης διαγωνίου ΕΖ (σχ. 1256). Διὰ νὰ εἶναι ἡ τομὴ ῥόμβος, θὰ πρέπει αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου νὰ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, δηλ. θὰ πρέπει αἱ εὐθεῖαι ΣΗ, ΣΘ νὰ σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἑπομένως, πᾶν σημεῖον Σ τῆς σφαίρας μὲ διάμετρον ΗΘ θὰ ἀνήκη εἰς τὸν ζητούμενον τόπον, ἀφοῦ πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ΣΕΖ θὰ τέμνη τὴν πυραμίδα κατὰ ῥόμβον· ἐπειδή, τὸ σχῆμα θὰ εἶναι πάντως παραλληλόγραμμον καὶ αἱ διαγώνιοί του ὀρθογώνιοι, ὡς παράλληλοι πρὸς τὰς ΣΗ καὶ ΣΘ εὐθείας.

2) Ἵνα ἡ τομὴ εἶναι τετράγωνον, ἡ κορυφὴ Σ θὰ πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς κοινῆς περιφερείας τῶν σφαιρῶν μὲ διαμέτρους τὰς ΕΖ καὶ ΘΗ.

Τόπος 804

1986. Δοθείσης σφαίρας (Ο) ἀκτῖνος ρ, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Σ τριέδρου γωνίας, τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ ἐφάπτονται τῆς σφαίρας καὶ ἕδραι αὐτῆς εἶναι ἴσαι πρὸς 60° ἑκάστη. (Ν. Α., 1868, σ. 215).



Σχ. 1257.

Ἔστωσαν ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ αἱ τρεῖς ἀκμαί· ἐπειδὴ τὸ τετράεδρον ΣΑΒΓ θὰ εἶναι κανονικόν, θὰ ἔχωμεν

$$ΣΑ = ΣΒ = ΣΓ = ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ.$$

Ἡ εὐθεῖα ΣΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒΓ ἐπίπεδον καὶ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Μ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ· ἄρα

$$\text{ἀκτὶς } ΑΜ = \frac{ΑΒ}{\sqrt{3}} = \frac{ΣΑ}{\sqrt{3}},$$

ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΣ λαμβάνομεν:

$$ΑΟ.ΑΣ = ΑΜ.ΟΣ,$$

ἢ

$$ρ.ΑΣ = \frac{ΑΣ}{\sqrt{3}}.ΟΣ \quad καὶ \quad ΟΣ = ρ\sqrt{3}.$$

Εἶναι δηλ. ὁ ζητούμενος τόπος σφαῖρα ὁμόκεντρος τῆς δοθείσης καὶ ἀκτῖνος $ρ\sqrt{3}$.

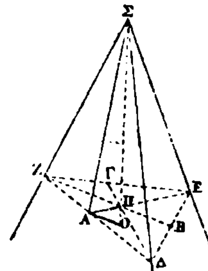
Τόπος 804—I

1987. Τόπος τῆς κορυφῆς τοῦ τριέδρου Σ ὅταν αἱ τρεῖς ἕδραι αὐτοῦ ἐφάπτωνται τῆς σφαίρας (Ο).

Τὸ τρίγωνον τῶν σημείων ἐπαφῆς θὰ εἶναι πάλιν ἰσόπλευρον. Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τρία ἴσα μήκη

$$ΣΔ = ΣΕ = ΣΖ,$$

τὰ μέσα Α, Β, Γ τῶν πλευρῶν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΔΕΖ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Ἔστω ΣΗ τὸ ὕψος τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου ΣΔΕΖ, διερχόμενον διὰ τοῦ κοινοῦ κέντρου Η τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ.



Σχ. 1258.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΣΑΗ, φέρομεν τὴν κάθετον ΑΟ ἐπὶ τὴν ΣΑ καὶ μέχρι τοῦ ὕψους ΣΗ. Ἡ ΟΑ παριστᾷ προφανῶς τὴν ἀκτῖνα τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὴν τρίεδρον σφαίρας.

Ἀρκεῖ ἤδη νὰ ἐκφράσωμεν τὴν ἀπόστασιν ΣΟ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος ΟΑ τῆς σφαίρας ταύτης.

Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΣΑΟ, ΣΑΗ, λαμβάνομεν:

$$\frac{ΣΟ}{ΑΟ} = \frac{ΣΑ}{ΗΑ} = \frac{ΑΕ}{ΑΗ} = \frac{3}{1},$$

ἀφοῦ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον. Εἶναι δηλ. ἡ ἀπόστασις ΣΟ τριπλασία τῆς ἀκτῖνος ΟΑ = ρ τῆς σφαίρας καὶ ὁ ζητούμενος τόπος ὁμόκεντρος τῆς δοθείσης σφαῖρα καὶ τριπλασίας ἀκτῖνος.

***1988.* Ἀνάλογα ζητήματα διὰ τρισορθογώνιον τρίγωνον.**

Τόπος 805

***1989.* Ποῖος ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, τῶν τεμνουσῶν ὀρθογωνίως τρεῖς δοθείσας σφαίρας;**

Εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ διακεντρικὸν ἐπίπεδον τῶν τριῶν σφαιρῶν εἰς τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν ἐπ' αὐτοῦ μεγίστων κύκλων - τομῶν τῶν σφαιρῶν.

Τόπος 806

1990. Ποῖος ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, τῶν τεμνουσῶν τρεῖς ἄλλας δοθείσας κατὰ μεγίστους αὐτῶν κύκλους;

Εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ διακέντρικὸν πάλιν ἐπίπεδον καὶ εἰς τὸ σημεῖον αὐτοῦ - κέντρον περιφερείας τεμνούσης κατὰ διαμέτρους τοὺς τρεῖς μεγίστους, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, κύκλους τῶν τριῶν σφαιρῶν (§ 1482).

Τόπος 807

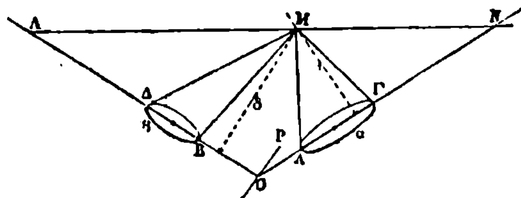
1991. Δίδονται δύο σταθεροὶ κύκλοι ἐν τῷ χώρῳ καὶ ζητεῖται ὁ τόπος τῶν σημείωγ Μ, δι' ἃ οἱ κῶνοι μὲ βάσεις τοὺς δοθέντας κύκλους καὶ κοινὰς κορυφὰς τὰ σημεῖα ταῦτα ἔχουν ἄθροισμα ὄγκων δοθέντα ἀριθμὸν $\frac{\pi k^3}{3}$.

Ἔστωσαν α, β αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων καὶ x, y τὰ ὕψη δύο ἐκ τῶν κώνων τούτων. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\pi\alpha^2 x}{3} + \frac{\pi\beta^2 y}{3} = \frac{\pi k^3}{3}$$

ἢ

$$\alpha^2 x + \beta^2 y = k^3$$



Σχ. 1259.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται οὕτω εἰς τὸ γνωστόν: *Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ κάθετοι* x, y *ἐπὶ τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας* ΛΟΝ (σχ. 1259), *πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ σταθερὰς ποσότητος* α^2 *καὶ* β^2 *ἀντιστοίχως, νὰ ἔχουν ἄθροισμα σταθερὸν* k^3.

Γνωρίζομεν (§ 271) ὅτι ὁ τόπος οὗτος εἶναι εὐθεῖα ΛΜΝ εὐκόλως προσδιοριζομένη· ὁ δὲ ζητούμενος ἀρχικῶς τόπος εἶναι ἐπίπεδον (Π) διὰ τῆς ΛΜΝ καὶ παράλληλον πρὸς τὴν τομὴν ΟΡ τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο δοθέντων κύκλων.

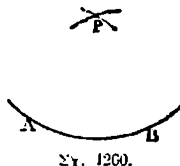
Παρατηρήσεις. 1) Ὁ πλήρης τόπος ἀποτελεῖται καὶ ἐκ τοῦ συμμετρικοῦ (Π′) τοῦ ἐπιπέδου (Π) πρὸς τὸ σημεῖον Ο.
2) Τὰ σημεῖα τῶν ἐπιπέδων (Π), (Π′), τὰ κείμενα ἐπὶ τῶν παραπληρωματικῶν διέδρων γωνιῶν τῆς διέδρου ΡΟΛΝ ἀντιστοιχοῦν εἰς κορυφὰς κώνων, διὰ τοὺς ὁποίους ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων των εἶναι $\frac{\pi k^3}{3}$.

Κατασκευαί

Πρόβλημα 808

1992. Νὰ γραφῇ ἐπὶ σφαίρας τόξον μεγίστου κύκλου διερχόμενον διὰ δύο σημείων Α, Β αὐτῆς.

Τῇ βοηθείᾳ τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου καὶ μὲ ἄνοιγμα αὐτοῦ ἴσον πρὸς τὴν χορδὴν $\rho\sqrt{2}$ τοῦ τετάρτου μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, γράφομεν τόξα ἔχοντα πόλους τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἡ τομὴ αὐτῶν Ρ εἶναι ὁ πόλος τοῦ ζητουμένου τόξου.



Σχ. 1260.

Πρόβλημα 809

1993. Διὰ δοθέντος σημείου Α σφαίρας νὰ γραφῇ τόξον μεγίστου κύκλου κάθετον ἐπὶ δοθὲν ἄλλο τόξον μεγίστου κύκλου ΒΓ.

Μὲ πόλον τὸ σημεῖον Α καὶ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ἴσον πρὸς $\rho\sqrt{2}$, γράφομεν τόξον τέμνον τὸ δοθὲν εἰς Γ. Μὲ κέντρον εἶτα τὸ Γ καὶ τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα γράφομεν τὸ ζητούμενον τόξον ΑΒΡ.

Πρόβλημα 810

1994. Διὰ δοθείσης εὐθείας ΑΒ νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον δοθείσης σφαίρας κέντρου Ο.

Διὰ τοῦ σημείου Ο φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τέμνον αὐτὴν μὲν εἰς Δ τὴν δὲ σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον ΕΖΘ.

Ἐὰν τώρα διὰ τοῦ σημείου Δ φέρωμεν ἐφαπτομένην ΔΕ πρὸς τὸν μέγιστον τοῦτον κύκλον, τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀγόμενον διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΔΒ καὶ ΔΕ ἀπαντᾶ εἰς τὸ πρόβλημα.

Ἐπειδὴ εἶναι τοῦτο κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΕ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς, ἀφοῦ περιέχει τὴν ἐφαπτομένην ΕΔ καὶ τὴν ΑΒ, κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΖΟ ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτοῦ ΟΕ.

Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἐξωτερικὴ τῆς σφαίρας ἢ ἐφαπτομένη ἢ τέμνουσα αὐτῆς, αἱ ἀντίστοιχοι λύσεις τοῦ προβλήματος εἶναι δύο, μία ἢ καμμία.

Πρόβλημα 811

1995. Διὰ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον δύο δοθεισῶν σφαιρῶν (Β) καὶ (Γ).

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα τῶν ἐπαφῶν θὰ εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο σφαιρῶν, θὰ διέρχεται ἀναγκαίως διὰ τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου τῶν κέντρων ὁμοιότητος τῶν δύο σφαιρῶν καὶ τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὸ ἐφαπτόμενον διὰ τοῦ Α ἐπίπεδον.

Ἔστω Ε ἓν τῶν κέντρων τούτων. Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον :

Δι' εὐθείας ΑΕ *νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον σφαίρας* (Β).

Ὑπάρχουν ἐν γένει τέσσαρες λύσεις, ἀνὰ δύο δι' ἕκαστον τῶν δύο κέντρων ὁμοιότητος τῶν σφαιρῶν.

Πρόβλημα 812

1996. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τριῶν σφαιρῶν (Α), (Β), (Γ).

Ἐλαττοῦντες τὰς ἀκτῖνας ἑκάστης σφαίρας κατὰ τὴν ἀκτῖνα ρ τῆς μικροτέρας, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἀναχθῶμεν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα (§ 1995) [116].

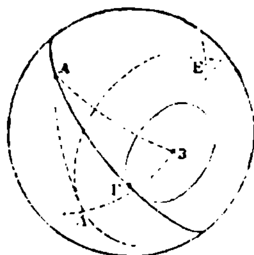
Ἐργαζόμεθα ὅμως ἁπλούστερον ὡς ἑξῆς:

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ D'Alembert (§ 176)), τὰ ἓξ κέντρα ὁμοιότητος τῶν τριῶν σφαιρῶν - εὑρισκόμενα ἐπὶ τοῦ διακεντρικοῦ τῶν σφαιρῶν ἐπιπέδου — κεῖνται ἀνὰ τρία ἐπ' εὐθείας γραμμῆς καὶ ὁρίζουν τέσσαρες εὐθείας. Ἐὰν δὲ διὰ μιᾶς τῶν εὐθειῶν αὐτῶν φέρωμεν ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον μιᾶς τῶν σφαιρῶν, τοῦτο θὰ ἐφάπτεται καὶ τῶν δύο ἄλλων.

Ὑπάρχουν ὀκτὼ ἐν γένει λύσεις.

Πρόβλημα 813

1997. Διὰ σημείου Α σφαίρας νὰ ἀχθῇ τόξον μεγίστου κύκλου ἐφαπτόμενον δοθέντος μικροῦ κύκλου (Β).



Σχ. 1261

Ἡ λύσις εἶναι ἀνάλογος τοῦ προβλήματος τῆς § 673, (παρατήρησις) εἰς τὴν Ἐπιπεδομετρίαν.

Ἔστω ρ ἡ χορδὴ μεγίστου κύκλου, ἡ ὑποτείνουσα τὸ τόξον σ μεγίστου κύκλου καὶ ἀκτῖνα καμπυλόγραμμον τοῦ μικροῦ κύκλου. Μὲ κέντρον Β καὶ καμπυλόγραμμον ἀκτῖνα 2σ γράφομεν κύκλον ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ τέμνομεν αὐτὸν εἰς Δ διὰ τοῦ κύκλου μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ΑΒ.

Ἐὰν φέρωμεν τώρα τόξον μεγίστου κύκλου κάθετον εἰς τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΔ, τὸ τόξον τοῦτο θὰ διαιρῇ εἰς δύο ἴσα μέρη τὸ τόξον μεγίστου κύκλου τὸ διερχόμενον διὰ τῶν Β καὶ Δ καὶ θὰ εἶναι ἐφαπτόμενον τοῦ μικροῦ κύκλου.

Παρατήρησις. Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Γ ὁρίζεται διὰ τῆς τομῆς τοῦ κύκλου (Β) καὶ τοῦ τόξου τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τῶν Β καὶ Δ.

Πρόβλημα 814

1998. **Νὰ γραφῇ τόξον μεγίστου κύκλου ἐφαπτόμενον δύο δοθέντων μικρῶν κύκλων.**

Ὁρίζομεν κατὰ πρῶτον ἓν τῶν κέντρων ὁμοιότητος τῶν δύο περιφερειῶν (§ 1962). Ἀκολούθως, φέρομεν δι' αὐτοῦ τόξον μεγίστου κύκλου ἐφαπτόμενον ἑνὸς τῶν δοθέντων κύκλων.

---

116. **Σημ. μετ.** Ὁπότε θὰ ἤρκει ἡ ἀγωγὴ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἀχθὲν ἐν τῇ παραγρ. ταύτῃ καὶ ἀπέχοντος τοῦ κέντρου τῆς μικροτέρας σφαίρας ἀπόστασιν ρ.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ ὑπάρχουν δύο κέντρα ὁμοιότητος καὶ ἐξ ἑκάστου τούτων ἄγονται δύο ἐφαπτόμενοι μέγιστοι κύκλοι, θὰ ἔχωμεν τέσσαρες λύσεις τοῦ προβλήματος, ὅταν οἱ δοθέντες κύκλοι εἶναι ἐξωτερικοὶ ἀλλήλων.

Πρόβλημα 815

1999. **Διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β σφαίρας νὰ γραφῇ κύκλος τῆς σφαίρας ἐφαπτόμενος δοθέντος κύκλου (Γ) αὐτῆς.**

Ἐργαζόμεθα καὶ πάλιν ἀναλόγως, ὡς καὶ ἐν τῇ Ἐπιπεδομετρίᾳ.

Διὰ τῶν Α καὶ Β γράφομεν κύκλον (Δ), τέμνοντα τὸν δοθέντα (Γ) εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Ὁρίζομεν ἀκολούθως τὸ σημεῖον καθ' ὃ τέμνονται οἱ μέγιστοι κύκλοι ΑΒ καὶ ΕΖ καὶ δι' αὐτοῦ γράφομεν τὸν μέγιστον κύκλον, τὸν ἐφαπτόμενον τοῦ κύκλου (Γ).

Ἐὰν Η εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς, ὁ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Η διερχόμενος κύκλος εἶναι ὁ ζητούμενος.

Πρόβλημα 816

2000. **Διὰ δοθέντος σημείου Α σφαίρας νὰ γραφῇ κύκλος αὐτῆς ἐφαπτόμενος δύο ἄλλων (Β) καὶ (Γ).**

Ἐργαζόμεθα ὡς καὶ εἰς τὴν Ἐπιπεδομετρίαν.

Εὑρίσκομεν ἓν τῶν κέντρων ὁμοιότητος Σ τῶν δύο κύκλων καὶ διὰ τοῦ Σ φέρομεν μέγιστον κύκλον τέμνοντα εἰς Ε, Ζ τοὺς δύο κύκλους. Διὰ τῶν σημείων Ε, Ζ (ἀντιομολόγων σημείων) καὶ Α γράφομεν περιφέρειαν, τέμνουσαν εἰς Δ τὸν μέγιστον κύκλον ΣΑ.

Ὁ διὰ τῶν Α καὶ Δ κύκλος, ὁ ἐφαπτόμενος τοῦ ἑνὸς τῶν δοθέντων (Β) ἢ (Γ), εἶναι ὁ ζητούμενος.

Πρόβλημα 817

2001. **Νὰ γραφῇ κύκλος σφαίρας ἐφαπτόμενος τριῶν ἄλλων δοθέντων κύκλων αὐτῆς.**

Ὡς καὶ εἰς τὴν Ἐπιπεδομετρίαν, ἀναγόμεθα εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα.

Πρόβλημα 817—Ι

2001 α. **Κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει ἀκτῖνα βάσεως ρ καὶ μῆκος γενετείρας λ. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ συντομώτερος δρόμος δ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τούτου, ὁ ἔχων ἀρχὴν σημεῖον Α τῆς περιφερείας τῆς βάσεως καὶ τέρμα πάλιν τὸ Α ἀλλὰ διατέμνων πάσας τὰς γενετείρας τοῦ στερεοῦ.**

Ὑποθέσατε τὴν ἀκτῖνα ρ ἴσην πρὸς τὸ ἕκτον, τέταρτον ἢ τρίτον τῆς γενετείρας λ.

Ἔστωσαν ΣΑ, ΣΒ αἱ δύο γενέτειραι εἰς τὰ ἄκρα Α, Β τῆς διὰ τοῦ Α διαμέτρου τῆς βάσεως.

Ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὸν κῶνον ἐπὶ ἐπιπέδου, λαμβάνομεν κυκλικὸν τομέα ΣΑ'Β'Α'', ἔχοντα ἀκτῖνα λ καὶ μῆκος τοῦ τόξου Α'Β'Α'' ἴσον πρὸς 2πρ.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τομέως τούτου ἡ βραχυτέρα ὁδὸς μεταξὺ τῶν Α' καὶ Α'' εἶναι φυσικὰ ἡ εὐθεῖα Α'Α''. Διὰ $\rho = \frac{\lambda}{6}$, ἡ Α'Α''

εἶναι ἴση πρὸς λ, διὰ $\rho = \frac{\lambda}{4}$ ἴση πρὸς $\lambda\sqrt{2}$ καὶ διὰ $\rho = \frac{\lambda}{3}$ ἴση πρὸς $\lambda\sqrt{3}$. Αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι αἱ ἀπεικονίσεις (ἢ ἀποτυπώματα) τῶν ζητουμένων δρόμων δ ἐπὶ τοῦ ἀναπτύγματος.

Παρατηρήσεις. 1) Διὰ $\rho = \frac{\lambda}{6}$, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ζητήσωμεν τὴν βραχυτέραν ὁδόν, τὴν ἀναχωροῦσαν ἀπὸ τοῦ Α, ἐπανερχομένην εἰς αὐτὸ καὶ συναντῶσαν δύο φορὰς ἑκάστην γενέτειραν.

Ἀναπτύσσομεν πρὸς τοῦτο τὸν κῶνον δύο φορὰς (κυλίοντες δηλ. αὐτὸν δύο φορὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου), λαμβάνοντες κ. τομέα Σ'Α'Β'Α''Β''Α'''. Ἡ εὐθεῖα $A'A''' = \lambda\sqrt{3}$ εἶναι ἡ ἀπεικόνισις τοῦ ζητουμένου δρόμου ἐπὶ τοῦ ἀναπτύγματος.

2) Εὔκολος εἶναι ἡ εὕρεσις ἀσκήσεων ἀναλόγων πρὸς τὴν προηγουμένην. Δυνάμεθα λ. χ. νὰ ζητήσωμεν ἓν τῶν τριῶν μηκῶν ρ, λ καὶ δ, ὅταν δίδωνται τὰ δύο ἐξ αὐτῶν. (Βλ. *Ex. de Géométrie Descriptive*, nº 1013).

Ἀριθμητικὰ προβλήματα — Σχέσεις

Πρόβλημα 818

2002. **Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Σ κώνου πρέπει νὰ ἀχθῇ τομὴ (Τ) παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν Β αὐτοῦ, ἵνα τὸ ἐμβαδόν της εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως;**

Ἔστω υ τὸ ὕψος καὶ x ἡ ἀπόστασις. Θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\frac{x^2}{\upsilon^2} = \frac{T}{B} = \frac{1}{2}$$

ἢ

$$x = \frac{\upsilon\sqrt{2}}{2} = \upsilon\,.\,0{,}707...$$

Πρόβλημα 819

2003. **Ἔστω (Τ), (Τ') δύο τομαὶ κώνου παράλληλοι πρὸς τὴν βάσιν Β αὐτοῦ καὶ τοιαῦται ὥστε**

$$\frac{T}{1} = \frac{T'}{2} = \frac{B}{3}.$$

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λόγοι τῶν ἀντιστοίχων τμημάτων ἐπὶ τοῦ ὕψους τοῦ κώνου.

Ἔστωσαν x, y, υ αἱ ἀποστάσεις τῶν τριῶν ἐπιπέδων ἀπὸ τῆς κορυφῆς. Θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{x^2}{\upsilon^2} = \frac{T}{B} = \frac{1}{3} \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{\upsilon\sqrt{3}}{3} = \upsilon.0{,}577...,$$

$$\frac{y^2}{\upsilon^2} = \frac{T'}{B} = \frac{2}{3} \quad \text{ἢ} \quad y = \frac{\upsilon\sqrt{2}}{3} = \upsilon.0{,}816...$$

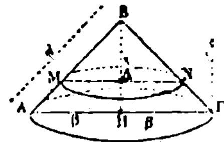
Πρόβλημα 820

2004. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρέπει νὰ ἀχθῇ τομὴ (T) παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν B κώνου, ἵνα ὁ λόγος τῆς τομῆς ταύτης πρὸς τὴν βάσιν νὰ εἶναι δοθεὶς k;

$$\frac{x^2}{\upsilon^2}=\frac{T}{B}=k \quad \text{καὶ} \quad x=\upsilon\sqrt{k}.$$

Πρόβλημα 821

2005. Νὰ τμηθῇ κῶνος ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τομὴ αὕτη νὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὁριζομένου κολούρου κώνου.



Σχ. 1202.

Ἔστω $AB=\lambda$, $BH=\upsilon$, $AH=\beta$ καὶ $B\Delta=x$. Θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$\pi\,.\,M\Delta^2=\pi\,(AH+M\Delta)\,AM. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ $M\Delta=\frac{\beta x}{\upsilon}$, $MB=\frac{\lambda x}{\upsilon}$,

$$AM=\lambda-\frac{\lambda x}{\upsilon}=\frac{\lambda}{\upsilon}(\upsilon-x),$$

$$AH+M\Delta=\beta+\frac{\beta x}{\upsilon}=\frac{\beta}{\upsilon}(\upsilon+x),$$

καὶ ἡ σχέσις (1) γίνεται

$$\frac{\beta^2x^2}{\upsilon^2}=\frac{\beta}{\upsilon}(\upsilon+x)\,.\,\frac{\lambda}{\upsilon}(\upsilon-x),$$

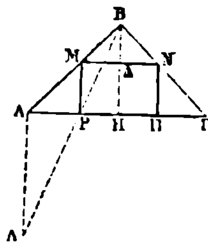
ἢ

$$x^2=\frac{\lambda\upsilon^2}{\beta+\lambda},$$

ἐξ ἧς εὑρίσκεται τὸ x.

Πρόβλημα 821—I

2006. Εἰς κῶνον ἐγγράφομεν κύλινδρον τοιοῦτον, ὥστε τὸ ὕψος αὐτοῦ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν γενέτειραν τοῦ κώνου τοῦ ἑδραζομένου ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου τούτου, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος ρ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους υ τοῦ ἀρχικοῦ κώνου.



Σχ. 1203.

Ἔστωσαν ΑΒΓ καὶ ΡΜΝΠ αἱ τομαὶ τοῦ κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου δι' ἐπιπέδου διὰ τοῦ κοινοῦ ἄξονος τῶν δύο σωμάτων ἀγομένου.

Διὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ σημείου Ρ, χρησιμοποιοῦμεν τὰ ὅμοια σχήματα· λαμβάνομεν τὴν κάθετον $A\Lambda=AB$, φέρομεν τὴν ΒΡΛ κλπ.

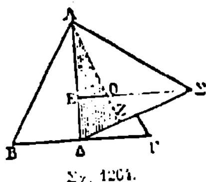
Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ΡΗ = ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ ΜΡ δὲν παρουσιάζει δυσκολίας. Εὑρίσκομεν

$$V=\pi\frac{\lambda\rho^2\upsilon^3}{(\lambda+\upsilon)^3}. \qquad (\lambda=AB)$$

Πρόβλημα 822

2007. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας εἰς κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α.

Ἔστω ΑΔ τὸ ὕψος ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ τῆς βάσεως ΑΒΓ τοῦ τετραέδρου· ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι ἐπίσης διάμεσος καὶ διχοτόμος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. 1201.

Τὸ ὑπὸ τῆς ΑΔ καὶ τῆς κορυφῆς Σ ὁριζόμενον ἐπίπεδον — καὶ τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν κατακεκλιμένον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως — εἶναι ἐπίσης διάμεσον, διχοτομοῦν καὶ διὰ τοῦ ἐκ τοῦ Σ ὕψους τοῦ τετραέδρου ἀγόμενον. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι τοῦτο καὶ τὰ πέντε ἄλλα ἀνάλογα πρὸς αὐτὸ ἀγόμενα ἐπίπεδα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (§ 1833).

Ἐκ τούτων, τὰ τρία κάθετα ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΓ τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν—τὸ ὕψος ΣΕ τοῦ τετραέδρου—διαιρεῖ δὲ ἡ εὐθεῖα αὐτὴ τὴν διάμεσον ΑΔ εἰς τμήματα ἔχοντα λόγον $\frac{2}{1}$. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὸ ἐκ τοῦ Α ὕψος καὶ διὰ τὰ τμήματα εἰς ἃ διαιρεῖ τοῦτο τὴν διάμεσον ΣΔ τῆς ἕδρας ΣΒΓ.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τετράεδρον σφαίρας, δηλ. τοῦ μήκους $ΟΑ = ΟΣ = ΟΒ = ΟΓ$, θὰ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν τοῦ Ο ἐπὶ τῆς ΣΕ.

Ἔστω $ΑΒ = α$. Θὰ εἶναι:

$$ΒΔ = \frac{α}{2}, \quad ΑΔ = \frac{α\sqrt{2}}{2}, \quad ΑΕ = \frac{α}{3}\sqrt{3}$$

καὶ

$$ΣΕ = ΑΖ = α\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΕΟ καὶ ΑΖΔ λαμβάνομεν:

$$\frac{ΑΟ}{ΑΕ} = \frac{ΑΔ}{ΑΖ}, \quad ΑΟ = R = \frac{ΑΕ.ΑΔ}{ΑΖ} = \frac{α}{4}\sqrt{6}.$$

Ἑπομένως:

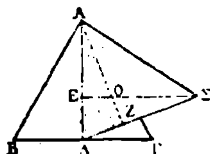
$$\text{Ἐπιφάνεια σφ. } (Ο) = \frac{3}{2}πα^2.$$

$$\text{Ὄγκος σφ. } (Ο) = \frac{1}{4}πα^3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Πρόβλημα 823

***2008.* Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς κανονικὸν τετράεδρον, ὡς καὶ τὰ ἴδια στοιχεῖα διὰ τὴν ἐφαπτομένην τῶν ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου σφαῖραν.**

Ἐπαναλαμβάνοντες τοὺς ἰδίους, ὡς καὶ προηγουμένως, συλλογισμούς, εὑρίσκομεν ὅτι ἀμφότεραι αἱ ζητούμεναι σφαῖραι ἔχουν κοινὸν κέντρον τὸ σημεῖον Ο. Ἐπειδὴ τοῦτο ἴσον ἀπέχει τῶν κορυφῶν τῶν ἑδρῶν καὶ ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου. Ἡ ἀκτὶς ρ τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς τὸ ΟΕ, ἡ δὲ ἀκτὶς ρ΄ τῆς ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν εἶναι ἴση πρὸς ΟΔ. Εὑρίσκομεν



Σχ. 1265.

$$\rho = OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\alpha}{3}\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\alpha}{4}\sqrt{6}\right)^2 - \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\alpha\sqrt{6}}{12}.$$

$$\rho' = O\Delta = \sqrt{OE^2 + E\Delta^2} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{12}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{1}{4}\alpha\sqrt{2}.$$

Ἐπιφ. σφαίρας $(\rho) = \frac{\pi\alpha^2}{6}$, Ἐπιφ. σφαίρας $(\rho') = \frac{\pi\alpha^2}{2}$.

Ὄγκος σφαίρας $(\rho) = \frac{\pi\alpha^3\sqrt{6}}{216}$, Ὄγκος σφαίρας $(\rho') = \frac{\pi\alpha^3\sqrt{2}}{24}$.

2008 α. *Παρατήρησις. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τῆς ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἐπιφανειῶν τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τοὺς ὄγκους τῶν στερεῶν τούτων.*

Πρόβλημα 824

2009. **Ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περὶ μίαν πλευράν του κατὰ ὁλόκληρον περιφοράν. Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ ;**

Εὑρίσκομεν : $V = \frac{\pi\alpha^3}{4}$ (α ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου).

Διὰ τὸ τυχὸν τρίγωνον.

$$V_\alpha = \frac{\pi {\upsilon_\alpha}^2 \alpha}{3}.$$

2010. **Ἐφαρμογὴ τῶν θεωρημάτων τοῦ Guldin.**

Εἰς τὸ ἀνωτέρω ζήτημα καὶ εἰς τὰ ὅμοια αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόζωμεν καὶ τὰ θεωρήματα τοῦ Guldin (G., nos 903 καὶ 904).

Πρόβλημα 825

2011. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου διὰ περιστροφῆς ἰσοπλεύρου τριγώνου περὶ ἄξονα διὰ μιᾶς κορυφῆς του ἀγόμενον καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ἀπέναντι αὐτῆς πλευράν.

Εὑρίσκομεν: $V = \frac{\pi\alpha^3}{2}$.

Παρατήρησις. Ἐὰν ὁ ἄξων εἶναι τυχοῦσα εὐθεῖα διὰ τῆς κορυφῆς (μὴ διατέμνουσα τὸ τρίγωνον), ὁ παραγόμενος ὄγκος μεταβάλλεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν

$$\frac{\pi\alpha^3}{4} \text{ καὶ } \frac{\pi\alpha^3}{2}.$$

Τὸ ἐλάχιστον λαμβάνεται, ὅταν ὁ ἄξων διέρχεται διὰ μιᾶς πλευρᾶς· τὸ μέγιστον, ὅταν οὗτος εἶναι παράλληλος πρὸς πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

Πρόβλημα 826

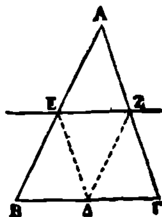
2012. Εὕρετε συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α κανονικοῦ ἑξαγώνου, τὸν ὄγκον τοῦ παραγομένου στερεοῦ διὰ περιστροφῆς τοῦ σχήματος περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του.

Εὑρίσκομεν: $V = \frac{9}{2}\pi\alpha^3$.

Παρατηρήσεις. 1) Ἐὰν ὁ ἄξων διέρχεται διὰ κορυφῆς Α καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ διάμετρον,

$$V = 3\,\pi\alpha^3\sqrt{3}.$$

2) Ἐὰν ὁ ἄξων εἶναι τυχοῦσα εὐθεῖα διὰ τοῦ Α καὶ μὴ διατέμνουσα τὸ σχῆμα, ὁ παραγόμενος ὄγκος μεταβάλλεται μεταξὺ τῶν ὁρίων $\frac{9\,\pi\alpha^3}{2}$ (min.) καὶ $3\,\pi\alpha^3\sqrt{3}$ (max.).



Σχ. 1216.

Πρόβλημα 827

2013. Τρίγωνον περιστρέφεται περὶ τὴν συνδέουσαν εὐθεῖαν τὰ μέσα δύο πλευρῶν του. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων στερεῶν ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων τοῦ τριγώνου:

Ἔστω ΕΖΔ τὸ μέσον τρίγωνον τοῦ δοθέντος. Τὰ τέσσαρα μικρότερα τρίγωνα τοῦ σχήματος εἶναι ἴσα καὶ

$$V = \text{Ὄγκος (ΑΕΖ)} = \text{Ὄγκος (ΕΔΖ)} = \tfrac{1}{2}\ \text{Ὄγκου (ΕΒΔ)}\ ([117]).$$

117. Σημ. μετ. Τοῦτο καὶ ἀπ' εὐθείας ἀποδεικνύεται ἀλλὰ καὶ διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Guldin. Ἐπειδὴ τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων τούτων εἶναι ἴσα, αἱ δὲ ἀποστάσεις τῶν κ. βάρους αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς εἶναι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1, 1, καὶ 2.

Ἐπειδὴ δὲ προφανῶς:

$$\text{Ὄγκος }(ΕΒΔ) = \text{Ὄγκος }(ΖΔΓ),$$

ἕπεται

$$\text{Ὄγκος }(ΕΒΓΖ) = 5\,V = 5\ \text{Ὄγκου }(ΑΕΖ).$$

Πρόβλημα 827—I

2013 α. Συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α κύβου, νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸν κύβον σφαίρας, τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸν καὶ τῆς ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν αὐτοῦ.

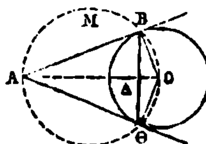
1) Τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας ἡ διάμετρος εἶναι α, ἡ ἐπιφάνεια $\pi\alpha^2$ καὶ ὁ ὄγκος $\frac{1}{6}\pi\alpha^3$.

2) Τῆς ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν, διάμετρος εἶναι ἡ διαγώνιος μιᾶς ἕδρας $= \alpha\sqrt{2}$, ἡ ἐπιφάνεια $2\pi\alpha^2$ καὶ ὁ ὄγκος $\frac{1}{3}\pi\alpha^3\sqrt{2}$.

3) Τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας, διάμετρος εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ κύβου $= \alpha\sqrt{3}$, ἡ ἐπιφάνεια $3\pi\alpha^2$ καὶ ὁ ὄγκος $\frac{1}{2}\pi\alpha^3\sqrt{3}$.

Πρόβλημα 828

2014. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Ο. Ζητεῖται ὅπως γραφῇ περιφέρεια μὲ κέντρον Ο καὶ τοιαύτη, ὥστε, ἐὰν ἐκ τοῦ Α φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς ΑΒ καὶ περιστρέψωμεν τὸ ὅλον σχῆμα περὶ τὴν ΑΟ, ἡ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπὸ τῆς ΑΒ νὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν τῆς σφαίρας (Ο).



Σχ. 1267

Ἔστω $ΟΑ = \alpha$, $ΟΒ = \rho$, $ΑΒ = \beta$.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου κώνου εἶναι $\pi\,.\,ΒΔ\,.\,ΑΒ$. Θὰ ἔχωμεν:

$$ΔΟ = \frac{ΒΟ^2}{ΟΑ} = \frac{\rho^2}{\alpha},\quad ΑΔ = \alpha - \frac{\rho^2}{\alpha} = \frac{\alpha^2 - \rho^2}{\alpha},$$

$$ΒΔ^2 = ΑΔ\,.\,ΔΟ = \frac{\alpha^2 - \rho^2}{\alpha}\cdot\frac{\rho^2}{\alpha} = \frac{(\alpha^2 - \rho^2)\,\rho^2}{\alpha^2},$$

$$ΑΒ^2 = ΑΟ^2 - ΟΒ^2 = \alpha^2 - \rho^2$$

καὶ ἑπομένως

$$\text{Κυρ. Ἐπιφ. κώνου} = \pi\,.\,ΒΔ\,.\,ΑΒ = \frac{\pi\rho}{\alpha}(\alpha^2 - \rho^2). \qquad (1)$$

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι $4\pi\rho^2$. Ἄρα

$$\frac{\pi\rho\,(\alpha^2 - \rho^2)}{\alpha} = 4\,\pi\rho^2.$$

Ἁπλοποιοῦντες διὰ ρ κλπ., εὑρίσκομεν

$$\rho = \alpha\,(\sqrt{5} - 2).$$

Πρόβλημα 829

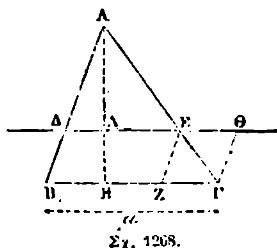
2015. Ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του, κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ $= \alpha$ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους ἴσην πρὸς $\frac{3\alpha}{2}$. Εὕρετε τὸν ὄγκον τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

Εὑρίσκομεν $\quad V = \frac{3}{4}\pi\alpha^3\sqrt{3}.$

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ εἶναι $9\pi\alpha^2$, ἐννεαπλασία τῆς τοῦ κύκλου μὲ ἀκτῖνα α.

Πρόβλημα 830

2016. Τρίγωνον ΑΒΓ περιστρέφεται περὶ ἄξονα παράλληλον πρὸς τὴν πλευράν του ΒΓ $= \alpha$ καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ. Ποῖοι οἱ ὄγκοι τῶν παραγομένων στερεῶν ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων τοῦ τριγώνου;



Σχ. 1208.

Ἔστω ΔΕ ὁ ἄξων περιστροφῆς καὶ υ τὸ ἐπὶ τὴν ΒΓ ὕψος τοῦ τριγώνου. Θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ΑΛ} = \frac{2\upsilon}{3}, \quad \text{ΛΗ} = \frac{\upsilon}{3}, \quad \text{ΔΕ} = \frac{2\alpha}{3}.$$

Φέρομεν τὰς παραλλήλους ΕΖ καὶ ΓΘ. Τὸ τρίγωνον ΔΑΕ παράγει στερεὸν ἀποτελούμενον ἐκ δύο κώνων, ἐχόντων ἀκτῖνα ΑΛ βάσεως κοινὴν καὶ ἄθροισμα ὑψῶν τὴν ΔΕ. Ἑπομένως:

$$1) \quad V(\text{ΑΔΕ}) = \frac{\pi\,.\,\text{ΑΛ}^2\,.\,\text{ΔΕ}}{3} = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{4\upsilon^2}{9}\cdot\frac{2\alpha}{3} = \frac{8\pi\alpha\upsilon^2}{81}. \quad (1)$$

2) Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ παραλληλογράμμου ΔΒΖΕ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὄγκον τὸν παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον θὰ εἶχεν ΔΕ διὰ βάσιν καὶ ΛΗ διὰ ὕψος (Guldin):

$$V(\text{ΔΒΖΕ}) = \pi\,\text{ΛΗ}^2\,.\,\text{ΔΕ} = \pi\,.\,\frac{\upsilon^2}{9}\cdot\frac{2\alpha}{3} = \frac{2\pi\alpha\upsilon^2}{27}. \quad (2)$$

Ὁ δὲ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΕΖΓ εἶναι διπλάσιος (§ 2013) τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ ΕΓΘ:

$$V(\text{ΕΖΓ}) = 2\,.\,\frac{\pi}{3}\,.\,\text{ΛΗ}^2.\,\text{ΖΓ} = 2\,.\,\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\upsilon^2}{9}\cdot\frac{\alpha}{3} = \frac{2\pi\alpha\upsilon^2}{81}. \quad (3)$$

Ὥστε:

$$V(\text{ΒΔΕΓ}) = (2) + (3) = \frac{8\pi\alpha\upsilon^2}{81}. \quad (4)$$

Εἶναι δηλ. οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν τῶν παραγομένων ὑπὸ τοῦ τριγώνου

ΑΔΕ *καὶ τοῦ τραπεζίου* ΒΔΕΓ *ἴσοι*, μολονότι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπιφάνειαι εἶναι ἄνισοι. Πράγματι

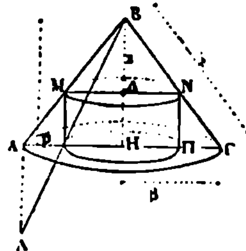
$$(\text{ΑΔΕ}) = \frac{4}{18}\ \text{αυ}, \quad \text{ἐνῷ}\ (\text{ΔΒΓΕ}) = \frac{5}{18}\ \text{αυ}.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν ὁ ἄξων περιστροφῆς συμπίπτῃ πρὸς μίαν διάμεσον τοῦ τριγώνου, τὸ τρίγωνον διαιρεῖται εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα. Διὰ πᾶσαν ἄλλην θέσιν τοῦ ἄξονος, διὰ τοῦ κ. βάρους πάντοτε τοῦ τριγώνου, τὰ μέρη ἔχουν ἀνίσους ἐπιφανείας καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν γίνεται μεγίστη, ὅταν ὁ ἄξων εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν. Εἶναι δὲ τότε αὕτη ἴση πρὸς τὸ ἔνατον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου.

Εἰς οἱανδήποτε ὅμως θέσιν τοῦ ἄξονος, τὰ στερεὰ τὰ παραγόμενα ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων τοῦ τριγώνου εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμα.

Πρόβλημα 831

2017. **Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κῶνον κύλινδρος τοιοῦτος, ὥστε ἡ κυρτὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἑδραζομένου μικροτέρου κώνου.**



Σχ. 1269.

Θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν (σχ. 1269):

$$\pi\,.\,\text{ΜΔ}\,.\,\text{ΜΒ} = 2\pi\,.\,\text{ΜΔ}\,.\,\text{ΜΡ},$$

ἢ
$$\text{ΜΒ} = 2\,\text{ΜΡ}.$$

Τὸ σημεῖον Μ ὁρίζεται ὡς καὶ εἰς τὴν § 2006, ἀλλ' ὅπου θὰ ληφθῇ

$$\text{ΑΛ} = \frac{1}{2}\,\text{ΑΒ}.$$

Ὑπολογισμός. Ἔστω $\text{ΒΗ} = \upsilon$, $\text{ΑΗ} = \beta$, $\text{ΑΒ} = \lambda$ καὶ $\text{ΒΔ} = x$. Θὰ εἶναι

$$\frac{\text{ΜΒ}}{x} = \frac{\lambda}{\upsilon}, \quad \text{ΜΒ} = \frac{\lambda x}{\upsilon}$$

καὶ
$$\text{ΜΡ} = \upsilon - x.$$

Ἄρα
$$\frac{\lambda x}{\upsilon} = 2\upsilon - 2x$$

καὶ
$$x = \frac{2\upsilon^2}{\lambda + 2\upsilon}.$$

Πρόβλημα 831—I

2018. Ὅμοιον πρόβλημα: **Ὁ λόγος τῶν δύο ἐπιφανειῶν νὰ εἶναι δοθεὶς** $\frac{\mu}{\nu}$ (σχ. 1269).

Εὑρίσκομεν
$$x = \frac{2\mu\upsilon^2}{\lambda\nu + 2\upsilon\mu}.$$

Πρόβλημα 832

2019. Ἀνάλογον πρόβλημα: Οἱ ὄγκοι τῶν δύο σωμάτων νὰ εἶναι ἴσοι.

Θὰ πρέπει: $$\frac{\pi\,.\,M\Delta^2\,.\,B\Delta}{3}=\pi\,M\Delta^2.\,MP,$$

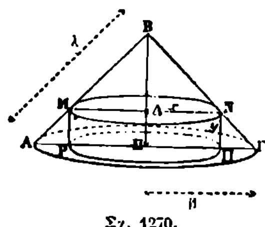
$$\frac{B\Delta}{3}=MP.$$

Ἐπομένως: $$\frac{\lambda x}{3\upsilon}=\upsilon-x,$$

καὶ $$x=\frac{3\,\upsilon^2}{\lambda+3\upsilon}.$$

Πρόβλημα 832—I

2020. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κῶνον κύλινδρος τοιοῦτος, ὥστε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἑδραζομένου κώνου νὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸν κυκλικὸν δακτύλιον, τὸν ὑπὸ τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων τοῦ ἀρχικοῦ κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου ὁριζόμενον.



Σχ. 1270.

Θὰ ἔχωμεν:

$$\pi M\Delta\,.\,MB=\pi\,(\beta^2-M\Delta^2),$$

ἤ, ἀφοῦ

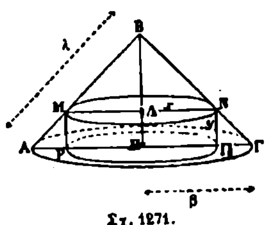
$$M\Delta=\frac{\beta x}{\upsilon},\quad MB=\frac{\lambda x}{\upsilon}\ (\S\ 2017),$$

$$\frac{\beta\lambda x^2}{\upsilon^2}=\beta^2-\frac{\beta^2 x^2}{\upsilon^2}$$

καὶ $$\frac{x^2}{\upsilon^2}=\frac{\beta}{\beta+\lambda}.$$

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς x τετραγώνου, ἔχοντος λόγον πρὸς ἄλλο τετράγωνον ἴσον πρὸς τὸν λόγον δύο μηκῶν.

Πρόβλημα 832—II



Σχ. 1271.

2021. Ἀνάλογον πρόβλημα: Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ μικροτέρου κώνου νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου δοθέντα $\frac{\mu}{\nu}$

$$\frac{\pi M\Delta\,.\,MB+\pi M\Delta^2}{2\,\pi M\Delta\,.\,MP+2\,\pi M\Delta^2}=\frac{\mu}{\nu}.$$

Ἐπειδή, ὡς εἴδομεν,

$$MB=\frac{\lambda x}{\upsilon},$$

καὶ $$M\Delta=\frac{\beta x}{\upsilon}\quad\text{καὶ}\quad MP=\frac{\upsilon^2-\upsilon x}{\upsilon},$$

ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται

$$\frac{\beta x \,.\, \lambda x + \beta^2 x^2}{\beta x(\upsilon^2 - \upsilon x) + \beta^2 x^2} = \frac{2\mu}{\nu},$$

ἐξ ἧς, μετὰ ἁπλοποιήσεις καὶ ἀναγωγάς,

$$x = \frac{2\mu\upsilon^2}{2\mu\upsilon + \nu\lambda + (\nu - 2\mu)\beta}.$$

Δύναται δηλαδὴ νὰ θεωρηθῇ τὸ μῆκος x ὡς τετάρτη ἀνάλογος γνωστῶν μηκῶν.

Πρόβλημα 833

2022. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τετραγώνου καὶ ἐξωτερικῶς αὐτοῦ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ περιστρέφομεν τὸ σχηματισθὲν πεντάγωνον περὶ μίαν τῶν ἐξωτερικῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ;

Εὑρίσκομεν:

$$V = \frac{\pi\alpha^3}{4}(3 + 2\sqrt{3}).$$

Πρόβλημα 834

2023. Τετράγωνον πλευρᾶς α περιστρέφεται περὶ ἄξονα διὰ μιᾶς κορυφῆς ἀγόμενον καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν διὰ τῆς κορυφῆς ταύτης διαγώνιον. Ζητοῦνται ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

$$V = \pi\alpha^3\sqrt{2}, \quad E = 4\pi\alpha^2\sqrt{2}.$$

Πρόβλημα 835

2024. Κανονικοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς α, προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ αὐτοῦ εἰς μῆκος ΑΘ = α καὶ εἰς τὸ σημεῖον Θ φέρομεν κάθετον ΜΝ ἐπὶ τὴν ΑΒΘ. Ζητοῦνται ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου στερεοῦ διὰ περιστροφῆς τοῦ ἑξαγώνου περὶ τὸν ἄξονα ΜΝ.

$$V = \frac{9\pi\alpha^3\sqrt{3}}{2}, \quad E = 18\pi\alpha^2.$$

Πρόβλημα 836

2025. Ὁμοίως: Τὸ ἑξάγωνον περιστρέφεται περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ μιᾶς κορυφῆς του Α καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ἀκτῖνα ΟΑ.

$$V = 3\pi\alpha^3\sqrt{3}, \quad E = 12\pi\alpha^2.$$

Πρόβλημα 837

2026. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου διὰ περιστροφῆς κανονικοῦ ἡμιδεκαγώνου περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ.

Α'. Τρόπος. Ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ κανονικοῦ πολυγωνικοῦ τομέως περιστρεφομένου περὶ ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας διερχομένου, εἶναι ἴσος πρὸς τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει ἡ πολυγωνικὴ γραμμή, καὶ τοῦ ἀποστήματος αὐτῆς.

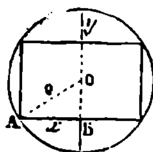
Ἐπίσης: Ὁ ἴδιος ὄγκος εἶναι ἴσος πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου, τοῦ ἔχοντος ὡς ἀκτῖνα βάσεως τὸ ἀπόστημα τῆς κανονικῆς γραμμῆς καὶ ὡς ὕψος τὴν προβολὴν αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς.

Β'. Τρόπος. Διὰ προβολῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν κορυφῶν τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, ἡ γενέτειρα ἐπιφάνεια εὑρίσκεται ἀποτελουμένη ἐκ δύο ἴσων τριγώνων εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου—ἄξονος, ἐκ δύο ἴσων τραπεζίων καὶ ἐξ ἑνὸς ὀρθογωνίου. Τὸ παραγόμενον ἑπομένως στερεὸν ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἴσων κώνων, δύο ἴσων κολούρων κώνων καὶ ἐξ ἑνὸς κυλίνδρου.

Πρόβλημα 838

2027. **Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος, ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν σφαιρικῶν τμημάτων τῶν ἐχόντων ὡς βάσεις τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου.**

Νὰ ὑποδειχθοῦν καὶ αἱ γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.



Σχ. 1272.

Ἂς παραστήσωμεν διὰ x τὴν ἀκτῖνα τοῦ κυλίνδρου, y τὸ ὕψος ἑκάστου τμήματος καὶ διὰ ρ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

Ὁ ὄγκος τῶν δύο τμημάτων εἶναι

$$V = 2\left(\frac{1}{6}\pi y^3 + \frac{1}{2}\pi y x^2\right),$$

καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ἴσος πρὸς $2\pi x^2(\rho - y)$. Ἑπομένως:

$$\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}x^2 y = x^2(\rho - y),$$

ἢ

$$\frac{1}{6}y^2 = x^2\left(\rho - \frac{3y}{2}\right). \quad (1)$$

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΟ δίδει:

$$x^2 = \rho^2 - (\rho - y)^2 = 2\rho y - y^2$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) ἀνάγεται εἰς τὴν δευτεροβάθμιον πρὸς y:

$$y^2 - 3\rho y + \frac{3}{2}\rho^2 = 0,$$

μὲ ρίζας

$$y' = \frac{3}{2}\rho + \frac{\rho\sqrt{3}}{2},$$

$$y'' = \frac{3}{2}\rho - \frac{\rho\sqrt{3}}{2},$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη εἶναι ἀπαράδεκτος, ἐπειδὴ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος ρ.

Κατασκευὴ τῆς ῥίζης y''. Αὕτη εἶναι ἄμεσος, ἀφοῦ $\frac{\rho\sqrt{3}}{2}$ εἶναι τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ $\frac{3\rho}{2}$ τὸ ὕψος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Πρόβλημα 839

2028. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς κύβου καὶ κοινὴν ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ γράφομεν σφαίρας. Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ μεταξὺ τῶν σφαιρῶν τούτων στερεοῦ Σ καὶ ποία ἡ ἀκτὶς τῆς ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτὸ σφαίρας;

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἕκαστον τῶν ἐντὸς τοῦ κύβου τμημάτων τῶν ὀκτὼ σφαιρῶν εἶναι τὸ ὄγδοον τῆς ἀντιστοίχου σφαίρας. Ἑπομένως

$$V_{(\Sigma)} = \text{κύβος} - \text{ὀκτὼ ὀγδοημόρια σφαίρας ἀκτῖνος } \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \alpha^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \alpha^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right).$$

Ἂν x εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ στερεὸν Σ σφαίρας, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{4}{3}\pi x^3 = \alpha^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)$$

καὶ

$$x = \frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{\frac{6-\pi}{\pi}}.$$

Πρόβλημα 839—I

2029. Δύο ἴσαι καὶ ἐξωτερικῶς ἀλλήλων κείμεναι σφαῖραι ἔχουν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῶν ἐπιφανειῶν των (διαφορὰν ἀθροίσματος ἀκτίνων ἀπὸ τῆς διακέντρου) α. Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ μεταξὺ τῶν σφαιρῶν καὶ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτὰ κυλίνδρου περιεχομένου στερεοῦ;

Ἔστω ρ ἡ κοινὴ ἀκτὶς καὶ $\alpha + 2\rho$ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Τὸ ἐν λόγῳ στερεὸν εἶναι ἡ διαφορὰ ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου δύο ἴσων ἡμισφαιρίων. Ἄρα:

$$V = \pi\rho^2(\alpha + 2\rho) - \frac{4}{3}\pi\rho^3 = \pi\rho^2\left(\frac{2}{3}\rho + \alpha\right).$$

Πρόβλημα 840

2030. Ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου στηρίζεται κῶνος διὰ τῆς βάσεώς του, ὡς καὶ σφαῖρα ἔχουσα διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ κώνου. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου πρέπει νὰ ἀχθῇ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ὥστε αἱ τομαὶ ὑπ' αὐτοῦ τῶν δύο στερεῶν νὰ ἔχουν λόγον δοθέντα $\frac{\mu}{\nu}$;

Ἔστω α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, β ἡ τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ

x ἡ ζητουμένη ἀπόστασις. Τὸ ὕψος τοῦ κώνου εἶναι 2α. Διὰ τὴν ἀκτῖνα β' τῆς τομῆς τοῦ κώνου θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\beta'}{\beta}=\frac{x}{2\alpha}, \quad \beta'=\frac{\beta x}{2\alpha}$$

καὶ

$$\pi\beta'^2=\frac{\pi\beta^2x^2}{4\alpha^2}.$$

Ἡ ἀκτὶς α' τῆς τομῆς τῆς σφαίρας εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν τμημάτων x καὶ $2\alpha-x$ τῆς διαμέτρου. Ἑπομένως:

$$\pi\alpha'^2=\pi x(2\alpha-x).$$

Κατὰ τὸ ἐπίταγμα τοῦ προβλήματος, ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{\pi\beta^2x^2}{4\alpha^2}:\pi x(2\alpha-x)=\frac{\mu}{\nu},$$

ἐξ ἧς

$$x=\frac{8\alpha^3\mu}{\beta^2\nu+4\alpha^2\mu}.$$

Παρατήρησις. Διὰ $\mu=\nu$, λαμβάνομεν

$$x=\frac{8\alpha^3}{\beta^2+4\alpha^2}.$$

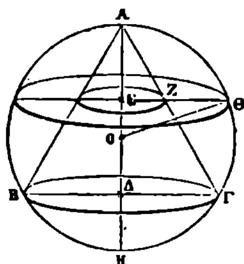
Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ βάσις τοῦ κώνου εἶναι ἴση πρὸς μέγιστον τῆς σφαίρας κύκλον, δηλ. διὰ $\beta=\alpha$, εὑρίσκομεν:

$$x=\frac{8\alpha}{5}.$$

Πρόβλημα 841

2031. Δοθέντος ἰσοπλεύρου κώνου ἐγγεγραμμένου εἰς σφαῖραν, νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου καὶ τοιοῦτον, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τομῶν τῶν δύο στερεῶν ὑπ' αὐτοῦ νὰ εἶναι δοθεῖσα $\pi\alpha^2$.

Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου ἡ διαφορὰ αὕτη καθίσταται μεγίστη;



Σχ. 1273

Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἰς μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας:

$$\Delta\Gamma=\frac{1}{2}\mathrm{B}\Gamma=\frac{\rho\sqrt{3}}{2}, \quad \Delta\mathrm{O}=\frac{\rho}{2}.$$

Ἔστω $\mathrm{AE}=x$. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο τομῶν εἶναι

$$\Delta=\pi(\mathrm{E}\Theta^2-\mathrm{EZ}^2).$$

Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΕΖ, ΑΔΓ, ἔχομεν

$$\frac{ΑΕ}{ΕΖ}=\frac{ΑΔ}{ΔΓ} \quad ἤ \quad \frac{x}{ΕΖ}=\frac{\frac{ΒΓ\sqrt{3}}{2}}{\frac{ΒΓ}{2}}=\sqrt{3}$$

ἤ
$$ΕΖ^2=\frac{x^2}{3}.$$

Ἐπίσης $\quad ΕΘ^2=ΕΑ\,.\,ΕΗ=x\,(2\rho-x)$. Ἐπομένως:

$$\pi\left(x\,(2\rho-x)-\frac{x^2}{3}\right)=\pi\alpha^2,$$

εἶναι ἡ ἐξίσωσις, ἡ προσδιορίζουσα τὴν ἀπόστασιν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ ταύτης ἕπεται

$$\left(\frac{3}{2}\rho-x\right)x=\frac{3}{4}\alpha^2,$$

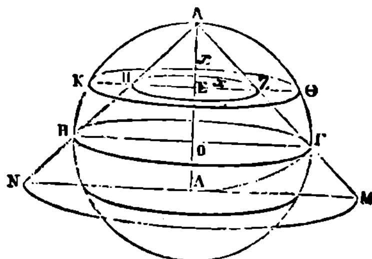
τὸ μῆκος x κατασκευάζεται κατὰ ἐν §§ 296, 297 ἐκτεθέντα.

Μέγιστον. Τὸ μέγιστον τῆς διαφορᾶς Δ λαμβάνεται ὅταν αἱ δύο πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου $\left(x,\ \frac{3}{2}\rho-x\right)$ εἶναι ἴσαι πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ σταθεροῦ ἀθροίσματος $\frac{3}{2}\rho$ τῶν πλευρῶν του, δηλ. διὰ

$$x=\frac{3}{4}\rho.$$

Πρόβλημα 841—I

2032. Εἰς ἡμισφαίριον εἶναι ἐγγεγραμμένος κῶνος. Ζητεῖται ὅπως ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου καὶ τέμνον τὰ στερεὰ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τομῶν νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν τιμὴν $\pi\alpha^2$.



Σχ. 1274.

Ἐκ τοῦ σχήματος 1274 λαμβάνομεν:

$$ΕΘ^2=2\rho x-x^2,\quad ΕΖ^2=x^2,$$

$$ΕΘ^2-ΕΖ^2=2\rho x-2x^2=\alpha^2,$$

ἤ $\quad 2x\,(\rho-x)=\alpha^2.$

Μέγιστον. Τὸ γινόμενον

$$x\,(\rho-x),$$

τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν παραγόντων εἶναι σταθερὸν $=2\rho$, γίνεται μέγιστον διὰ

$$x=\rho-x,\quad δηλ.\ διὰ\quad x=\frac{\rho}{2}.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν ζητῆται ὅπως ὁ λόγος τῶν τομῶν εἶναι δοθεὶς $\frac{\mu}{\nu}$, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\frac{\pi \,.\, E\Theta^2}{\pi \,.\, EZ^2} = \frac{\mu}{\nu} = \frac{2\rho x - x^2}{x^2}.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκεται—καὶ εὐκόλως κατασκευάζεται—τὸ ἄγνωστον μῆκος x.

Πρόβλημα 841—II

2033. Εἰς τὸ ἴδιον σχῆμα (1274), νὰ ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε ἡ σφαιρικὴ ζώνη ΘΑΚ καὶ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ΖΑΗ νὰ ἔχουν λόγον δοθέντα $\frac{\mu}{\nu}$.

$$\text{Ἐμβ. ζώνης} = 2\pi\rho \,.\, x.$$

$$\text{Ἐμβ. κυρτῆς ἐπιφ. τοῦ κώνου} = \pi \,.\, EZ \,.\, AZ = \pi x \,.\, x\sqrt{2}.$$

Ὥστε :

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{2\pi\rho x}{\pi x^2\sqrt{2}} = \frac{2\rho}{x\sqrt{2}}$$

καὶ

$$x = \frac{2\rho}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\nu}{\mu}.$$

Παρατήρησις. Θεωροῦντες τὴν προέκτασιν τοῦ κώνου πέραν τῆς βάσεώς του καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον κάτωθεν αὐτῆς, δυνάμεθα νὰ ζητήσωμεν, ὅπως αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς τὰς προηγουμένας ἐπιφάνειαι εἶνα σοδύναμοι.

Θὰ ἔχωμεν τότε $\mu = \nu$ καὶ $x = \rho\sqrt{2}$. Τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἄγεται εἰς ἀπόστασιν ΑΛ ἀπὸ τῆς κορυφῆς, ἴσην πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἰς μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας.

Πρόβλημα 841—III

2034. **Νὰ τμηθῇ σφαῖρα ὑπὸ ἐπιπέδου κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν λαμβανομένων ζωνῶν νὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν τομὴν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου.**

Ἔστω x ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Ἡ ἀκτὶς τῆς τομῆς εἶναι $\sqrt{\rho^2 - x^2}$ καὶ τὰ ὕψη τῶν δύο ζωνῶν $\rho + x$ καὶ $\rho - x$. Τὰ ἐμβαδὰ ἑπομένως τῶν ζωνῶν ἔχουν διαφορὰν

$$2\pi\rho(\rho + x) - 2\pi\rho(\rho - x) = 4\pi\rho x$$

καὶ ἡ εἰς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος σχέσις μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$4\pi\rho x = \pi(\rho^2 - x^2),$$

ἐξ ἧς

$$x = \rho(-2 \pm \sqrt{5}).$$

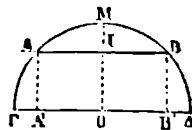
Ἐπειδὴ τὸ μῆκος $x < \rho$, ἐκ τῶν δύο λύσεων παραδεκτὴ εἶναι μόνον ἡ θετική, $x = \rho(\sqrt{5} - 2)$.

Πρόβλημα 842

2035. Εἰς ἡμικύκλιον κέντρου Ο φέρομεν χορδὴν ΑΒ παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον ΓΟΔ καὶ περιστρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν διάμετρον ταύτην.

Ζητοῦνται: 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ τμήματος ΓΑΒΔ τοῦ ἡμικυκλίου.

2) Νὰ συναγάγωμεν ἐξ αὐτοῦ τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου, τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ κ. τμήματος ΑΜΒ καὶ νὰ ἐπαληθεύσωμεν τὸ ἐξαγόμενον ὑπολογίζοντες ἀπ' εὐθείας τὸν ὄγκον τοῦτον.



Σχ. 1275.

3) Νὰ εὕρωμεν τὴν σχέσιν ἥτις πρέπει νὰ συνδέῃ τὰ μήκη ΑΒ καὶ ΓΔ, ἵνα ὁ ὄγκος τοῦ ὑπὸ τοῦ κ. τμήματος παραγομένου σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας.

Ἔστω: $Ο\Gamma = \rho, \quad AB = 2\lambda, \quad AA' = \mu,$

$$A'\Gamma = \upsilon = \rho - \lambda.$$

1) Τὸ ὑπὸ τοῦ τμήματος ΓΑΒΔ παραγόμενον στερεὸν ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς κυλίνδρου καὶ ἐκ δύο ἴσων σφαιρικῶν τμημάτων μὲ μίαν βάσιν. Θὰ ἔχωμεν

$$\text{Ὄγκος κυλίνδρου} = \pi\mu^2 . 2\lambda.$$

$$\text{Ὄγκος τῶν 2 σφαιρ. τμημάτων} = 2\left[\frac{1}{6}\pi\upsilon^3 + \frac{1}{2}\pi\mu^2\upsilon\right] =$$

$$= \pi\left[\frac{(\rho-\lambda)^3}{3} + \mu^2(\rho-\lambda)\right].$$

Προσθέτοντες καὶ ἐκτελοῦντες πράξεις τινάς, λαμβάνομεν

$$V(\Gamma AB\Delta) = \pi\left[\mu^2(\rho+\lambda) + \frac{(\rho-\lambda)^3}{3}\right]. \qquad (1)$$

Ἀλλ' εἶναι ἐκ τοῦ σχήματος:

$$\mu^2 + \lambda^2 = AA'^2 + OA'^2 = \rho^2$$

καὶ ὁ τύπος (1) γράφεται

$$V(\Gamma AB\Delta) = \pi\left[(\rho^2-\lambda^2)(\rho+\lambda) + \frac{(\rho-\lambda)^3}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi(\rho^3-\lambda^3).$$

Ἀφ' ἑτέρου, ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι $\frac{4}{3}\pi\rho^3$· ἄρα:

$$V(AMB) = \frac{4}{3}\pi\rho^3 - V(\Gamma AB\Delta) = \frac{4}{3}\pi\lambda^3.$$

Δι' ἀπ' εὐθείας ὑπολογισμοῦ τοῦ ὄγκου τοῦ σφαιρικοῦ τούτου δακτυλίου εὑρίσκομεν:

$$V(AMB) = \frac{1}{6}\pi(2\lambda)^3 = \frac{4}{3}\pi\lambda^3.$$

3) Διὰ νὰ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου ἴσος πρὸς τὸν ἥμισυ ὄγκον τῆς σφαίρας, θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$\frac{4}{3}\pi\lambda^3 = \frac{4}{3}\pi(\rho^3 - \lambda^3).$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης λαμβάνομεν:

$$\lambda = \frac{\rho}{2}\sqrt[3]{4} \quad \text{ἢ} \quad AB = 2\lambda = \rho\sqrt[3]{4} = \rho\,(1{,}587\ldots).$$

Πρόβλημα 843

2036. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δίεδρος γωνία δύο διαδοχικῶν ἑδρῶν εἰς ἕκαστον τῶν πέντε κανονικῶν καὶ κυρτῶν πολυέδρων.

Κανονικὸν τετράεδρον. (α)

$$\text{συν}\,\delta = \frac{1}{3}, \quad \delta = 70^\circ\,31',\,72\ldots$$

Παρατήρησις. Διὰ τὰ ζητήματα τῶν παραγράφων 2036 ἕως 2041, βλέπε 2αν καὶ 3ην ἔκδοσιν τοῦ παρόντος ἔργου.

Κανονικὸν ἑξάεδρον (κύβος) (β)

Αἱ διαδοχικαὶ ἕδραι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ $\delta = 90^\circ$.

Κανονικὸν ὀκτάεδρον (γ)

2037. $$\text{συν}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \delta = 109^\circ\,28',\,24\ldots$$

Κανονικὸν δωδεκάεδρον (δ)

2038. $$\text{ημ}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, \quad \delta = 116^\circ\,33',\,80\ldots$$

Κανονικὸν εἰκοσάεδρον (ε)

2039. $$\text{ημ}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, \quad \delta = 138^\circ\,11',\,60\ldots$$

Πρόβλημα 844

2040. Δι' ἕκαστον τῶν πέντε κανονικῶν κυρτῶν πολυέδρων, νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α.

1) Ἡ ἀκτὶς ρ τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ R τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας.
2) Ἡ ἐπιφάνεια E καὶ ὁ ὄγκος V αὐτοῦ.

Κανονικὸν τετράεδρον (α)

Αἱ ἀκτῖνες ρ καὶ R ὑπελογίσθησαν προηγουμένως (§§ 2007, 2008). Εὕρομεν:

$$\rho = \frac{\alpha\sqrt{6}}{12} = \alpha \,.\, 0{,}20408\ldots$$

$$R = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3} = \alpha \,.\, 0{,}81631\ldots$$

$$E = \alpha^2 \sqrt{3} = \alpha^2 \,.\, 1{,}73205 \ldots$$

$$V = \frac{\alpha^3 \sqrt{2}}{12} = \alpha^3 \,.\, 0{,}11785 \ldots$$

Κανονικὸν ἑξάεδρον (β)

$$\rho = \frac{\alpha}{2} = 0{,}5\, \alpha$$

$$R = \frac{\alpha \sqrt{3}}{2} = \alpha \,.\, 0{,}86602 \ldots$$

$$E = 6\, \alpha^2$$

$$V = \alpha^3.$$

Κανονικὸν ὀκτάεδρον (γ)

$$\rho = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} = \alpha \,.\, 0{,}40824 \ldots$$

$$R = \frac{\alpha}{2} \sqrt{2} = \alpha \,.\, 0{,}70710 \ldots$$

$$E = 2\, \alpha^2 \sqrt{3} = \alpha^2 \,.\, 3{,}46410 \ldots$$

$$V = \frac{\alpha^3 \sqrt{2}}{3} = \alpha^3 \,.\, 0{,}47140 \ldots$$

Κανονικὸν δωδεκάεδρον (δ)

$$\rho = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} = \alpha \,.\, 1{,}1135 \ldots$$

$$R = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}} = \alpha \,.\, 2{,}8025 \ldots$$

$$E = 15\, \alpha^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = \alpha^2 \,.\, 20{,}646 \ldots$$

$$V = \frac{5\, \alpha^3}{2} \sqrt{\frac{47 + 21\sqrt{5}}{10}} = \alpha^3 \,.\, 7{,}6630 \ldots$$

Κανονικὸν εἰκοσάεδρον (ε)

$$\rho = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}} = \alpha \,.\, 0{,}75576 \ldots$$

$$R = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = \alpha \,.\, 0{,}9510 \ldots$$

$$E = 5\alpha^2\sqrt{3} = \alpha^2 . 8{,}66025 \ldots$$

$$V = \frac{5\alpha^3}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{12}} = \alpha^3 . 2{,}182 \ldots$$

2041. Σημείωσις. Εἰς τὰ *Archives de Mathématiques et de Physiques* (τόμ. LIX, 1876), ὁ Georges Dostor ἔχει δημοσιεύσει μίαν πολὺ ἐνδιαφέρουσαν μελέτην ἐπὶ τῶν ἀκτίνων τῶν τριῶν σφαιρῶν, ἃς δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν εἰς ἕκαστον τῶν κανονικῶν πολυέδρων (ἐγγεγραμμένης (ρ), περιγεγραμμένης (R) καὶ ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου (ρ΄)), ὡς καὶ ἐπὶ τῶν σχέσεων τῶν συνδεουσῶν αὐτάς.

Αἱ ἀκτῖνες (ρ) διὰ τὰ πολύεδρα ταῦτα εἶναι

$$\rho_4 = \frac{\alpha\sqrt{2}}{4}, \quad \rho_6 = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}, \quad \rho_8 = \frac{\alpha}{2},$$

$$\rho_{12} = \frac{\alpha(\sqrt{5}+1)^2}{8}, \quad \rho_{20} = \frac{\alpha(\sqrt{5}+1)}{4}.$$

Αἱ δὲ σχέσεις, αἱ συνδέουσαι τὰς τρεῖς ἀκτῖνας ρ, R καὶ ρ΄ εἰς ἕκαστον πολύεδρον εἶναι

Εἰς τὸ καν. τετράεδρον $R\rho = \rho'^2$

» » » ἑξάεδρον $R\rho = \frac{\rho'^2\sqrt{3}}{2}$

» » » ὀκτάεδρον $R\rho = \frac{2\rho'^2\sqrt{3}}{3}$

» » » δωδεκάεδρον $R\rho = \frac{6\rho'^2}{\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}$

» » » Εἰκοσάεδρον $R\rho = \rho'^2 . \frac{\sqrt{6(5+\sqrt{6})}}{6}$.

ΠΙΝΑΞ ΚΥΡΙΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΩΝ ΠΕΝΤΕ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΚΥΡΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

Ἕδραι	Δίεδρος	R	ρ	ρ΄	E	V
4 τρίγωνα	70°32΄	0,612α	0,204α	0,354α	1,732α²	1,118α³
6 τετράγωνα	90°00΄	0,866α	0,500α	0,707α	6,000α²	1,000α³
8 τρίγωνα	109°28΄	0,707α	0,408α	0,500α	3,464α²	0,471α³
12 πεντάγωνα	116°34΄	1,401α	1,114α	1,309α	20,646α²	7,663α³
20 τρίγωνα	138°11΄	0,951α	0,756α	0,809α	8,660α²	2,182α³

Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα

Πρόβλημα 845

2042. **Νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαῖραν τὸ μέγιστον παραλληλεπίπεδον.**

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 388).

Πρόβλημα 846

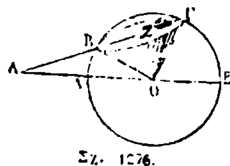
2043. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμισφαίριον τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ἐκ τῶν ἐχόντων μίαν τῶν ἑδρῶν του ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ ἡμισφαιρίου.

(Βλ. *Μέθοδοι*, §§ 390, 391).

Τὸ διπλάσιον τοῦ ζητουμένου στερεοῦ θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ὁλόκληρον τὴν σφαῖραν καὶ τοῦτο κύβος. Εἶναι, ἑπομένως, τὸ ζητούμενον μέγιστον τὸ ἥμισυ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν κύβου· τὸ ὕψος του εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου τῆς βάσεως.

Πρόβλημα 847

2044. Ἐκ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον σφαῖραν δοθεῖσαν κατὰ κύκλον τοιοῦτον, ὥστε ὁ κῶνος μὲ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ βάσιν τὸν κύκλον τοῦτον νὰ εἶναι ὁ μέγιστος.



Σχ. 1276.

Ἔστω ΔΒΓΕ ὁ μέγιστος τῆς σφαίρας κύκλος, ὁ ἀγόμενος διὰ τοῦ σημείου Α καθέτως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς. Ἐὰν θέσωμεν ΖΓ = ΖΒ = x καὶ ΟΖ = y, ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι $\frac{\pi}{3}x^2y$.

Ἐπειδὴ δὲ $x^2+y^2=\rho^2$, τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου x^2y λαμβάνεται διὰ

$$x^2=\frac{2}{3}\rho^2 \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{\rho}{\sqrt{3}}. \qquad (\S\ 392)$$

Ἑπομένως :

$$\text{máx. } V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2}{3}\rho^2\cdot\frac{\rho}{\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}\rho^3.$$

Πρόβλημα 848

2045. Ποῖος ὁ μέγιστος κῶνος ἐκ τῶν ἐχόντων μῆκος γενετείρας δεδομένον λ ;

$$x^2+y^2=\lambda^2 \quad \text{καὶ} \quad V=\frac{\pi x^2 y}{3}.$$

Τὸ πρόβλημα εἶναι τὸ ἴδιον πρὸς τὸ προηγούμενον, ὡς καὶ τὸ τῆς ἑπομένης παραγράφου 2049.

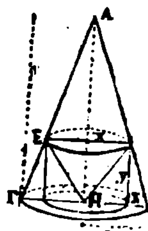
Πρόβλημα 849

2046. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κῶνον ὁ μέγιστος κύλινδρος.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 386).

Ἐκ τῆς ὑπομνησθείσης ταύτης ἀσκήσεως πορίζόμεθα καὶ τὰ ἀκόλουθα συμπεράσματα :

1) Ὁ μέγιστος κύλινδρος ἔχει ἄνω βάσιν τομὴν τοῦ κώνου εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους ἢ τῆς γενετείρας του ἀπὸ τῆς βάσεως.



Σχ. 1277

Ἐὰν x ἡ ἀκτὶς τῆς τομῆς καὶ y τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου :

$$x = \frac{2}{3}\rho, \quad y = \frac{υ}{3}.$$

$$V(\max.) = \frac{4}{27}\pi\rho^2 υ, \quad V\text{κώνου} = \frac{9}{27}\pi\rho^2 υ.$$

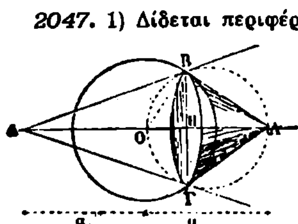
Εἶναι δηλ. ὁ μέγιστος κύλινδρος τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ κώνου.

2) Ὁ ἐλάχιστος κῶνος, ὁ περιγεγραμμένος εἰς δοθέντα κύλινδρον $\pi x^2 y$, εἶναι ὁ ἔχων ὕψος $υ = 3y$. Ὁ ὄγκος του εἶναι τὰ $\frac{9}{4}$ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου.

3) Ἡ τομὴ ΕΔ, ἡ εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους τοῦ κώνου ἀπὸ τῆς βάσεώς του, ὁρίζει τὸν μέγιστον ἐγγεγραμμένον κῶνον ΗΕΔ.

Πρόβλημα 849—I

2047. 1) Δίδεται περιφέρεια μὲ διάμετρον ΟΑ = α καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ χορδὴ ΒΗΓ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον τοιαύτη, ὥστε ὁ κῶνος μὲ κορυφὴν τὸ Α καὶ βάσιν τὸν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας κάθετον κύκλον μὲ διάμετρον ΒΓ νὰ εἶναι μέγιστος ([118]).



Σχ. 1278.

2) Ποῖος ὁ μέγιστος διπλοῦς κῶνος μὲ κορυφὰς Α καὶ Ο καὶ κοινὴν βάσιν τὸν κύκλον ΒΓ;

Ἂς τεθῇ $AH = x$, $OH = \alpha - x$, ὁπότε $BH^2 = x(\alpha - x)$. Ὁ κῶνος ΑΒΓ ἔχει ὄγκον

$$V = \frac{1}{3}\pi BH^2 . AH = \frac{1}{3}\pi x^2(\alpha - x)$$

καὶ γίνεται οὗτος μέγιστος διὰ $x = \frac{2\alpha}{3}$ (§ 376, Τρίτη ἀρχή). Θὰ εἶναι τότε $AH = \frac{2\alpha}{3}$, $OH = \frac{4\alpha}{3}$ καὶ ἑπομένως

$$V(\max.) = \frac{1}{3}\pi . \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2 \cdot \frac{2\alpha}{3} = \frac{4}{81}\pi\alpha^3$$

ἢ
$$V(\max.) = \frac{32}{81}\pi\rho^3, \quad \text{ἂν τεθῇ } 2\rho = \alpha.$$

118. Σημ. μετ. Ἐτροποποιήσαμεν τὴν εἰς τὸ κείμενον ἐκφώνησιν τοῦ α´ μέρους τοῦ προβλήματος, ὡς καὶ τὴν λύσιν αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον.

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου Β, λαμβάνομεν τμῆμα ΟΔ = ΟΑ = α καὶ φέρομεν ἐφαπτομένην ἐκ τοῦ Δ πρὸς τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον ΟΑ. Ἐπειδὴ θὰ εἶναι τότε

$$ΑΗ = \frac{1}{3} ΑΔ = \frac{2}{3} α.$$

2047 α. Παρατήρησις. 2) Ὁ διπλοῦς κῶνος ἔχει ὄγκον

$$V' = \frac{\pi}{3} . ΒΗ^2 . α.$$

Ἐπειδὴ τὸ μῆκος ΒΗ εἶναι ἐνταῦθα ἡ μόνη μεταβλητή, τὸ μέγιστον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ λαμβάνεται διὰ τὴν μεγίστην τιμὴν τοῦ μήκους τούτου, δηλ. διὰ $ΒΗ = \frac{α}{2}$. Ἑπομένως:

$$V'(\text{max.}) = \frac{\pi}{3} . \frac{α^2}{4} . α = \frac{\pi α^3}{12} .$$

Εἶναι δηλ. ὁ μέγιστος διπλοῦς κῶνος ΑΒΟΓ τὰ $\frac{27}{16}$ τοῦ μεγίστου κώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 850

2048. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ ἐγγραφῇ ὁ μέγιστος κύλινδρος.

Ἔστωσαν x ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως, y τὸ ὕψος καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας:

$$V = \pi x^2 . 2y = 2\pi x^2 y,$$

ὅπου $x^2 + y^2 = ρ^2.$

Κατὰ τὴν § 392, τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου $x^2 y$ λαμβάνεται διὰ

$$x^2 = \frac{2}{3} ρ^2 \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{ρ}{\sqrt{3}} .$$

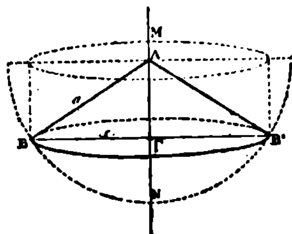
Ἄρα

$$V(\text{max.}) = 2\pi . \frac{2}{3} ρ^2 . \frac{ρ}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi ρ^3}{3\sqrt{3}} .$$

Παρατήρησις. Τὸ ἑπόμενον πρόβλημα (§ 2049) εἶναι τὸ ἴδιον μὲ τὸ ἀνωτέρω ἀλλὰ μὲ διάφορον διατύπωσιν.

Πρόβλημα 850—I

2049. Εὐθεῖα ΑΒ σταθεροῦ μήκους α περιστρέφεται περὶ ἄξονα ΜΑΝ, διερχόμενον διὰ τοῦ ἄκρου της Α καὶ παράγει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κώνου. Διὰ ποίαν θέσιν τῆς ΑΒ (πρὸς τὸν ἄξονα ΜΝ) ὁ κῶνος οὗτος γίνεται μέγιστος;



Σχ. 1270.

1) $V = \frac{\pi x^2 y}{3}$, $x^2 + y^2 = α^2$ καὶ τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον (§ 2048) ἢ καὶ εἰς τὸ τῆς § 2045.

Τὸ μέγιστον λαμβάνεται διὰ $x^2 = \frac{2}{3}\alpha^2$, $y = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ · ἄρα :

$$V\ (\max.) = \frac{2}{9\sqrt{3}}\pi\alpha^3.$$

2) Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀνωτέρου μεγίστου ἀνάγεται καὶ κατ' ἄλλον τρόπον εἰς τὸ προηγούμενον (§ 2048). Ἐπειδὴ ὁ ἐν λόγῳ μέγιστος κῶνος θὰ εἶναι προφανῶς τὸ τρίτον τοῦ μεγίστου κυλίνδρου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸ ἡμισφαίριον (Α, α) ἢ τὸ ἕκτον τοῦ μεγίστου κυλίνδρου τοῦ ἐγγραφομένου εἰς ὁλόκληρον τὴν σφαῖραν. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος τοῦ τελευταίου τούτου στερεοῦ εὑρέθη ὅτι εἶναι

$$V = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi\alpha^3,$$

ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ μεγίστου κώνου ΒΑΒ' εἶναι

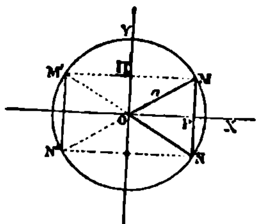
$$\frac{V}{6} = \frac{2}{9\sqrt{3}}\pi\alpha^3.$$

Πρόβλημα 850—ΙΙ

2050. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΜΟΝ ἔχει τὰς ἴσας πλευρὰς ΟΜ, ΟΝ σταθεροῦ μήκους ἀλλὰ μεταβλητοῦ ἀνοίγματος. Νὰ σπουδασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου διὰ περιστροφῆς τοῦ τριγώνου :

1) Περὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

2) Περὶ εὐθεῖαν ΟΥ διὰ τῆς κορυφῆς Ο καὶ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΜΝ αὐτοῦ.



Σχ. 1280.

1) Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν παράγεται κῶνος. Τοῦτον δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν παραγόμενον δι' ὁλοκλήρου περιστροφῆς τῆς πλευρᾶς ΟΜ περὶ τὸν ἄξονα ΟΡΧ (σχ. 1280).

Ὁ ὄγκος εἶναι μηδὲν ὅταν ἡ ΟΜ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΟΧ.

Ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης αὐξάνει μέχρι ἑνὸς μεγίστου, λαμβανομένου, κατὰ τὸ προηγούμενον ζήτημα, διὰ ὕψος αὐτοῦ ἴσον πρός :

$$OP = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}.$$

Ἀκολούθως ἄρχεται ἐλαττούμενος καὶ μηδενίζεται ἐκ νέου ὅταν ἡ ΟΜ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΥ.

2) Τὸ στερεὸν Σ, τὸ παραγόμενον διὰ περιστροφῆς τοῦ τριγώνου περὶ τὴν ΟΥ, εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν Ο κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος γενέτειραν ΜΝ. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν κώνων ΜΟΜ' καὶ ΝΟΝ' εἶναι ἴσον πρὸς $\pi OP^2 \cdot \frac{MN}{3} = \frac{1}{3}$ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου τούτου.

Γίνεται έπομένως μέγιστος ό δγκος τοῦ στερεοῦ Σ δταν καί ό δγκος τοῦ έγγεγραμμένου είς τήν σφαῖραν κυλίνδρου γίνη μέγιστος, δηλ. δταν $OP^2 = \frac{2}{3}\alpha^2$ (§ 2048).

Κατά ταῦτα ό δγκος Σ εἶναι μηδέν δταν $OP = \alpha$ ή $PM = 0$, αὐξάνει δέ κατόπιν, έφ' δσον ή OM άπομακρύνεται τοῦ ἄξονος OX καί μέχρι τῆς μεγίστης αὐτοῦ τιμῆς διά

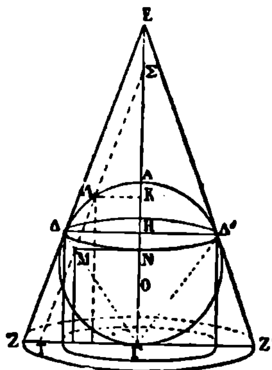
$$OP^2 = x^2 = \frac{2}{3}\alpha^2 \quad \text{καί} \quad MP = y = \frac{\alpha}{\sqrt{3}},$$

ὁπότε $$V(\max.) = \frac{2}{3}\pi . OP^2 . 2MP = \frac{8}{9\sqrt{3}}\pi\alpha^3.$$

Ἀπό τῆς θέσεως ταύτης έλαττοῦται καί μηδενίζεται έκ νέου δταν ή OM έφαρμόση έπί τοῦ ἄξονος OY.

Πρόβλημα 851

2051. **Δίδονται σφαῖρα καί έφαπτόμενον αὐτῆς έπίπεδον. Νά ἀχθῆ έπίπεδον παράλληλον πρός τό δοθέν εἰς τρόπον, ὥστε ὁ κύλινδρος μέ βάσιν τήν τομήν τῆς σφαίρας καί τοῦ έπιπέδου καί ὕψος τήν ἀπόστασιν τῶν δύο έπιπέδων νά εἶναι μέγιστος.**



Σχ. 1281

Εἴδομεν εἰς τάς παραγράφους 384 καί 386, ὅτι τό ἀνάλογον πρόβλημα διά τήν πυραμίδα έπιλύεται διά τομῆς γιγνομένης εἰς τά $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους αὐτῆς ἀπό τῆς βάσεως. Ἐπεκτείνοντες, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ μέγιστος έγγραφόμενος κύλινδρος εἰς δοθέντα κῶνον ἔχει ὡς ὕψος τό τρίτον τοῦ ὕψους τοῦ κώνου (παραβ. § 2046, 3)) [119].

Θά πρέπει λοιπόν νά φερωμεν έφαπτομένην ΕΔΖ τοιαύτην, ὥστε τό τμῆμα αὐτῆς ΔΕ νά εἶναι διπλάσιον τοῦ τμήματος ΖΔ (§ 315).

2051 α. *Παρατήρησις.* Ἐπειδή τό πρόβλημα τοῦτο θεωροῦμεν θεμελιῶδες κρίνομεν σκόπιμον ὅπως δώσωμεν αὐτοῦ καί μίαν ἀπ' εὐθείας λύσιν.

Ἔστω κῶνος ΖΕΖ' έφαπτόμενος τῆς σφαίρας καί τοῦ ὁποίου ή γενέτειρα ΕΖ διαιρεῖται ὑπό τοῦ σημείου έπαφῆς εἰς μέρη ΕΔ, ΔΖ ἔχοντα λόγον 2:1. Θά δείξωμεν ὅτι ὁ κύλινδρος (K) μέ βάσιν τόν κύκλον έπαφῆς ΔΔ' εἶναι ὁ μεγαλείτερος έκ τῶν

---

119. Σημ. μετ. Θά ἠδυνάμεθα, έπί τό ἁπλούστερον, νά έπαρατηροῦμεν ὅτι ὁ μέγιστος οὗτος κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος τοῦ μεγίστου έγγεγραμμένου κώνου ΔΓΔ' εἰς τήν σφαῖραν· οὗτος δέ ὁρίζεται, κατά τά έν § 2047, 1) διά τῆς ἀγωγῆς τῆς έφαπτομένης ΕΔΖ κλπ.

ἐχόντων κάτω βάσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ ἄνω βάσιν τομὴν τῆς σφαίρας.

Ἔστω πράγματι ΛΚ μία ἄλλη τομὴ τῆς σφαίρας, ΣΛΤ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΔΖ καὶ Μ ἡ τομὴ ταύτης καὶ τῆς ΓΔ. Θὰ εἶναι πάλιν ΣΜ = 2 ΜΤ, ὁ δὲ κύλινδρος μὲ ἀκτῖνα ΛΚ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ κυλίνδρου ΜΝ (§§ 384, 386).

Κατὰ μείζονα, ἑπομένως, λόγον θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ κυλίνδρου (Κ) μὲ ἀκτῖνα ΔΗ > ΜΝ. Εἶναι δηλ. ὁ κύλινδρος (Κ) ὁ μέγιστος ἐκ τῶν θεωρουμένων.

2051 β. *Τιμὴ μεγίστου ὄγκου.* Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$$\Gamma E = 4\rho, \quad Z\Gamma = \rho\sqrt{2} \qquad (\S\ 316,\ \alpha)$$

ἄρα:

$$H\Gamma = \frac{4\rho}{3}, \quad \Delta H = \frac{2}{3}\rho\sqrt{2}$$

καὶ

$$V\,(\max.) = \pi \Delta H^2 \,.\, \Gamma H = \frac{32}{27}\pi\rho^3.$$

2051 γ. *Ἐπαλήθευσις.* Ὡς εἴδομεν εἰς § 385, εἰς κῶνον βάσεως Β καὶ ὕψους υ ὁ μέγιστος ἐγγραφόμενος κύλινδρος ἔχει ὄγκον

$$V = \frac{4}{27}B\upsilon = \frac{4}{9}\cdot\frac{B\upsilon}{3} = \frac{4}{9} = \text{τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου.}$$

Ἀλλὰ καὶ ὁ κύλινδρος (Κ) εἶναι τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ κώνου ΖΕΖ'· ἐπειδὴ ὁ τελευταῖος ἔχει ὄγκον

$$V' = \frac{1}{3}\pi Z\Gamma^2 \,.\, \Gamma E = \frac{1}{3}\pi \,.\, 2\rho^2 \,.\, 4\rho = \frac{8}{3}\pi\rho^3,$$

καὶ ἑπομένως:

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{32}{27}\pi\rho^3}{\frac{8}{3}\pi\rho^3} = \frac{4}{9}\,.$$

Πρόβλημα 852

2052. **Νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαῖραν ὁ μέγιστος κῶνος.**

Ὁ κῶνος ΓΔΔ' γίνεται μέγιστος ὅταν καὶ ὁ τριπλάσιος αὐτοῦ κύλινδρος (ΔΔ', ΓΗ) καταστῇ μέγιστος, δηλ. διὰ $\Gamma H = \frac{4}{3}\rho$. Ἑπομένως (§ 2051, β):

$$V\,(\text{μεγ. κώνου}) = \frac{1}{3}V\,(\text{μεγ. κυλίνδρου}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{32}{27}\pi\rho^3 = \frac{32}{81}\pi\rho^3.$$

Πρόβλημα 853

2053. **Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ περιγραφῇ ὁ ἐλάχιστος κῶνος.**

Κατὰ τὰ ἐν § 387, θὰ πρέπει νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην ΑΒΓ τοιαύτην, ὥστε

$$AB = \frac{B\Gamma}{2}$$

καὶ ὁ κῶνος ΑΓΔ θὰ εἶναι ὁ ἐλάχιστος (σχ. 1282).

Διότι ἔστω ὅτι ὁ ἐλάχιστος κῶνος ἦτο ἄλλος, ὁ μὲ γενέτειραν ΙΙ' λ. χ. Ἔστω Κ τὸ σημεῖον τὸ διαιροῦν αὐτὴν κατὰ λόγον $\frac{I'K}{IK} = \frac{2}{1}$, ΜΒΝ παράλληλος πρὸς αὐτὴν (εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΓΔ πάντοτε) διὰ τοῦ Β ἀγομένη, καὶ Λ τὸ ἀντίστοιχον τοῦ Κ σημεῖον ἐπ' αὐτῆς.

Ὡς εἴδομεν προηγουμένως, ὁ κύλινδρος μὲ ἀκτῖνα ΛΡ καὶ ὕψος ΛΠ εἶναι μεγαλύτερος τυχόντος ἄλλου κυλίνδρου, ἐκ τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸν κῶνον γενετείρας ΜΝ, ἄρα καὶ τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα ΘΗ καὶ ὕψος ΒΘ. Ὁ δὲ τελευταῖος οὗτος θὰ εἶναι, κατὰ μείζονα λόγον, μικρότερος τοῦ κυλίνδρου Κ (μεγαλυτέρου προφανῶς τοῦ ΗΠΛΡ), τοῦ μεγίστου ἐκ τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸν κῶνον γενετείρας ΙΙ'.

Ἀλλ' ὁ κῶνος ΑΓΔ εἶναι τὰ $\frac{9}{4}$ τοῦ κυλίνδρου Β (§ 2051, γ, ἐπαλήθευσις) καὶ ἑπομένως μικρότερος τοῦ κώνου ΙΙ', ὄντος τὰ $\frac{9}{4}$ τοῦ κυλίνδρου Κ.

Σχ. 1282

Παρατηρήσεις. 1) Εἶναι:

$$ΓΣ = ΣΗ = 2ρ, \quad ΓΗ = 4ρ, \quad ΑΗ^2 = 2ρ^2. \qquad (\S\ 2051, β)$$

Ἑπομένως, διὰ τὸν ἐλάχιστον κῶνον:

$$V\,(\min.) = \frac{πΑΗ^2 . ΓΗ}{3} = \frac{8}{3}πρ^3,$$

ἢ διπλάσιος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας. Ἡ ὁλική του ἐπιφάνεια εἶναι $8πρ^2$.

Ὁ ἐλάχιστος κῶνος εἶναι ἐπίσης καὶ ὁ ἐλαχίστης ὁλικῆς ἐπιφανείας (§ 1909).

Πρόβλημα 853—Ι

2054. **Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ περιγραφῇ ἡ ἐλαχίστη κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμίς. Ποῖος ὁ ὄγκος ταύτης; (Σχ. 1282).**

Ὡς καὶ προκειμένου περὶ τοῦ ἐλαχίστου περιγεγραμμένου κώνου, θὰ πρέπει τὸ ὕψος αὐτῆς υ νὰ εἶναι 4 ρ (§ 2051, β).

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδος, θεωροῦμεν τὰ τρίγωνα: Ε τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐκ τοῦ Γ ἑδρῶν, Ε' καθ' ὃ

τέμνεται ἡ πυραμὶς ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ E καὶ E'' τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος — πάντα ἰσόπλευρα. Θὰ ἔχωμεν

$$(E) = \frac{2}{3}\rho^2\sqrt{3}, \quad (E') = 4\,(E) = \frac{8}{3}\rho^2\sqrt{3}$$

καὶ

$$\frac{(E')}{(E'')} = \left(\frac{\frac{2}{3}\upsilon}{\upsilon}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Ὥστε

$$(E'') = \frac{9}{4}(E') = \frac{9}{4}.4\,E = 6\rho^2\sqrt{3}$$

καὶ

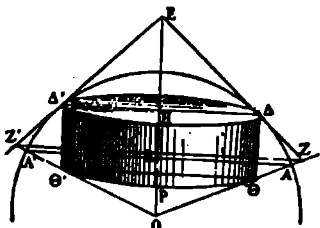
$$V\,(\text{min.}) = \frac{(E'')\,.\,\upsilon}{3} = 8\,\rho^3\sqrt{3}.\;(^{120})$$

Παρατήρησις. Οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν τῆς ἐλαχίστης περιγεγραμμένης περιφερείας, τὸ ὕψος αὐτῆς εἶναι πάντοτε 4ρ.

Πρόβλημα 854

2055. **Νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαιρικὸν τομέα ὁ μέγιστος κύλινδρος.**

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 393).



Σχ. 1283.

Παρατήρησις. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου αὐτοῦ, θὰ πρέπει νὰ καταφύγωμεν εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν.

Ἔστω $A\widehat{O}B = \alpha$, ὁπότε

$OB = \rho$ συν α καὶ $AB = \rho$ ημ α.

Ἐπειδὴ δὲ (§ 393), $E\Delta = 2\,\Delta Z$

καὶ $E\Delta = \rho$ εφ $EO\Delta$,

$\Delta Z = \rho$ εφ ΔOZ,

ἕπεται

$$\text{εφ}\,\Delta OE = 2\,\text{εφ}\,AO\Delta$$

ἤ, ἂν τεθῇ $\Delta\widehat{O}E = \gamma$, $AO\Delta = \beta$,

$$\text{εφ}\,\gamma = 2\,\text{εφ}\,\beta, \quad \text{ὅπου } \gamma + \beta = \alpha.$$

Ἀλλ' εἶναι

$$\text{εφ}\,\alpha = \text{εφ}\,(\beta+\gamma) = \frac{\text{εφ}\,\beta + \text{εφ}\,\gamma}{1 - \text{εφ}\,\beta\;\text{εφ}\,\gamma} = \frac{3\,\text{εφ}\,\beta}{1 - 2\,\text{εφ}^2\beta}.$$

Ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τελευταίου μέλους τῆς τριπλῆς ταύτης ἰσότητος λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν πρὸς εφ β:

$$2\,\text{εφ}^2\beta\,.\,\text{εφ}\,\alpha + 3\,\text{εφ}\,\beta - \text{εφ}\,\alpha = 0,$$

ἐξ ἧς:

$$\text{εφ}\,\beta = \frac{\sqrt{9 + 8\,\text{εφ}^2\alpha} - 3}{4\,\text{εφ}\,\alpha},$$

---

120. **Σημ. μετ.** Ἐπεβραχύναμεν τοὺς ὑπολογισμοὺς τοῦ κειμένου.

ἐκλέγοντες, προφανῶς, ἐκ τῶν δύο ριζῶν τὴν θετικήν. Ὁρίζεται οὕτω ἡ γωνία β ἐκ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς, ἄρα καὶ ἡ γωνία γ.

Τὰ μήκη $\Delta H = \rho\ \eta\mu\ \gamma,$

$$\Delta\Theta = HO - OP = \rho\ \sigma\upsilon\nu\ \gamma - OP = \rho\ \sigma\upsilon\nu\ \gamma - \Theta P\ \varepsilon\varphi\ \alpha$$

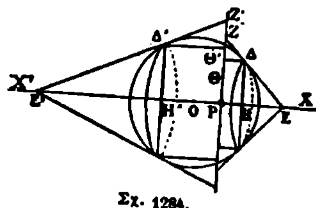
ὁρίζονται ἐπίσης, ἀφοῦ

$$\Theta P = \Delta H = \rho\ \eta\mu\ \gamma.$$

Πρόβλημα 855

2056. Εἰς σφαιρικὸν τμῆμα μὲ μίαν βάσιν, νὰ ἐγγραφῇ ὁ μέγιστος κύλινδρος.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 393).



Σχ. 1284.

Διὰ τὸ ἀριστερὰ τῆς ΡΖ σφαιρικὸν τμῆμα (σχ. 1284), θὰ πρέπει νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην ΕΔΖ τοιαύτην, ὥστε

$$\Delta E = 2\,\Delta Z.$$

Ὁ μέγιστος κύλινδρος εἶναι ὁ ἔχων ὕψος ΡΗ καὶ ἀκτῖνα βάσεως ΔΗ. Ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $\pi\Delta H^2 . PH$ ἢ (§ 317, θ, ι):

$$V = \frac{-2\alpha^2 + 6\rho^2 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}}{9} \cdot \frac{-2\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}}{3} =$$

$$= \frac{2}{27}\pi\left[\alpha^3 - 9\alpha\rho^2 + (\alpha^2 + 3\rho^2)\sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}\right].$$

Διὰ τὸ ἀριστερὰ σφαιρικὸν τμῆμα ἔχομεν ὁμοίως:

$$V' = \pi\,\frac{-2\alpha^2 + 6\rho^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}}{9} \cdot \frac{2\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}}{3} =$$

$$= \frac{2}{27}\pi\left[-\alpha^3 + 9\alpha\rho^2 + (\alpha^2 + 3\rho^2)\sqrt{\alpha^2 + 3\rho^2}\right].$$

Πρόβλημα 855—I

2057. Εἰς δοθὲν σφαιρικὸν τμῆμα νὰ περιγραφῇ ὁ ἐλάχιστος κῶνος.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 394).

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς εἰδικὴν περίπτωσιν τοῦ τμήματος τὸ ἡμισφαίριον. Θὰ εἶναι τότε (σχ. 1284):

$$PE = OE = \rho\sqrt{3}. \qquad (\S\ 316,\ \alpha)$$

Εἶναι δηλ. τὸ ὕψος τοῦ ἐλαχίστου κώνου ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας ἐγγραφομένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Πρόβλημα 856

2058. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαῖραν τὸ μέγιστον κανονικὸν τριγωνικὸν πρίσμα.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 397)

Πρόβλημα 856—I

2059. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαῖραν τὸ μέγιστον κανονικὸν πρῖσμα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει δεδομένου πλήθους πλευράς.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 399).

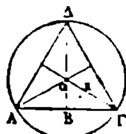
Πρόβλημα 857

2060. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαῖραν κύλινδρος ἔχων τὴν μεγίστην κυρτὴν ἐπιφάνειαν.

Ἔστω x ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου καὶ $2y$ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἡ παράπλευρος αὐτοῦ ἐπιφάνεια εἶναι $4\pi xy$.

Ἐπειδὴ δὲ
$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$
ἕπεται (§ 345):
$$x = y = \frac{\rho}{\sqrt{2}}.$$

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀνάλογον ἐκείνου τῆς ἐγγραφῆς εἰς κύκλον δοθέντα τοῦ μεγίστου ὀρθογωνίου· ἐπειδὴ ἡ μεταβολὴ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐξαρτᾶται ἐκ μόνου τοῦ γινομένου xy.



Σχ. 1285.

2) Ἀναλόγως ἐπιλύομεν τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ἡ ἐγγραφὴ κανονικοῦ πρίσματος μεγίστης παραπλεύρου ἐπιφανείας.

Διὰ τὸ τριγωνικὸν λ. χ. πρῖσμα, παραστήσωμεν τὸ ὕψος αὐτοῦ διὰ $2y$ καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὴν βάσιν διὰ x. Ἐπειδὴ
$$OB = \frac{x}{2},\quad AB^2 = \frac{3}{4}x^2,\quad AB = \frac{x}{2}\sqrt{3},$$
ἡ περίμετρος τῆς βάσεως εἶναι $2\tau = 6\,AB = 3x\sqrt{3}$ καὶ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια
$$E = 2\tau \,.\, 2y = 6xy\sqrt{3}.$$

Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ ἔχωμεν καὶ πάλιν
$$x = y = \frac{\rho}{\sqrt{2}},$$
καὶ ἑπομένως
$$E(\max.) = 6\sqrt{3}.\frac{\rho^2}{2} = 3\rho^2\sqrt{3}.$$

3) Ἐὰν ζητῆται ὁ μεγίστης κυρτῆς ἐπιφανείας κύλινδρος, τοῦ ὁποίου μία τῶν βάσεων εὑρίσκεται ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου ἐνῷ ἡ ἄλλη εἶναι τομὴ σφαιρικὴ παράλληλος πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν ἐγγραφὴν τοῦ μεγίστου ὀρθογωνίου εἰς δοθὲν κυκλικὸν τμῆμα (§ 364, 2). Θὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην διαιρουμένην εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

Πρόβλημα 857—Ι

2061. Εἰς σφαιρικὸν τομέα νὰ ἐγγραφῇ ὁ μεγίστης κυρτῆς ἐπιφανείας κύλινδρος.

1) Ὡς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν (§ 2060, 3), φέρομεν ἐφαπτομένην ΜΔΝ, διαιρουμένην εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς εἰς δύο μέρη ἴσα.

2) Τὸ γινόμενον τῶν ἐμβαδῶν μεγίστων ὀρθογωνίων, τῶν ἐγγραφομένων εἰς δύο κυκλικοὺς τομεῖς τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ὁλόκληρος ὁ κύκλος, εἶναι σταθερὰ ποσότης ρ^4 (§ 1716). Ἐπειδὴ δὲ μεταβαίνομεν ἐξ ἑκάστου τῶν μεγίστων τούτων ὀρθογωνίων εἰς τὸν ἀντίστοιχον μεγίστης κυρτῆς ἐπιφανείας κύλινδρον διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὴν σταθερὰν 2π, γίνεται φανερὸν ὅτι τὸ γινόμενον τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν ἐν λόγῳ δύο κυλίνδρων εἶναι $4\pi^2R^4$ ἢ $(2\pi R^2)^2$.

Ὥστε : ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἡμισφαιρίου εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν κυλίνδρων τούτων.

Παρατήρησις. Διὰ τὴν ἐγγραφὴν εἰς σφαιρικὸν τμῆμα τοῦ μεγίστης κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, φέρομεν ἐφαπτομένην ΜΔΝ τοιαύτην ὥστε

$$M\Delta = \Delta N,$$

ὁπότε

$$ON = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 8\rho^2}}{2}.$$

Πρόβλημα τοῦ Fermat 857—ΙΙ

2061 α. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαῖραν ὁ μεγίστης ὁλικῆς ἐπιφανείας κύλινδρος.

Ἔστωσαν ρ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, x ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου καὶ y τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψος του.

Τοῦ ἡμίσεος κυλίνδρου ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εἶναι

$$2\pi xy + \pi x^2 = \pi x(2y + x).$$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

καὶ ἐπεξεργαζόμενοι τὸ ζήτημα διὰ τῆς Ἀλγέβρας, εὑρίσκομεν

$$O.E\,(\text{max.}) = \pi\rho^2(1 + \sqrt{5})$$

καὶ

$$x = \frac{\rho}{10}\sqrt{10(5 + \sqrt{5})}.$$

(Βλ. *Cours développé d'Algèbre élémentaire*, ὑπὸ B. Lefebvre, τόμ. II, σ. 269, πρόβλημα XIV. Ἐπίσης: *Exercices d'Algèbre*, ὑπὸ F. G.-M., 5η ἔκδοσις, § 1383).

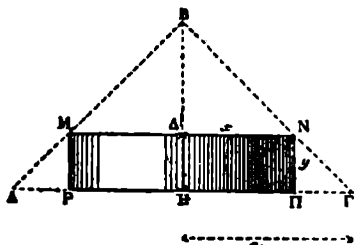
Σημείωσις. 1) Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἐλύθη ὑπὸ τοῦ Fermat, (κατὰ τὸν A. Aubry εἰς τὴν ἐργασίαν αὐτοῦ *Étude élémentaire sur la théorie des maxima et minima*, δημοσιευθεῖσαν εἰς τὴν σ. 49 τοῦ *El Progresso Matemático*, 1900, Σαραγόσσα).

2) Τὸ προμνησθὲν ἔργον τοῦ Lefebvre εἶναι ἀπὸ πολλῶν ἀπό-

ψεων ἀξιόλογον καὶ ἰδιαιτέρως ἕνεκα τῶν πολὺ ἐνδιαφερουσῶν βιογραφικῶν καὶ βιβλιογραφικῶν σημειώσεων τὰς ὁποίας περιλαμβάνει.

Πρόβλημα 858

2062. **Ποῖος ὁ μέγιστος ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν παραγομένων διὰ περιστροφῆς ὀρθογωνίου σταθερᾶς περιμέτρου περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του;**



Σχ. 1286.

Ἔστω x ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως, y τὸ ὕψος τοῦ τυχόντος ἐξ αὐτῶν. Ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι

$$V = \pi x^2 y;$$

ὅπου $\quad x + y = \alpha$ σταθ.

Ἑπομένως, διὰ τὸν μέγιστον κύλινδρον (§ 376):

$$x = \frac{2\alpha}{3}, \quad y = \frac{\alpha}{3},$$

καὶ

$$V\,(\max.) = \pi \frac{4\alpha^2}{9} \cdot \frac{\alpha}{3} = \frac{4\pi\alpha^3}{27}.$$

Ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν (σχ. 1286):

$$\Delta H = \frac{\alpha}{3} \quad \text{καὶ} \quad \Delta N = \frac{2\alpha}{3}.$$

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ τῆς ἐγγραφῆς εἰς δοθέντα κῶνον τοῦ μεγίστου κυλίνδρου. Ὑποθέτομεν πράγματι ὅτι εἰς τὸν κῶνον ΑΒΓ τὸ ὕψος του ΒΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα α βάσεως. Διὰ πάντα ἐγγεγραμμένον κύλινδρον (x, y) εἰς τὸν κῶνον αὐτὸν θὰ εἶναι προφανῶς $x + y = \alpha$. Ἄρα διὰ τὸν μέγιστον (§§ 384, 386):

$$y = \frac{BH}{3} = \frac{\alpha}{3} \text{ καὶ } x = \frac{2\alpha}{3}.$$

Πρόβλημα 858—I

2063. **Ποῖος ὁ μέγιστος κῶνος ἐκ τῶν ἐχόντων ἄθροισμα ὕψους καὶ ἀκτῖνος τῆς βάσεως σταθερόν;**

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τὸ ἴδιον πρὸς τὸ προηγούμενον, ἀφοῦ $V = \frac{\pi}{3} \cdot x^2 y$ καὶ $x + y =$ σταθ $= \alpha$. Ἀλλ' ὁ ὄγκος τοῦ μεγίστου κώνου εἶναι τὸ τρίτον τοῦ μεγίστου κυλίνδρου, ἐκ τῶν ἐχόντων ἄθροισμα ἀντιστοίχων μηκῶν τὸ ἴδιον α.

Πρόβλημα 859

2064. **Ποῖος ὁ μέγιστος κύλινδρος ἐκ τῶν ἐχόντων ὁλικὴν ἐπιφάνειαν δεδομένην $2\pi\alpha^2$;**

Ἔστω x ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ y τὸ ὕψος. Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εἶναι $2\pi\alpha^2 = 2\pi x^2 + 2\pi xy$. Ἐπομένως,

$$x^2 + xy = \alpha^2 \text{ καὶ } V = \pi x^2 y.$$

Κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς § 380, θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν μέγιστον κύλινδρον

$$x^2 = \frac{\alpha^2}{3} \text{ καὶ } y = \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}.$$

ἄρα
$$V(\max.) = \pi.\frac{\alpha^2}{3}\cdot\frac{2\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi\alpha^3\sqrt{3}}{9}.$$

Πρόβλημα 859—I

2065. Δίδονται ἐπίπεδον Π, σφαῖρα καὶ μέγιστος κύκλος αὐτῆς. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ τομὴ τῆς σφαίρας παράλληλος πρὸς τὸ Π τοιαύτη, ὥστε ὁ κολοβὸς ὀρθὸς κύλινδρος, ὁ ἔχων τὴν τομὴν ταύτην ὡς κάτω βάσιν καὶ ἄνω βάσιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μεγίστου κύκλου, νὰ εἶναι ὁ μέγιστος.

1) Ἔστω x ἡ ἀκτὶς τῆς τομῆς καὶ y ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς. Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ εἶναι

$$V = \pi x^2 y, \quad \text{ὅπου } x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Ἐπομένως, διὰ τὸ μέγιστον (§§ 376, 392)

$$x^2 = \frac{2}{3}\rho^2, \quad y = \frac{\rho}{\sqrt{3}}.$$

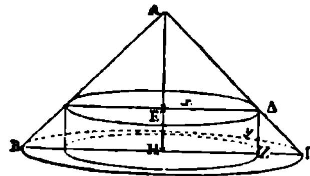
Διὰ τὴν κατασκευήν, θὰ πρέπει νὰ φέρωμεν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον πρὸς τὴν σφαῖραν $\left(O, \frac{\rho}{\sqrt{3}}\right)$, παράλληλον πρὸς τὸ δοθὲν Π.

2) Προεκτείνοντες τὸν μέγιστον τοῦτον κολοβὸν κύλινδρον πέραν τῆς ἄνω βάσεώς του καὶ μέχρι τῆς σφαίρας, λαμβάνομεν τὸν μέγιστον ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὴν κύλινδρον. Ἡ βάσις ἐπομένως, τοῦ κολοβοῦ κυλίνδρου θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν $\frac{2}{3}\pi\rho^2$ (§ 850).

Πρόβλημα 860

2066. Ποῖος ὁ μέγιστος κύλινδρος, ἐκ τῶν ἐγγραφομένων εἰς κῶνον ἀνοίγματος 90° καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια εἶναι δεδομένη $= \pi\alpha^2$;

Ἔστωσαν x ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου, y τὸ ὕψος αὐτοῦ καὶ $\pi\alpha^2$ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. Ἡ γενέτειρα ΑΓ εἶναι ὑποτείνουσα ἰσοσκελοῦς ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τὸ ἄθροισμα, ἐπομένως, $x + y$ (σχ. 1286) εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ ὕψος ΑΗ = ΗΓ τοῦ κώνου.



Σχ. 1286.

Ἐπειδὴ δέ:

$$\pi\alpha^2 = \pi H\Gamma^2 + \pi H\Gamma\,.\,A\Gamma = \pi HA^2 + \pi\,.\,HA\,.\,HA\sqrt{2} = \pi HA^2(1+\sqrt{2}),$$

θὰ εἶναι

$$x + y = HA = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Διὰ τὸν μέγιστον ἑπομένως κύλινδρον (§ 376):

$$x = \frac{2}{3} HA, \quad y = \frac{1}{3} AH$$

καὶ

$$V = \pi \cdot \frac{4}{27} HA^3 = \frac{4\pi}{27}\left(\frac{\alpha}{1+\sqrt{2}}\right)^3.$$

Πρόβλημα 860—I

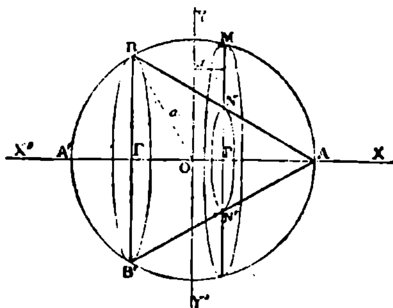
2066 α. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαῖραν ὁ τὴν μεγίστην ὁλικὴν ἐπιφάνειαν ἔχων κῶνος.

Θὰ πρέπει νὰ καταφύγωμεν εἰς τὴν *μέθοδον τῶν ἀπροσδιορίστων συντελεστῶν* διὰ τὴν ἀλγεβρικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, ὡς καὶ διὰ τὸ πρόβλημα τῆς § 1712 (σημ.).

(Βλ. ἐπίσης: *Cours d'algèbre* ὑπὸ F. G.-M., 3η ἔκδ., σ. 306).

Πρόβλημα 860—II

2067. Ἰσόπλευρος κῶνος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς σφαῖραν. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τομῶν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου νὰ εἶναι μεγίστη ἢ ἐλαχίστη.



Σχ. 1288.

Ἡ διὰ τοῦ Α ἢ τῆς βάσεως ΒΒ' τομὴ δίδει διαφορὰν Δ τομῶν ἴσην πρὸς μηδέν, ἐνῷ πᾶσα διάμεσος τομὴ δίδει

$$\Delta = \pi(MP^2 - NP^2).$$

Ὑπάρχει, ἑπομένως (§ 338, Σημ. Μ.), μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Γ θέσις τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, δι' ἣν ἡ διαφορὰ Δ γίνεται μεγίστη.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ κυκλικοῦ δακτυλίου Δ, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν τομὴν ΜΝΝ', ἀρκεῖ νὰ ἐκφράσωμεν τὰ MP^2 καὶ NP^2 συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος α τῆς σφαίρας καὶ τῆς ἀποστάσεως x τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἀπὸ τοῦ κέντρου.

1) $$MP^2 = \alpha^2 - x^2.$$

2) Ἐκ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΝΝ' λαμβάνομεν

$$AP = \frac{AN\sqrt{3}}{2} = PN\sqrt{3}, \quad PN = \frac{AP}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha - x}{\sqrt{3}}.$$

Ἄρα:

$$PN^2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha x + x^2}{3}. \qquad (1)$$

κα

$$\Delta = \pi(MP^2 - PN^2) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha x}{2} - x^2\right). \qquad (2)$$

Αἱ μεταβολαὶ τῆς ποσότητος ταύτης ἐξαρτῶνται φυσικὰ ἀπὸ τὰς μεταβολὰς τῆς διαφορᾶς

$$\frac{\alpha x}{2} - x^2 = x\left(\frac{\alpha}{2} - x\right).$$

Ἀλλ' εἰς αὐτὴν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο παραγόντων x καὶ $\frac{\alpha}{2} - x$ εἶναι σταθερόν, ἴσον πρὸς $\frac{\alpha}{2}$· ἑπομένως, διὰ τὸ μέγιστον τῆς τιμῆς της (§ 343):

$$x = \frac{\alpha}{2} - x \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{\alpha}{4}.$$

Ὥστε:

$$\Delta\,(\text{max.}) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^2}{16}\right) = \frac{3}{4}\pi\alpha^2.$$

2067. Παρατηρήσεις. 1) Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἡ τιμὴ $x = OP$, ἡ καθιστῶσα μεγίστην τὴν παράστασιν

$$y = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha x}{2} - x^2, \qquad (3)$$

εἶναι ἐκείνη ἥτις καθιστᾷ ἐλαχίστην τὴν

$$y' = -y = x^2 - \frac{\alpha x}{2} - \frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Τῆς ἐξισώσεως (3), ἢ τῆς (4), αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαί, ἀφοῦ διὰ $x_1 = -\frac{\alpha}{2} = \left(\left|\frac{\alpha}{2}\right| = O\Gamma,\ \text{σχ. } 1218\right)$ καὶ $x_2 = \alpha$ ἀντιστοιχοῦν αἱ διὰ τῶν Γ καὶ Α τομαὶ διὰ τὰς ὁποίας ἡ διαφορὰ Δ ἄρα καὶ ἡ παράστασις y ἢ y' μηδενίζεται.

Ἐπειδὴ δέ, ὡς γνωστόν, τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν

$$z = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\alpha}{4}$$

τοῦ τριωνύμου (3) εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ x δι' ἣν ἡ τιμὴ τῆς y' γίνεται *ἐλαχίστη* — ἄρα ἡ τιμὴ τῆς y *μεγίστη*, ἕπεται ὅτι: $(OP) = \frac{\alpha}{4}$.

2) *Ἐπέκτασις. Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τῆς κορυφῆς* Α *ἐπὶ τοῦ ἄξονος* xx' *ἢ ἡ κλίσις τῶν γενετειρῶν τοῦ κώνου πρὸς αὐτόν, ἡ διαφορὰ* Δ *γίνεται μεγίστη διὰ τομὴν τῶν δύο στερεῶν ἀγομένην εἰς τὸ μέσον* P *τοῦ ὕψους τοῦ κώνου.*

Ταῦτα γενικεύονται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ γενέτειραι τοῦ κώνου δὲν συναντοῦν τὴν σφαῖραν. Οὕτω:

3) *Ἐὰν* $\Delta = px^2 + qx + r$ *εἶναι ἡ ἔκφρασις τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δακτυλίου εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ γενέτειραι τοῦ κώνου δὲν συναντοῦν τὴν σφαῖραν, ὁ ἐλάχιστος δακτύλιος ἀντιστοιχεῖ εἰς τομὴν δι' ἣν*

$$OP = x = \frac{-q}{2p}.$$

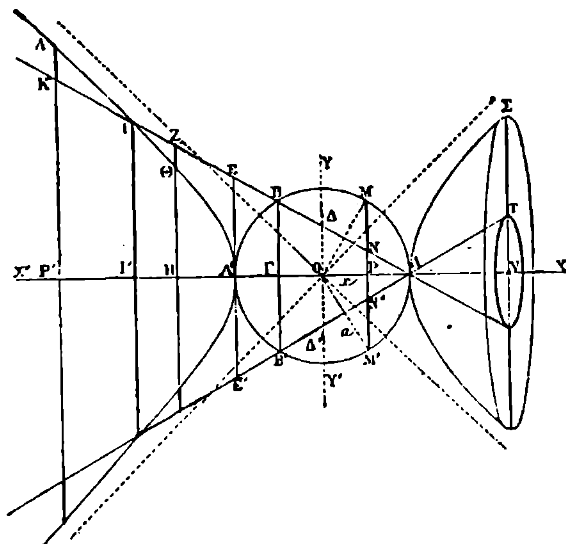
2068. *Γεωμετρικαὶ παρατηρήσεις.* Ὡς εἴδομεν, ὁ δακτύλιος Δ ἔχει ὡς ἔκφρασιν, συναρτήσει τῆς ἀποστάσεως x τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο τῆς σφαίρας, τὴν

$$\Delta = \frac{2}{3}\pi(\alpha^2 + \alpha x - 2x^2)$$

ἢ τὴν

$$\Delta = -\frac{4}{3}\pi\left(x^2 - \frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

Διὰ μεταβολὰς τοῦ x ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, ἡ παράστασις Δ



Σχ. 1289.

εἶναι θετικὴ διὰ τιμὰς τοῦ x μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $x^2 - \frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha^2}{2}$ [121], μηδενίζεται εἰς τὰς τιμὰς ταύτας καὶ παρα-

121. Σημ. μετ. Καὶ αἵτινες ὑπάρχουν, ἀφοῦ ἡ διακρίνουσα D τούτου εἶναι θετική. $D = \frac{\alpha^2}{4} + 2\alpha > 0.$

μένει ἀρνητικὴ διὰ τιμὰς τοῦ x ἐκτὸς τῶν ριζῶν. Οὕτω διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x ἡ παράστασις Δ ἔχει ἐπίσης πραγματικὴν τιμή.

Καὶ διὰ τιμὰς μὲν τοῦ x μεταξὺ $-\alpha$ καὶ α, δηλ. διὰ θέσεις Ρ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Α′ (σχ. 1289), ἡ γεωμετρικὴ σημασία τῆς διαφορᾶς Δ εἶναι φανερὰ — ἀφοῦ εἰς ταύτας ἀντιστοιχοῦν πραγματικαὶ τομαὶ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου. Ποίαν σημασίαν ὅμως θὰ προσδώσωμεν εἰς αὐτὴν διὰ $x > \alpha$, ἢ $x < -\alpha$, διὰ θέσεις δηλ. τοῦ Ρ ἐκτὸς τοῦ διαστήματος ΑΑ′;

Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο δίδεται ἐὰν θεωρήσωμεν τὸν μὲν κῶνον ἀπέρατον ἑκατέρωθεν τῆς κορυφῆς του Α — *δίχωνος κῶνος* — καὶ τὴν σφαῖραν συμπληρουμένην διὰ τοῦ *συμπληρωματικοῦ* αὐτῆς σχήματος ἑνὸς ἰσοπλεύρου διχώνου ὑπερβολοειδοῦς.

Ὁ μέγιστος κύκλος ΑΜΑ′ τῆς σφαίρας ἔχει ἐξίσωσιν πρὸς τοὺς ἄξονας τοῦ σχήματος τὴν

$$x^2 + y^2 = \alpha^2,$$

ἡ δὲ ἰσόπλευρος ὑπερβολή, μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α′, τὴν

$$x^2 - y^2 = \alpha^2.$$

Οὕτω, ἡ τεταγμένη ΜΡ δίδεται ὑπὸ τῆς ἰσότητος

$$MP^2 = y^2 = \alpha^2 - x^2,$$

ἐνῷ ἡ τεταγμένη ΣV τῆς ὑπερβολῆς ὑπὸ τῆς

$$\Sigma V^2 = y^2 = x^2 - \alpha^2.$$

Διὰ τῶν συμπληρώσεων τούτων τῶν δύο στερεῶν βλέπομεν ὅτι, διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x ὑπάρχουν πάντοτε πραγματικαὶ τομαὶ ὑπὸ τῶν ἀντιστοίχων τῆς τιμῆς ταύτης ἐπιπέδων· ἡ δὲ σπουδὴ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν τομῶν γίνεται ὁμοίως.

Διὰ τὰς τομὰς λ.χ. τὰς πέραν τοῦ σημείου Α′, ἡ διαφορὰ $\Delta = \pi(HZ^2 - H\Theta^2)$ εἶναι θετικὴ μέχρι τοῦ σημείου Ι′. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, ἀντίστοιχον τῆς τομῆς Ι τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς γενετείρας τοῦ κώνου, μηδενίζεται καὶ πέραν αὐτοῦ παραμένει ἀρνητική.

Διὰ τὴν πλήρη σπουδὴν τοῦ ὅλου ζητήματος βλέπε ***Appendice aux Exercices de Géométrie***, nº 819, σ. 92. Θὰ ὑποδείξωμεν ἐνταῦθα τὰ συμπεράσματα μόνον ἐκ ταύτης.

2068 α. Σύνοψις. 1) Ἐὰν ἀντιστοιχίσωμεν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Ρ(x) τῆς ΑΓ τεταγμένην y τοιαύτην, ὥστε

$$y^2 = MP^2 - NP^2,$$

λαμβάνομεν ὡς τόπον τῶν σημείων (x, y) μίαν ἔλλειψιν, ἐκ περιστροφῆς τῆς ὁποίας περὶ τὸν ἄξονα ΑΓ παράγεται ἐλλειψοειδὲς μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ καὶ ὄγκον ἴσον πρὸς τὸν τοῦ στερεοῦ, τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ κυκλ. τμήματος ΑΜΒ περιστρεφομένου περὶ τὸν ἴδιον ἄξονα.

Τὸ μέγιστον τοῦ κυκλικοῦ δακτυλίου Δ λαμβάνεται διὰ τομῆς εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΑΓ· ἐπειδὴ τὸ τέμνον τότε ἐπίπεδον θὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλλειψοειδοῦς. Εἶναι δὲ τὸ

μέγιστον τοῦτο $\frac{3}{4}\pi\alpha^2$ καὶ ἑπομένως ὁ ἡμιάξων β τοῦ ἐλλειψοειδοῦς θὰ εἶναι

$$\beta = \frac{\alpha}{2}\sqrt{3}.$$

Πέραν τῶν σημείων Α καὶ Γ, τὸ ἐλλειψοειδὲς ἀντικαθίσταται ὑπὸ διχώνου ὑπερβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, ἔχοντος τὰς αὐτὰς κορυφὰς Α καὶ Γ μετὰ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς καὶ τοὺς ἰδίους ἄξονας.

2) Ἀνάλογα συμβαίνουν καὶ διὰ πάντα κῶνον, τοῦ ὁποίου ἡ γενέτειρα τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα.

3) Ἐὰν ἡ γενέτειρα τοῦ κώνου ἐφάπτεται τῆς περιφερείας εἰς Τ, τὸ προηγούμενον ἐλλειψοειδὲς περιορίζεται εἰς τὴν προβολὴν Τ′ τοῦ Τ ἐπὶ τοῦ ἄξονος· τὸ δὲ ὑπερβολοειδὲς ἀποβαίνει δίχωνος κῶνος μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον τοῦτο Τ′.

4) Ἐὰν ἡ γενέτειρα τοῦ κώνου δὲν συναντᾶ τὴν περιφέρειαν, λαμβάνομεν μονόχωνον ὑπερβολοειδές. Ὁ ἄξων ΧΧ′ εἶναι ὁ μὴ διατέμνων τὴν γενέτειραν τούτου ὑπερβολὴν ἄξων.

Τὸ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ὑπερβολοειδοῦς ἀγόμενον ἐπίπεδον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν ἐλάχιστον δακτύλιον.

Παραθέτομεν κατωτέρω τὴν ἐκφώνησιν ἑνὸς γενικωτέρου τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

2068 β. Γενικὸν Θεώρημα. Ἔστωσαν ὁσαιδήποτε καμπύλαι δευτέρου βαθμοῦ ἔχουσαι ἕνα τῶν ἀξόνων των ἐπὶ εὐθείας Χ′ΟΧ καὶ ὡς κορυφὰς οἱαδήποτε σημεῖα τῆς εὐθείας ταύτης, καθὼς καὶ ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι ὁπωσδήποτε διατεθειμέναι ὡς πρὸς τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν Χ′ΟΧ. Πᾶσαι αἱ γραμμαὶ αὗται στρέφονται περὶ τὸν ἄξονα ΟΧ καὶ παράγουν τὰς γνωστὰς ἐπιφανείας: κυλίνδρους, κώνους, ἐλλειψοειδῆ, ὑπερβολοειδῆ, παραβολοειδῆ. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ὄγκων [122] εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸν ὄγκον ἑνὸς στερεοῦ (Σ) ἐκ περιστροφῆς, ἔχοντος ὡς μεσημβρινὸν καμπύλην δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἄξονα ἐπὶ τοῦ ΟΧ. (*Appendice aux Exercices de Géométrie*, nº 819).

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης προκύπτει ὅτι αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος τῶν τομῶν τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν διὰ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα περιστροφῆς, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἴδους τοῦ στερεοῦ (Σ).

1) Ἐὰν τὸ στερεὸν (Σ) ἀποτελῆται ἐξ ἑνὸς ἐλλειψοειδοῦς καὶ τοῦ ὑπερβολοειδοῦς μὲ δύο χώνας συμπληρωματικάς, θὰ ὑπάρχῃ μία μεγίστη τομὴ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ ἐλλειψοειδοῦς.

2) Ἐὰν τὸ στερεὸν (Σ) εἶναι μονόχωνον ὑπερβολοειδές, θὰ ὑπάρχῃ μία ἐλαχίστη τομή.

3) Ἡ ἐλαχίστη τομὴ θὰ εἶναι περιωρισμένη εἰς σημεῖον Ο ἐὰν τὸ στερεὸν (Σ) εἶναι κῶνος δίχωνος ἢ ἐὰν ἀποτελῆται ἐκ δύο παραβολοειδῶν τῆς αὐτῆς κορυφῆς Ο καὶ διευθύνσεων ΟΧ καὶ ΟΧ′.

Θεώρημα 860—III

2068 γ. Δίδονται σφαῖρα, σημεῖον σταθερὸν Α καὶ θεωροῦμεν τοὺς κώνους μὲ κορυφὴν Α καὶ ὁδηγοὺς τὰς τομὰς τῆς σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέ-

---

122. Σημ. μετ. Μεταξὺ ἑκάστης τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν καὶ δύο καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα περιστροφῆς τομῶν αὐτῆς.

δων (Π) διερχομένων διὰ δευτέρου σταθεροῦ σημείου Β. Δείξατε ὅτι αἱ δεύτεραι τομαὶ τῶν κώνων τούτων καὶ τῆς σφαίρας κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδων Ρ διερχομένων διὰ τρίτου σταθεροῦ σημείου Β'. (Προταθὲν ὑπὸ τοῦ Mannheim καὶ λυθὲν ὑπὸ τοῦ Sollertinsky. *J. M. E.*, 1890, σ. 207).

Θεωροῦντες τὸ ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τῶν σημείων Α καὶ Β, ἀναγόμεθα εἰς γνωστὸν ζήτημα (§§ 1236 καὶ 1237)

Τόπος 860—IV

2068 δ. **Ποῖος ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν κυκλικῶν τομῶν ἑνὸς πλαγίου κυκλικοῦ κώνου;**

Ἔστω ΑΒΓ ἡ τομὴ τοῦ κώνου, ἡ ἀγομένη διὰ τῆς κορυφῆς Γ αὐτοῦ, τοῦ κέντρου Μ τῆς βάσεως καὶ καθέτου ἐπ' αὐτήν. Ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλλήλων τῆς βάσεως κυκλικῶν τομῶν εἶναι ἡ διάμεσος ΓΜ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ὡς γνωστόν, αἱ ἀντιπαράλληλοι πρὸς τὴν βάσιν κυκλικαὶ τομαὶ τοῦ κώνου εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΓΤ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς αὐτό, αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν Α'Β', δι' ἣν

ΓΑ' = ΓΑ καὶ ΓΒ' = ΓΒ.

Ὁ τόπος κατὰ συνέπειαν τῶν ζητουμένων κέντρων εἰς τὸ πρωτεῦον τοῦ κώνου ἐπίπεδον ΓΑ'Β' εἶναι ἡ διάμεσος ΓΜ'Δ τοῦ τριγώνου Α'ΓΒ', δηλ. ἡ συμμετροδιάμεσος ἐκ τοῦ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Θὰ ἠδυνάμεθα ἐπίσης κατὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ Chalses νὰ ἐφέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΖ, ΒΖ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΖ.

Σχ. 1290.

Τόπος 860—V

2068 ε. Διὰ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ΣΑ, ΣΒ φέρομεν δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπ' ἄλληλα. Ποῖος ὁ τόπος τῆς τομῆς ΣΓ τῶν ἐπιπέδων τούτων; (J. M. E. S., 1881, σ. 447).

Ἔστω ΜΝΛ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΣΑ καὶ τέμνον τὴν ΣΒ εἰς Μ καὶ τὴν ΣΓ εἰς Λ. Ἐπειδή, κατὰ τὴν πρότασιν τῆς § 1901 α, τὸ τρίγωνον ΜΛΝ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Λ, τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ κεῖται ἐπὶ περιφερείας μὲ διάμετρον ΜΝ καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΣΑΒ. Εἶναι ἐπομένως ὁ τόπος τῆς εὐθείας ΣΓ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πλαγίου κυκλικοῦ κώνου μὲ κορυφὴν τὸ Σ καὶ ὁδηγὸν τὴν περιφέρειαν διαμέτρου ΜΝ.

Εἰς τὸν κῶνον τοῦτον αἱ διευθύνσεις τῶν κυκλικῶν τομῶν εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰ κάθετα ἐπίπεδα ἐπὶ τὰς ΣΑ καὶ ΣΒ εὐθείας.

Πρόβλημα 860—VI

2068ζ. Δοθέντος κυλίνδρου μὲ βάσεις B καὶ B′, στρέφομεν τὴν μίαν βάσιν B αὐτοῦ περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου καὶ ταυτοχρόνως ἀναβιβάζομεν αὐτήν, παραλλήλως πάντοτε πρὸς ἑαυτήν, εἰς τρόπον, ὥστε αἱ γενέτειραι τοῦ κυλίνδρου νὰ διατηρήσωσιν τὸ ἀρχικόν των μῆκος λ καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐπὶ τῆς ἄνω (ἀκινήτου) καὶ κάτω βάσεως τοῦ κυλίνδρου.

Εὕρετε τὸν ὄγκον τοῦ οὕτω παραγομένου νέου στερεοῦ (Σ).

1) Ἐὰν αἱ γενέτειραι αὐτοῦ τέμνωνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

2) Ἐὰν ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἄξονος εἶναι δ.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ γωνία στροφῆς περὶ τὸν ἄξονα εἶναι 180°, αἱ γενέτειραι συναντοῦν τὸν ἄξονα εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ τὸ στερεὸν (Σ) ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἴσων κώνων. Τὸ διπλάσιον τοῦ ὕψους ἑκάστου εἶναι

$$υ = \sqrt{λ^2 - 4ρ^2} \quad \text{(ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου)}$$

καὶ ἑπομένως

$$V = \frac{πρ^2}{3}\sqrt{λ^2 - 4ρ^2}.$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, τὸ στερεὸν Σ εἶναι τμῆμα μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς, μὲ περιφέρειαν λαιμοῦ ἀκτῖνος δ καὶ βάσεις ἴσας ἀκτῖνος ρ. Ἡ χορδὴ τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, καθ' ἣν προβάλλεται ἐπ' αὐτὴν ἡ τυχοῦσα (νέα) γενέτειρα, εἶναι

$$2\sqrt{ρ^2 - δ^2}$$

καὶ ἑπομένως

$$υ = \text{ὕψος τοῦ τμήματος} = \sqrt{λ^2 - 4(ρ^2 - δ^2)}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος τμήματος ὑπερβολοειδοῦς μονοχώνου, περιεχομένου μεταξὺ τοῦ λαιμοῦ αὐτοῦ καὶ τομῆς καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ, εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὄγκον ἰσοϋψοῦς κυλίνδρου ἔχοντος βάσιν τὸ ἄθροισμα τῶν $\frac{2}{3}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου-λαιμοῦ τῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἑτέρας βάσεως αὐτοῦ, ἕπεται

$$V = 2\,\frac{\sqrt{λ^2 - 4(ρ^2 - δ^2)}}{2}\,.\,π\,.\,\frac{2δ^2 + ρ^2}{3}\,. \quad \text{(G. n° 951)}$$

2068η. *Σημείωσις*. 1) Ἀνάλογον πρόβλημα δύναται νὰ τεθῇ καὶ διὰ κόλουρον κῶνον.

2) Τὸ *Appendice aux Exercices de Géométrie* περιέχει ἀρκετὰ μεγάλον ἀριθμὸν ἐνδιαφερόντων ζητημάτων ἐπὶ τῶν ὄγκων τῶν ἐλλειψοειδῶν, ὑπερβολοειδῶν, παραβολοειδῶν, στερεῶν περατουμένων εἰς στρεβλὰ πολύγωνα, κυλινδρικῶν ὀνύχων, μοναστηριακῶν θόλων καὶ σταυροθολίων.

Πρόβλημα 860—VII

2068θ. Ἐκ πασῶν τῶν σφαιρικῶν ζωνῶν μὲ μίαν βάσιν, τῶν ἐχουσῶν δοθεῖσαν ἐπιφάνειαν k^2, ποία ἡ δίδουσα τὸ μέγιστον σφαιρικὸν τμῆμα ;

Εἶναι τὸ ἡμισφαίριον· ἐπειδὴ θεωροῦντες τὸ διπλάσιον τῆς δοθείσης ἐπιφανείας, καταλήγομεν εἰς τὴν σφαῖραν ὡς τὸ μέγιστον ἀντίστοιχον σφαιρικὸν τμῆμα.

Τὰ *Annales de Gergonne* (τόμ. XV, 1824 - 25, σ. 132, 236 ἕως 243, Querret καὶ Tédenat), λύουν τὸ πρόβλημα αὐτό, ὡς καὶ πολλὰ ἄλλα ἀνάλογα, μὲ ἐνδιαφερούσας ἀναπτύξεις.

Πρόβλημα 860— VIII

2068 ι. Ποῖος ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν βάσεων τῶν σφαιρικῶν ζωνῶν μὲ μίαν βάσιν, αἵτινες ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν καὶ ἐφάπτονται εἰς τὴν κορυφήν των δοθέντος ἐπιπέδου καὶ εἰς σταθερὸν σημεῖον P αὐτοῦ; (*A. de G.*, τόμ. III, 1812 - 13, σ. 383).

Ἔστω ρ ἡ ἀκτὶς τῆς μεγίστης κατ' ὄγκον καὶ ἡμισφαιρικῆς, κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, ἐκ τῶν ζωνῶν τούτων. Ὁ τόπος εἶναι ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια μὲ κέντρον τὸ σημεῖον P καὶ ἀκτῖνα 2ρ.

2068 κ. Σημείωσις. 1) *Lituus* [123] ὠνομάσθη ὑπὸ τοῦ Cotes μία καμπύλη (L), ἥτις, εἰς τὸ ἐπίπεδον, παρουσιάζει μερικὰς ἀναλογίας μὲ τὸν προηγούμενον, εἰς τὸν χῶρον, τόπον. Ἡ σπουδή της ἐν τούτοις ἐξέρχεται τῶν ὁρίων τῆς Στοιχειώδους Γεωμετρίας.

Θεωροῦμεν κυκλικοὺς τομεῖς OMN τοῦ αὐτοῦ κέντρου O, τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας καὶ τῶν ὁποίων ἡ μία ἀκτὶς OM ἔχει σταθερὰν διεύθυνσιν OMX, ἐνῷ τῆς ἄλλης ON μεταβάλλεται, ἀφοῦ ἡ γωνία OMN=θ ἀλλάσσει. Ὁ τόπος τῶν σημείων N εἶναι ἡ καμπύλη (L).

Ἡ ἐξίσωσίς της εἰς πολικὰς συντεταγμένας (O, OX) εἶναι

$$(OMN) = \frac{1}{2}\rho^2\theta = \text{σταθ.} \qquad (\theta \text{ εἰς ἀκτίνια})$$

ἢ

$$\rho^2\theta = \alpha^2. \qquad (\text{N. A., 1880, σ. 461})$$

Ἡ καμπύλη ἔχει τὸ σχῆμα τῆς Ἀρχιμηδείου ἕλικος, τὸν ἄξονα OX διὰ ἀσύμπτωτον (διὰ θ → 0), ἀλλὰ καὶ τέμνουσα τὴν εὐθεῖαν ταύτην διὰ θ = νπ, ν ἀκέραιος. Ὁ πόλος O εἶναι καὶ αὐτὸς ἀσυμπτωτικὸν σημεῖον, ἀφοῦ

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{\theta} \to 0, \text{ διὰ } \theta \to \infty.$$

2) Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἐπίσης τὸ ἑπόμενον πρόβλημα:

Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων M, M' *τῶν κυκλικῶν τόξων* MOM' *ἅτινα ἔχουν πάντα τὸ αὐτὸ μῆκος* α *καὶ ἐφάπτονται δοθείσης εὐθείας* OX *εἰς δοθὲν αὐτῆς σημεῖον* O *καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῶν.*

Ἡ λύσις ἐδόθη ὑπὸ τῶν Bérard, Van Utenhove, Tédenat. (*A. d. G.*, 1812 — 1813, τόμ. III, σ. 377).

Εἰς τὴν ὡραίαν αὐτὴν μελέτην τοῦ 1813, δίδεται ὡς ἐξίσωσις τῆς καμπύλης, εἰς πολικὰς συντεταγμένας (O, OX) ἡ

$$\rho = \frac{\alpha\,\text{ημ}\,\theta}{\theta}$$

ἤ, εἰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας (OX, OY OX):

$$\frac{y}{x} = \text{εφ}\left(\frac{\alpha y}{x^2 + y^2}\right).$$

---

123. Σημ. μετ. Λατινιστί, ἡ κυρτὴ ράβδος τῶν Ρωμαίων οἰωνοσκόπων.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εὑρίσκεται καὶ εἰς *Calcul Intégral* τοῦ Bossut.

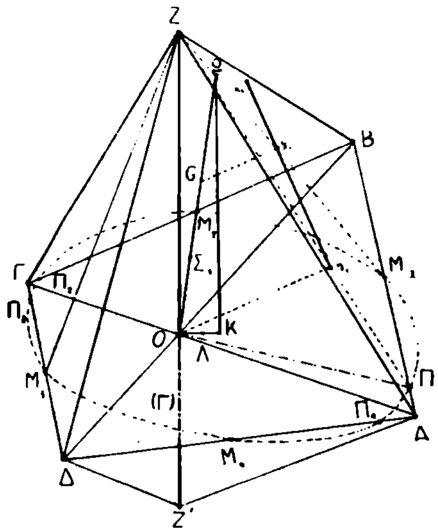
Ἡ καμπύλη αὕτη ὀνομάζεται καὶ *κοχλιοειδὴς* (*Cochléoïde*) καὶ εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς *τετραγωνιζούσης* τοῦ Δεινοστράτους, ὡς, ἄλλωστε, φαίνεται καὶ ἐκ τῆς πολικῆς της μορφῆς. (*Mathesis*, 1885, σ. 89, J. Neuberg, *Courbes remarquables*, τόμ. II, σ. 96, ὑπὸ Gomès Teixeira).

Ἡ *κοχλιοειδὴς* εἶναι κεντρικὴ προβολὴ μιᾶς κυλινδρικῆς ἕλικος ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτῆς, ὅταν τὸ κέντρον προβολῆς εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἕλικος. (Βλέπε ὡραῖον σχετικὸν ἄρθρον τοῦ Aubry εἰς τὸ τρίτον μέρος, σ. 311 τῶν *Récréations mathématiques et problèmes* τοῦ Rouse - Ball, ἔργον δημοσιευθὲν τὸ 1909 ὑπὸ Fitz - Patrick.

Συμπληρώματα εἰς τὰς §§ 1952 α καὶ 1979 δ

2068 λ. Ἀπόδειξις τῆς προτάσεως § 1952 α, 1).

Ἔστω Ζ — ΑΒΓΔ — Ζ′ (σχ. 1290 α) τὸ ἐν λόγῳ ὀκτάεδρον, Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 αἱ προβολαὶ τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τοῦ ὀρθοδιαγωνίου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, η_1, η_2, η_3, η_4 αἱ προβολαὶ τοῦ Ο ἐπὶ τὰς ἐκ τοῦ Ζ ἀντιστοίχους ἕδρας. Ὡς γνωστόν, τὰ σημεῖα $\eta_1 \ldots \eta_4$ εἶναι ὀρθόκεντρα τῶν ἑδρῶν ΖΑΒ... ΖΔΑ, ἕνεκα τῶν τρισορθογωνίων τριέδρων Ο—ΑΒΖ... Ο — ΔΑΖ.



Σχ. 1290 α

Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τὸ τετράπλευρον $\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4$ ἀποδεικνύεται εὐκόλως ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν (Γ). Ἀφ' ἑτέρου, ἑκάστη τῶν κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου τούτου, ἡ κορυφὴ Ζ καὶ τὸ ὀρθόκεντρον τῆς ἀντιστοίχου ἕδρας κεῖνται ἐπ' εὐθείας— τῆς τομῆς τῆς ἕδρας ταύτης καὶ τοῦ διὰ τῆς ΖΟΖ′ καθέτου ἐπ' αὐτὴν ἐπιπέδου.

Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων $ZO\Pi_1$ καὶ $ZO\eta_1$ λαμβάνομεν

$$ZO^2 = k^2 = Z\Pi_1 \,.\, Z\eta_1$$

καὶ ὁμοίως

$$k^2 = Z\Pi_2 \,.\, Z\eta_2 = Z\Pi_3 \,.\, Z\eta_3 = Z\Pi_4 \,.\, Z\eta_4.$$

Εἶναι δηλ. τὰ σημεῖα η_1, η_2, η_3, η_4 ὁμόλογα τῶν Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 ἐν τῇ ἀντιστροφῇ μὲ πόλον Ζ καὶ δύναμιν k^2 καὶ κατ' ἀκολουθίαν κεῖνται ἐπὶ περιφερείας (§ 242) (Γ'), τῆς ὁμολόγου τῆς (Γ) ἐν τῇ ἰδίᾳ ἀντιστροφῇ.

Ἀναλόγως ἀποδεικνύομεν ὅτι τὰ τέσσαρα ὀρθόκεντρα τῶν ἐξ ἑκάστης τῶν πέντε ἄλλων κορυφῶν τοῦ ὀκταέδρου ἀγομένων ἑδρῶν κεῖνται ἐπίσης ἐπὶ περιφερείας—καὶ ἑπομένως, ὅτι τὸ ὀκτακόρυφον τῶν ὀκτὼ ὀρθοκέντρων τῶν ἑδρῶν τοῦ δοθέντος ὀκταέδρου ἔχει τὰς ἰδιότητας τοῦ ἑξαέδρου τῆς § 1947. Εἶναι δηλ. ἐγγράψιμον εἰς σφαῖραν (Σ).

2068 μ. Ἀπόδειξις τῆς προτάσεως § 1952 α. 2).

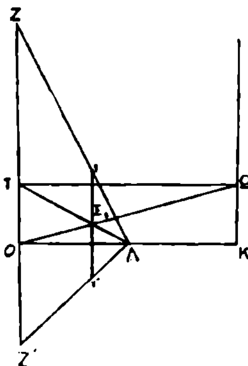
1) Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ὀκτάεδρον Ζ — ΑΒΓΔ — Ζ' εἶναι ἐγγράψιμον εἰς σφαῖραν, ἧς τὸ κέντρον ἔστω Ω. Θὰ εἶναι τότε καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν — κέντρου Κ—καὶ ἑπομένως (§ 749), ἡ προηγουμένως θεωρηθεῖσα περιφέρεια (Γ) θὰ διέρχεται καὶ διὰ τῶν μέσων M_1, M_2, M_3, M_4 τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Τὸ κέντρον αὐτῆς Λ εἶναι τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΟΚ (§ 742).

Ἂς εἶναι $g_1 \ldots g_4$ τὰ κέντρα βάρους τῶν ἐκ τοῦ Ζ ἑδρῶν τοῦ ὀκταέδρου. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι προφανῶς ὁμοιόθετα τῶν $M_1 \ldots M_4$ ἐν τῇ ὁμοιοθεσίᾳ κέντρου Ζ καὶ λόγου $\frac{ZM_1}{Zg_1} = \frac{3}{2}$, εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας (γ) ὁμοιοθέτου τῆς (Γ) ἐν τῇ ὁμοιοθεσίᾳ ταύτῃ καὶ τῆς ὁποίας (περιφερείας) τὸ κέντρον γ θὰ κεῖται εἰς τὰ $\frac{2}{3}$, ἀπὸ τοῦ Ζ, τοῦ μήκους ΖΛ (Σχ. 1290 β). Ὁμοίως, τὰ κ. βάρους τῶν ἐκ τοῦ Ζ' ἑδρῶν τοῦ ὀκταέδρου θὰ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας (γ') — *ἴσης* πρὸς τὴν (γ), ὡς ὁμοιοθέτου, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τῆς (Γ) — καὶ τῆς ὁποίας τὸ κέντρον γ' θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς Ζ'Δ, εἰς θέσιν ἐπ' αὐτῆς ὁμοίαν ἐκείνης τοῦ γ ἐπὶ τῆς ΖΛ.

Κεῖνται ἑπομένως τὰ ὀκτὼ κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν τοῦ ὀκταέδρου ἐπὶ *δύο ἴσων καὶ παραλλήλων περιφερειῶν καὶ τῶν ὁποίων τὰ κέντρα γ, γ' εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας γγ' καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον* ΑΒΓΔ. Ἀνήκουν ἄρα τὰ ὀκτὼ ταῦτα σημεῖα εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν (Σ_1) καὶ τῆς ὁποίας τὸ κέντρον Σ_1 εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος γγ'.

2) Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τῆς σφαίρας (Σ_1) τὸ κέντρον Σ_1 κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΩ καὶ διαιρεῖ αὐτὴν κατὰ λόγον 1 : 2.

Ἔστω, πράγματι, (Ρ) (Σχ. 1290 β) τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΩΚ, ΖΖ' κλπ., Τ ἡ τομὴ τῶν $Λ\Sigma_1$ καὶ ΖΖ'. Ἐπειδή, ἐκ τοῦ σχήματος ΖΤ = ΤΖ', τὸ σημεῖον Τ εἶναι προβολὴ τοῦ κέντρου Ω τῆς σφαίρας (Ω) ἐπὶ τὴν ΖΖ', τὸ σχῆμα ΟΤΩΚ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ τὸ σημεῖον Σ_1, τὸ διαιροῦν κατὰ λόγον 1 : 3 τὴν συνδέουσαν εὐθεῖαν τὸ μέσον Λ τῆς ΟΚ μετὰ τῆς κορυφῆς Τ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου, κεῖται ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΟΩ καὶ διαιρεῖ αὐτὴν εἰς λόγον $Ο\Sigma_1 : \Sigma_1Ω = 1 : 2$.



Σχ. 1290 β

3) Λέγω τώρα ὅτι αἱ σφαῖραι (Σ) καὶ (Σ_1) ταυτίζονται. Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο, ὅτι τὰ σημεῖα η_1 (ὀρθόκεντρον) g_1 (κ. βάρους) καὶ κ_1 (κέντρον περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὴν ἕδραν ΖΑΒ) κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, κατὰ πρότασιν τοῦ Euler, καὶ εἶναι $\eta_1 g_1 = 2 \cdot g_1\kappa_1$. Ἐπειδὴ δέ, αἱ εἰς τὰ $\kappa_1 \ldots \kappa_4$ κάθετοι ἐπὶ τὰς

ἀντιστοίχους ἕδρας τέμνονται εἰς τὸ κέντρον Ω τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ ὀκτάεδρον σφαίρας (Ω), αἱ δὲ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἰδίας ἕδρας εἰς τὰ $\eta_1 \dots \eta_4$ τέμνονται, ἐκ κατασκευῆς, εἰς τὸ σημεῖον O, κατ' *ἀνάγκην* καὶ αἱ κάθετοι εἰς τὰ $g_1 \dots g_4$ ἐπὶ τὰς ἰδίας ἕδρας θὰ τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον G. *κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας* OΩ καὶ διαιροῦν αὐτὴν εἰς λόγον

$$\frac{\Omega G}{GO} = \frac{1}{2}.$$

Εἶναι κατὰ συνέπειαν τὸ σημεῖον Σ_1 *μέσον* τοῦ τμήματος OG. Ἂν ρ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας Σ_1, θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma_1 g_1 = \dots \Sigma_1 g_4 = \rho$$

καὶ

$$\Sigma_1 g_1 = \Sigma_1 \eta_1, \dots \Sigma_1 g_4 = \Sigma_1 \eta_4.$$

Δηλαδή :

$$\Sigma_1 g_1 = \dots \Sigma_1 g_4 = \Sigma_1 \eta_1 \dots = \Sigma_1 \eta_4 = \rho$$

καὶ αἱ σφαῖραι (Σ_1) καὶ (Σ) συμπίπτουν. Κεῖνται δηλ. τὰ ὀκτὼ ὀρθόκεντρα καὶ ὀκτὼ κ. βάρους τῶν ἑδρῶν ἑνὸς ἐγγεγραμμένου εἰς σφαῖραν ὀρθοδιαγωνίου ὀκταέδρου ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, κλπ. ([124]).

Σχ. 1290 γ

2068 γ. *Ἀναλυτικωτέρα ἀπόδειξις τῆς προτάσεως § 1979 γ, 2).*

Θεωρήσωμεν τὸ ὄγδοον (Σ) τοῦ στερεοῦ, τὸ εἰς τὸ σχῆμα διὰ παχειῶν γραμμῶν ὑποδηλούμενον. Ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ ἡ καμπύλη EH εἶναι τὸ τέταρτον τῆς ἐλλείψεως, καθ' ἣν ἀμφότεραι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κυλίνδρων τέμνονται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΔΓ'Β', γίνεται φανερὸν ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἴσων στερεῶν ΟΕΘΗ καὶ ΟΕΖΗ. Ἕκαστον δὲ τούτων εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ κυλινδρικοῦ ὄνυχος, τὸν ὄγκον τοῦ ὁποίου ὑπελογίσαμεν προηγουμένως. Ἐπομένως :

$$V_\Sigma = 2 . \left[\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(2 . O\Theta)^2 . \Theta H}{6} \right]\right] = \frac{\delta^2 . \delta}{12} = \frac{\delta^3}{12}$$

καὶ

$$V \text{ (κοινοῦ στερεοῦ τῶν δύο κυλίνδρων)} = 8 . V_\Sigma = \frac{2}{3}\delta^3.$$

---

124. Σημ. μετ. Τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεων τούτων δὲν ἀνεύρομεν εἰς τὰ γνωστὰ εἰς ἡμᾶς βιβλία.

ΒΙΒΛΙΟΝ VIII

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Ἔλλειψις

Θεώρημα 861

2069. **Αἱ διάμετροι ἐλλείψεως εἶναι εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου τῆς καμπύλης.**

Καλοῦμεν *διάμετρον εὐθύγραμμον* καμπύλης εὐθεῖαν διαιροῦσαν εἰς δύο ἴσα μέρη ἑκάστην τῶν πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν παραλλήλων χορδῶν τῆς καμπύλης. Δύο διάμετροι λέγονται *συζυγεῖς* ἐὰν ἑκάστη αὐτῶν διαιρῇ εἰς δύο ἴσα μέρη τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην χορδὰς τῆς καμπύλης.

Εἰς τὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου προβολὴ εἶναι ἡ ἔλλειψις, θεωρήσωμεν σειρὰν παραλλήλων χορδῶν· ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν τούτων εἶναι διάμετρος τῆς περιφερείας καὶ ἡ προβολὴ αὐτῆς διάμετρος τῆς ἐλλείψεως διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς.

Πᾶσαι αἱ παράλληλοι χορδαὶ εἰς τὴν περιφέρειαν προβάλλονται κατὰ παραλλήλους χορδὰς τῆς ἐλλείψεως. Ἀφοῦ τὰ προβάλλοντα ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.

Τὸ μέσον ἑκάστης χορδῆς τῆς περιφερείας προβάλλεται κατὰ τὸ μέσον τῆς ἀντιστοίχου χορδῆς τῆς ἐλλείψεως.

Ἐπειδὴ ἕκαστον τμῆμα τῆς τελευταίας χορδῆς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεος τῆς ἀντιστοίχου χορδῆς τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῆς χορδῆς ταύτης καὶ τῆς προβολῆς της.

Θεώρημα 862

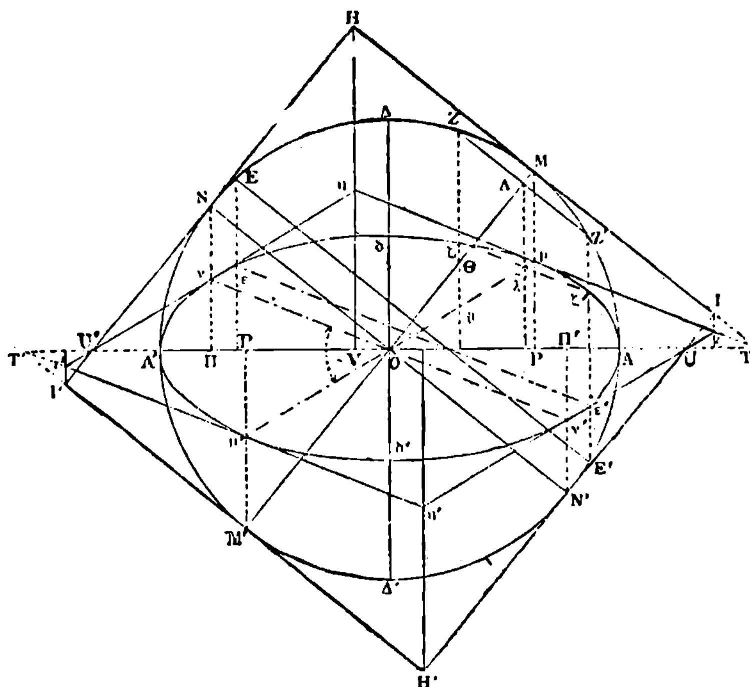
2070. **Δύο κάθετοι διάμετροι τοῦ πρωτεύοντος κύκλου προβάλλονται κατὰ συζυγεῖς διαμέτρους τῆς ἐλλείψεως.**

Ἔστωσαν ΜΜ′, ΝΝ′ δύο ὀρθογώνιοι διάμετροι τοῦ κύκλου καὶ ΕΕ′, ΖΖ′ χορδαὶ παράλληλοι πρὸς τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν. Αἱ χορδαὶ εε′, νν′, ζζ′ εἶναι παράλληλοι (§ 2069), αἱ δὲ προβολαὶ θ, λ τῶν σημείων Θ καὶ Λ, μέσων τῶν χορδῶν ΕΕ′ καὶ ΖΖ′, εἶναι μέσα τῶν ἀντιστοίχων χορδῶν εε′ καὶ ζζ′ τῆς ἐλλείψεως.

Ἡ προβολὴ ἑπομένως μμ′ τῆς ΜΜ′ διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὰς χορδὰς εε′ καὶ ζζ′ παραλλήλους φυσικὰ πρὸς τὴν νν′, προβολὴν τῆς ΝΝ′. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν εὐθεῖαν νν′· διαιρεῖ καὶ αὕτη εἰς δύο ἴσα μέρη τὰς χορδὰς τῆς ἐλλείψεως τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν μμ′.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι μμ′ καὶ νν′ διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἐλλείψεως καὶ εἶναι ἑπομένως διάμετροι αὐτῆς, ἑκάστη δὲ

αὐτῶν διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην χορδὰς τῆς καμπύλης, ἕπεται ὅτι ἀποτελοῦν ζεῦγος *συζυγῶν διαμέτρων* τῆς ἐλλείψεως.



Σχ. 1291.

Θεώρημα 863

2071. Αἱ παράλληλοι ηι', ιη' πρὸς διάμετρον μμ' τῆς ἐλλείψεως, αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἄκρων αὐτῆς, εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης. Καὶ ἀντιστρόφως, ἡ χορδὴ ἐπαφῶν δύο ἐφαπτομένων τῆς ἐλλείψεως, παραλλήλων πρὸς δοθεῖσαν διάμετρον αὐτῆς, εἶναι ἡ συζυγὴς διάμετρος τῆς δοθείσης.

1) Αἱ παράλληλοι ΗΙ' καὶ Η'Ι πρὸς διάμετρον ΜΜ' τοῦ πρώτου κύκλου εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΝΝ' καὶ ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου τούτου· αἱ προβολαὶ αὐτῶν ηι', η'ι θὰ ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς ἐλλείψεως καὶ κατὰ συνέπειαν θὰ ἐφάπτωνται τῆς καμπύλης αὐτῆς, ἀφοῦ αὕτη εἶναι κυρτὴ (G., nº 622).

2) Ἀντιστρόφως, ἡ διάμετρος ἐπαφῶν ΝΝ' τοῦ πρωτ. κύκλου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας ΗΙ', ΙΗ'· ἡ προβολή της ἐπομένως νν' θὰ εἶναι συζυγὴς διάμετρος τῆς μμ', προβολῆς τῆς ΜΜ'.

1ον Θεώρημα τοῦ Ἀπολλωνίου 864

2072. **Πᾶν περιγεγραμμένον εἰς ἔλλειψιν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο συζυγεῖς διαμέτρους τῆς καμπύλης, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἐπὶ τῶν ἀξόνων τῆς ἐλλείψεως κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον.**

Τὸ συνημίτονον τῆς κλίσεως τοῦ πρωτεύοντος κύκλου καὶ τῆς ἐλλείψεως εἶναι ἴσον πρὸς $\frac{\beta}{\alpha}$ (§§ 1790 καὶ 2069)· τὸ παραλληλόγραμμον ἑπομένως $(\eta\iota\eta'\iota') = (HIH'I')\,\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον τετράγωνον ἔχει ἐμβαδὸν $2\alpha\,.\,2\alpha \quad 4\alpha^2$, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περὶ τὴν ἔλλειψιν παραλληλογράμμου θὰ εἶναι $4\alpha^2.\,\frac{\beta}{\alpha} = 4\alpha\beta$, ἰσοδύναμον δηλαδὴ πρὸς τὸ ἐπὶ τῶν ἀξόνων 2α, 2β τῆς ἐλλείψεως ὀρθογώνιον.

Τὸ συμπέρασμα τοῦτο ἕπεται καὶ ἐκ τῆς παρατηρήσεως, ὅτι τὸ ἐπὶ τῶν ἀξόνων τῆς ἐλλείψεως ὀρθογώνιον καὶ τὸ τυχὸν περὶ αὐτὴν παραλληλόγραμμον εἶναι προβολαὶ ἀμφότερα δύο ἴσων καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κειμένων τετραγώνων. Ἑπομένως (§ 1790, σχόλιον I), αἱ προβολαὶ αὗται θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Θεώρημα 865

2073. **Ἐὰν α', β' εἶναι τὰ μήκη δύο συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων ἐλλείψεως καὶ V ἡ γωνία αὐτῶν, θὰ εἶναι**

$$4\,\alpha'\beta'\;\eta\mu\,V = 4\,\alpha\beta.$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου λαμβάνεται διὰ τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων καὶ τοῦ ἡμιτόνου τῆς γωνίας αὐτῶν· ἑπομένως

$$4\,\alpha'\beta'\;\eta\mu\,V = 4\,\alpha\beta.$$

Θεώρημα 866

2074. **Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν δύο συζυγῶν διαμέτρων ἐλλείψεως ἐπὶ ἕνα τῶν ἀξόνων αὐτῆς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄξονος τούτου.**

Δηλαδὴ (σχ. 1291):

$$OP^2 + O\Pi^2 = \alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad P\mu^2 + \Pi\nu^2 = \beta^2.$$

Πράγματι, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΜΡ καὶ ΟΝΠ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας αὐτῶν ἴσας πρὸς α καὶ δύο γωνίας ἴσας· ἑπομένως, $MP = O\Pi$ καὶ ἀφοῦ $OP^2 + MP^2 = ON^2 = \alpha^2$,

$$OP^2 + O\Pi^2 = \alpha^2. \qquad (1)$$

Διὰ τὰς προβολάς, ἀφ' ἑτέρου, $P\mu$, $\Pi\nu$, τῶν συζυγῶν ἡμιαδιαμέτρων α' καὶ β' ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος ἔχομεν :

$$\frac{P\mu}{PM} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{ὅθεν} \quad P\mu^2 = PM^2.\,\frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

$$\frac{\Pi\nu}{\Pi N} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{ὅθεν} \quad \Pi\nu^2 = \Pi N^2.\,\frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

'Επομένως,

$$P\mu^2 + \Pi\nu^2 = (PM^2 + \Pi N^2)\,\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \beta^2. \qquad (2)$$

2ον Θεώρημα τοῦ 'Απολλωνίου 867

2075. **Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων ἐλλείψεως εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἡμιαξόνων αὐτῆς.**

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2), λαμβάνομεν

$$O P^2 + O\Pi^2 + P\mu^2 + \Pi\nu^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

ἤ, ἀφοῦ $\quad O P^2 + P\mu^2 = \alpha'^2, \quad O\Pi^2 + \Pi\nu^2 = \beta'^2.$

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Παρατήρησις. 'Εκ τῶν δύο σχέσεων τοῦ 'Απολλωνίου :

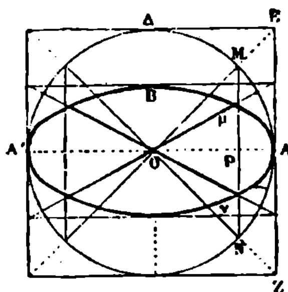
$$\alpha'\beta'\,\eta\mu\,V = \alpha\beta,$$

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τοὺς ἄξονας 2α, 2β ἐλλείψεως, συναρτήσει δύο συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων αὐτῆς καὶ τῆς γωνίας αὐτῶν (§ 2188).

Θεώρημα 868

2076. **Εἰς πᾶσαν ἔλλειψιν ὑπάρχουν δύο ἴσαι συζυγεῖς διάμετροι, ἀντίστοιχοι τῶν διαγωνίων τοῦ ἐπὶ τῶν ἀξόνων αὐτῆς ὀρθογωνίου.**



Σχ. 1202.

'Εκ τοῦ σχήματος ἀναγνωρίζομεν ἀμέσως, ὅτι αἱ ἐπὶ τῶν διαγωνίων ΟΕ, ΟΖ τοῦ τετραγώνου κείμεναι συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι ΟΜ, ΟΝ τοῦ πρωτ. κύκλου εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸν ἄξονα ΑΑ' τῆς ἐλλείψεως καὶ προβάλλονται ἐπ' αὐτοῦ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ρ.

Καὶ ἐπειδὴ

$$PM = PN,$$

θὰ εἶναι καὶ

$$P\mu = P\nu,$$

ἄρα καὶ $O\mu = O\nu$.

Θεώρημα 868—I

2076 α. **'Εκ τῶν συστημάτων συζυγῶν διαμέτρων ἐλλείψεως τὸ ζεῦγος τῶν ἀξόνων αὐτῆς εἶναι τὸ ἐλαχίστου ἀθροίσματος καὶ τὸ ζεῦγος τῶν ἴσων συζυγῶν διαμέτρων τὸ μεγίστου ἀθροίσματος.** (*An. d. Gerg.*, τόμ. XII, 1821 - 1822, σ. 72 καὶ 168, λύσις ὑπὸ J. - B. Durrande).

Θεώρημα 869

2077. Διὰ τυχοῦσαν ἐφαπτομένην ἐλλείψεως, τὸ γινόμενον τῆς τετμημημένης τοῦ σημείου ἐπαφῆς ἐπὶ τὴν τετμημένην τοῦ σημείου καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὸν μέγαν ἄξονα, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ μεγάλου ἡμιάξονος.

Σχ. 1293.

Ἔστω μΤ ἡ ἐφαπτομένη αὕτη καὶ ΜΤ ἡ ἀντίστοιχος ἐφαπτομένη τοῦ πρωτ. κύκλου (G., n° 626). Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΤΜ εὑρίσκομεν

$$ΟΤ \,.\, ΟΡ = ΟΜ^2 = α^2$$

Ὁμοίως, $$ΟΣ \,.\, ΟV = Oν^2 = β^2.$$

Θεώρημα 870

2078. Οἱ ἄξονες ἐλλείψεως ἀποτέμνουν ἐπὶ πάσης ἐφαπτομένης αὐτῆς τμήματα (μὲ κοινὴν ἀρχὴν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς), ἔχοντα γινόμενον ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.

Ἔστωσαν Λμζ καὶ ΛΜΖ ἐφαπτόμεναι ἀντίστοιχοι τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ πρωτ. κύκλου. Ἡ ἀκτὶς ΟΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ΛΜ καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΟΘ καὶ ἑπομένως αἱ ἀντίστοιχοι τῶν ἀκτίνων τούτων ἡμιδιάμετροι Ομ, Οθ τῆς ἐλλείψεως εἶναι συζυγεῖς. Θὰ εἶναι δὲ αἱ Οθ καὶ Λμ παράλληλοι εὐθεῖαι, ἀφοῦ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ΟΘ, ΛΖ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι (§ 2069).

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΟΘθ καὶ ΛΜμ [125] λαμβάνομεν

$$\frac{O\theta}{O\Theta} = \frac{\Lambda\mu}{\Lambda M} = \frac{\mu\zeta}{MZ},$$

ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΖΟΛ,

$$M\Lambda \cdot MZ = OM^2 = O\Theta^2.$$

Σχ. 1231.

Ἐπειδὴ τὰ μήκη Οθ, Λμ, μζ εἶναι ἀνάλογα τῶν ΟΘ, ΛΜ, ΜΖ ἕπεται:

$$\mu\Lambda \cdot \mu\zeta = O\theta^2.$$

Θεώρημα 871

2079. Διὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀξόνων ἐλλείψεως, τῆς ὁποίας δίδονται δύο συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι ΟΜ, ΟΝ, ὡς καὶ ἡ γωνία αὐτῶν V, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Φέρομεν διὰ τοῦ Μ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΟΝ, ὑψοῦμεν κάθετον ΜΓ ἐπ' αὐτὴν ἴσην πρὸς ΟΝ καὶ γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν σημείων Γ καὶ Ο, ἔχουσαν τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ Μ ἀχθείσης παραλλήλου πρὸς τὴν ΟΝ.

Αἱ τομαὶ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ τῆς περιφερείας ὁρίζουν τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, ἄρα καὶ τὰς διευθύνσεις τῶν ἀξόνων. Ἡ δὲ κάθετος ΜΡ ἐπὶ τὸν ὁρισθέντα ἄξονα ΟΕ τέμνει τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον ΟΕ εἰς σημεῖον Α'' τοιοῦτον ὥστε ΟΑ'' = α (§ 2077).

Ἡ εὐθεῖα ΔΜΕ, παράλληλος οὖσα πρὸς τὴν ΟΝ, ἐφάπτεται τῆς ἐλλείψεως (§ 2071), ἡ δὲ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΟΓ ὁρίζει τὸ κέντρον τῆς βοηθητικῆς περιφερείας. Ἐκ τοῦ σχήματος εὑρίσκομεν

$$M\Gamma^2 = M\Delta \cdot ME \quad \text{ἢ} \quad \alpha'^2 = M\Delta \cdot ME. \quad (\alpha' = ON)$$

Ἑπομένως (§ 2078), αἱ εὐθεῖαι ΟΔ, ΟΕ εἶναι αἱ διευθύνσεις τῶν ζητουμένων ἀξόνων τῆς ἐλλείψεως.

---

125. Σημ. μετ. Ἀφοῦ $\widehat{\Theta O O} = \widehat{M\Lambda\mu}$ καὶ $\widehat{M} = \widehat{\Theta}$.

Ἀφ' ἑτέρου, ἕνεκα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑ''Ε κλπ.:

$$OA''^2 = OP \cdot OE,$$

καὶ τὸ μῆκος ΟΑ'' εἶναι ἴσον πρὸς τὸν μέγαν ἡμιάξονα α τῆς ἐλλείψεως (§ 2077).

Ἀναλόγως ὁρίζεται καὶ ὁ μικρὸς ἡμιάξων β.

Σχ. 1295.

2080. Κατασκευὴ τοῦ Chasles. Ἡ προηγουμένη κατασκευὴ δὲν φαίνεται νὰ εἶναι ἡ καλλιτέρα ἀπὸ γραφικῆς ἀπόψεως· ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ο καὶ Γ εὑρίσκονται πολλάκις πολὺ πλησίον ἀλλήλων καὶ επομένως τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ΕΓΔ δυσκόλως ὁρίζεται μετ' ἀκριβείας.

Ἡ ἑπομένη μέθοδος, ὀφειλομένη εἰς τὸν Chasles, εἶναι πολὺ προτιμοτέρα· ἀλλ' ἡ ἀπ' εὐθείας ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου μέρους εἶναι μακρὰ καὶ ἀρκετὰ δύσκολος.

Ἐκ τοῦ σημείου Μ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΝΟ $= \alpha'$ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμήματα ΜΘ $=$ ΜΓ $= \alpha'$. Φέρομεν καὶ τὰς ΟΘ, ΟΓ εὐθείας.

Θὰ ἔχωμεν: ΟΘ $= \alpha + \beta$, ΟΓ $= \alpha - \beta$ καὶ ὁ μέγας ἄξων θὰ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΟΘ.

Πράγματι, ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΜΘ εὑρίσκομεν

$$O\Theta^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + 2\,\alpha'\beta'\ \text{ημ}\ V = (\alpha + \beta)^2, \qquad (\S\ 2075)$$

ἐκ δὲ τοῦ ΟΜΓ,

$$O\Gamma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 - 2\,\alpha'\beta'\ \text{ημ}\ V = (\alpha - \beta)^2.$$

Κατόπιν τούτων εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ ὁ δεύτερος ἰσχυρισμὸς τοῦ Chasles· ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΔΕ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Θ — συμμετρικοῦ τοῦ Γ πρὸς τὴν ΔΕ — αἱ

δὲ γωνίαι ΕΟΓ καὶ ΕΟΘ εἶναι ἴσαι, ὡς βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων.

Ἔστω τώρα ΜΖ παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον ΟΕ. Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\mathrm{Z\Theta} = \alpha \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{OZ} = \beta.$$

Ἐκ τῆς διχοτόμου ΟΣ τῆς γωνίας Ο τοῦ τριγώνου ΓΟΘ εὑρίσκομεν :

$$\frac{\mathrm{O\Gamma}}{\mathrm{O\Theta}} = \frac{\Sigma\Gamma}{\Sigma\Theta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\mathrm{M\Gamma}-\mathrm{M\Sigma}}{\mathrm{M\Gamma}+\mathrm{M\Sigma}} = \frac{\alpha'-\mathrm{MP}}{\alpha'+\mathrm{MP}}$$

ἢ καί, κατὰ τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν ἀναλογιῶν,

$$\frac{2\alpha}{2\beta} = \frac{2\alpha'}{2\mathrm{M\Sigma}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\mathrm{M\Sigma}}.$$

καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῆς παραλλήλου ΜΖ πρὸς τὴν ΘΣ,

$$\frac{\mathrm{M\Theta}}{\mathrm{M\Sigma}} = \frac{\Theta\mathrm{Z}}{\mathrm{ZO}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha'}{\mathrm{M\Sigma}} = \frac{\mathrm{Z\Theta}}{\mathrm{ZO}}$$

ἕπεται

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mathrm{Z\Theta}}{\mathrm{ZO}}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\mathrm{Z\Theta}+\mathrm{ZO}}{\mathrm{ZO}} = \frac{\alpha+\beta}{\mathrm{ZO}}.$$

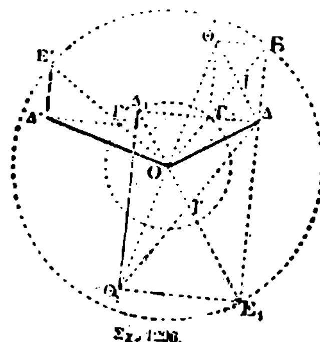
Δηλαδὴ $\beta = \mathrm{ZO}$ καὶ $\alpha = \Theta\mathrm{Z}$.

2080 α. *Κύκλοι τοῦ Chasles.* Ἐάν, ἐπὶ τῆς τυχούσης καθέτου ΜΛ τῆς ἐλλείψεως, λάβωμεν ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Μ τμήματα ΜΘ = ΜΓ ἴσα πρὸς τὴν συζυγῆ ἡμιδιάμετρον τῆς ΟΜ, ὁ τόπος τῶν σημείων Θ καὶ Γ εἶναι περιφέρειαι μὲ κέντρα τὸ σημεῖον Ο καὶ ἀκτῖνας $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha-\beta$ ἀντιστοίχως.

Αἱ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας (Ο, $\alpha+\beta$) ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τῆς ἐλλείψεως ἐφάπτονται αὐτῆς εἰς σημεῖα εἰς ἃ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν καμπύλην τέμνονται ἐπὶ τῆς περιφερείας (Ο, $\alpha-\beta$). (Joseph Bruno, *N. A.*, 1874, σ. 249 καὶ 1876, σ. 288).

Αἱ περιφέρειαι μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνας $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha-\beta$ ὠνομάσθησαν ὑπὸ τοῦ Barisien *κύκλοι τοῦ Chasles.*

2080 β. Πρόβλημα. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ ἄξονες ἐλλείψεως ἐκ δύο συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων καὶ τῆς γωνίας αὐτῶν. (Κατασκευὴ τοῦ A. Mannheim, *N. A. de Math.*, 1904, σ. 5).



Σχ. 1236.

Ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστωσαν ΟΓ, ΟΕ δύο ἐπ' εὐθείας ἀκτῖνες τῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν (Ο, β) καὶ (Ο, α). Αἱ εὐθεῖαι ΓΔ, ΕΔ, παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας τῆς καμπύλης, τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Δ αὐτῆς.

Ἔστω Ε΄ τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ΟΕ΄ (τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας) τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΟΕ· τὸ δι' ὁμοίας κατασκευῆς λαμβανόμενον σημεῖον Δ΄ ἀνήκει καὶ αὐτὸ εἰς τὴν καμπύλην καὶ εἶναι πέρας τῆς συζυγοῦς πρὸς τὴν ΟΔ ἡμιδιαμέτρου αὐτῆς. Ἐπειδὴ

δὲ τὰ τρίγωνα ΓΔΕ, Γ'Δ'Ε' εἶναι προφανῶς ἴσα θὰ εἶναι ΔΕ = Γ'Δ', καὶ ΓΔ = Ε'Δ'.

Ἂς στρέψωμεν τώρα τὸ τρίγωνον Ε'Δ'Ο περὶ τὴν κορυφήν του Ο κατὰ μίαν ὀρθὴν γωνίαν. Ἡ νέα του θέσις θὰ εἶναι ἡ ΟΘΕ καὶ τὸ σχῆμα ΘΕΔΓ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

Ἐκ τούτων ἕπεται ἡ ἀκόλουθος κατασκευὴ τῶν ἀξόνων, θέσει καὶ μεγέθει, τῆς ἐλλείψεως:

Ἔστωσαν ΟΔ, ΟΔ' *αἱ θέσεις τῶν δοθεισῶν συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων. Ἐπὶ τῆς καθέτου* ΟΘ *ἐπὶ τὴν* ΟΔ' *λαμβάνομεν τμῆμα* ΟΘ *ἴσον πρὸς* ΟΔ' *καὶ ἐπὶ τῆς διαμέσου* ΟΙ *τοῦ τριγώνου* ΟΘΔ *λαμβάνομεν τμήματα* ΙΕ, ΙΓ *ἴσα πρὸς* ΙΔ. *Οἱ ἡμιάξονες τῆς ἐλλείψεως ἔχουν μήκη ἴσα πρὸς τὸ* ΟΕ *καὶ* ΟΓ, *ἡ δὲ εὐθεῖα* ΓΔ *εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν μέγα ἄξονα αὐτῆς.*

Προεκτείνοντες τὴν ΕΔ μέχρι τοῦ σημείου $Ε_1$ ἐπὶ τῆς περιφερείας (Ο, α) κλπ., εὑρίσκομεν ὅτι ἡ $ΔΘ_1$ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀξόνων, ὡς ἡ ΔΘ = ΓΕ ἴση πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν αὐτῶν.

2080 γ. Σημείωσις. 1) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀξόνων (ἐπμ. § 2188) εἶναι πολλάκις ἀναγκαῖος, ὡς εἰς προβλήματα ἐφηρμοσμένης Μηχανικῆς, εἰς τὴν γεφυροποιΐαν κλπ.

Ὁ *γεωμετρικὸς* προσδιορισμὸς τῶν ἀξόνων, μολονότι πρόβλημα πολὺ ἐνδιαφέρον, εἶναι ἐν τούτοις ὀλιγώτερον χρήσιμος εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς. Καὶ τοῦτο, ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ὁσαδήποτε σημεῖα τῆς ἐλλείψεως ἐκ τῆς θέσει γνώσεως δύο συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς, εἴτε αὗται εἶναι οἱ ἄξονες τῆς ἐλλείψεως εἴτε ὄχι.

2) Ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἀξόνων ἐκ δύο συζυγῶν διαμέτρων καὶ τῆς γωνίας αὐτῶν ἤσκησε τὴν ἐφευρετικότητα πολλῶν ἐρευνητῶν. Εἰς τὰς *Ex. de Géom. Descriptive* (3η ἔκδ., n° 553) ἡμῶν, παραθέτομεν τὴν ὡραίαν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ A. Jullien (*N. A.*, 1875, σ. 324 καὶ 359). Σημειοῦμεν ἐπίσης καὶ μίαν πολὺ ἐνδιαφέρουσαν κατασκευὴν τοῦ Mannheim (*N. A.*, 1889, σ. 329), καθὼς καὶ τὴν λύσιν τοῦ Somoff εἰς *N. A.*, 1860, σ. 122.

Θεώρημα 872

2081. Ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὸ σημεῖον τομῆς δύο ἐφαπτομένων ἐλλείψεως μετὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς ἐπαφῶν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς καμπύλης.

Ἡ πρότασις εἶναι φανερὰ ἐκ προβολῆς τοῦ ἀντιστοίχου σχήματος εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πρωτ. κύκλου.

Σχ. 1297.

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω εὐθεῖα μετὰ τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν ὁρίζουν τὰς διευθύνσεις ἑνὸς ζεύγους συζυγῶν διαμέτρων τῆς ἐλλείψεως.

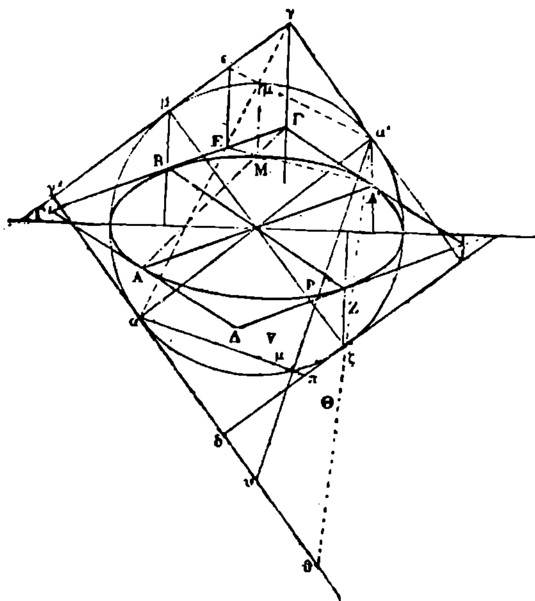
Θεώρημα 873

2082. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἔλλειψιν, σημεῖον πρὸς σημεῖον, ἐκ τῆς γνώσεως δύο συζυγῶν διαμέτρων αὐτῆς καὶ τῆς γωνίας αὐτῶν.

Τέσσαρα σημεῖα τῆς καμπύλης εἶναι ἀμέσως γνωστὰ διὰ τῶν

ἄκρων τῶν δοθεισῶν διαμέτρων ἢ σημείων ἐπαφῆς τοῦ εἰς τὴν ἔλλειψιν περιγεγραμμένου παραλληλογράμμου ΓΔ. Τέσσαρα ἄλλα λαμβάνονται διὰ τῶν τομῶν τῶν ζευγῶν εὐθειῶν, ὡς αἱ ΓΜΑ καὶ Α΄ΜF, ὅπου Ε τὸ μέσον τῆς ΓΒ κ.ο.κ.

Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πρωτ. κύκλου



Σχ. 1298.

αἱ ἀντίστοιχοι εὐθεῖαι γα καὶ α΄ε τέμνονται εἰς σημεῖον μ τοῦ κύκλου τούτου. Πράγματι, ἐπειδὴ $γε = \frac{1}{2} βγ$, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα α΄εγ, αα΄γ εἶναι ὅμοια, ἀφοῦ $γε = \frac{1}{2} γβ = \frac{1}{2} γα΄$, $α΄γ = \frac{1}{2} αα΄$, καὶ $\widehat{γα΄ε} = \widehat{α΄αγ}$· ἑπομένως, $\widehat{α΄αγ} + \widehat{αα΄μ} = 90^\circ$ καὶ ἡ γωνία μ εἶναι ἐπίσης ὀρθή. Τέμνονται δηλ. αἱ εὐθεῖαι α΄ε καὶ αγ ἐπὶ τῆς περιφερείας.

Θεώρημα 874

2083. Ἡ προβολὴ ἐλλείψεως ἐπὶ τυχὸν ἐπίπεδον εἶναι ἔλλειψις.

Ἐπειδὴ πᾶσα γεωμετρικὴ ([126]) ἰδιότης τῆς ἐλλείψεως (*χαρακτηριστικὴ* αὐτῆς) διατηρεῖται κατὰ τὴν προβολήν.

Ὑποθέσωμεν πράγματι ὅτι ἡ ἔλλειψις ὁρίζεται διὰ τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΑ΄Β΄ καὶ ΓΓ΄Δ καὶ διὰ τῶν κατασκευῶν τῶν

---

126. Σημ. μετ. Κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς Προβολικῆς Γεωμετρίας.

ὑποδειχθεισῶν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον. Κατὰ τὴν προβολήν, τὰ παραλληλόγραμμα ταῦτα προβάλλονται κατὰ παραλληλόγραμμα· ὁμοίως, τὰ σημεῖα Μ τῆς ἐλλείψεως προβάλλονται κατὰ σημεῖα ὁμοίως ὁριζόμενα, δηλ. ὡς τομαὶ τῶν ἀντιστοίχων πρὸς τὰς ΑΓ καὶ Α'Ε εὐθειῶν κλπ.

Θεώρημα 875

2084. Τὸ γινόμενον τῶν ἑστιακῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τυχούσης ἐφαπτομένης ἐλλείψεως εἶναι σταθερόν.

Τὰ σημεῖα Μ, Μ', προβολαὶ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τῶν ἑστιῶν, κεῖνται ἐπὶ τοῦ πρωτεύοντος κύκλου (G., n° 626). Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν Μ'Ε' μέχρι τοῦ σημείου Ν ἐπὶ τῆς περιφερείας, παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ ΟΕ = ΟΕ' καὶ αἱ ΕΜ, Ε'Μ' εἶναι παράλληλοι, θὰ ἔχωμεν ΜΕ = ΝΕ'. Ἀφ' ἑτέρου εἶναι

ΝΕ'. Ε'Μ' = Α'Ε'. Ε'Α.

Σχ. 1299

Ἑπομένως

$$ΕΜ . Ε'Μ' = (α - γ)(α + γ) = α^2 - γ^2 = β^2.$$

Παρατήρησις. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἑστιακῶν ἀποστάσεων ἀπὸ ἐφαπτομένης τῆς ἐλλείψεως μεταβάλλεται μεταξὺ τῶν ὁρίων 2α (δι' ἐφαπτομένην παράλληλον πρὸς τὸν μικρὸν ἄξονα) καὶ 2β (διὰ παράλληλον πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα).

Θεώρημα 876

2085. Εἰς πᾶσαν ἔλλειψιν, ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ἑστιακὴν ἀκτῖνα ἐφάπτεται τοῦ πρωτεύοντος κύκλου. (*N. A.*, 1845, σ. 354).

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀπεδείχθη ἤδη (§ 1469).

Ἔστω ΕΜ τυχοῦσα ἑστιακὴ ἀκτίς, Ρ καὶ Ρ' αἱ προβολαὶ τῶν ἑστιῶν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἐλλείψεως εἰς τὸ Μ καὶ $Ε_1$, $Ε_1'$ αἱ τομαὶ τῶν προβαλλουσῶν καὶ τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων ΕΜ, Ε'Μ. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ σημεῖον $Ε_1$ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Ε πρὸς τὴν ἐφαπτομένην καὶ ὅτι ὁ ποὺς Ρ κεῖται ἐπὶ τοῦ πρωτεύοντος κύκλου (G., n^os 624. 626).

Σχ. 1300.

Ἀφ' ἑτέρου, ἡ ΟΡ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Ε'$Ε_1$ καὶ ἴση

πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Εἶναι ἑπομένως τὸ σημεῖον Γ μέσον τῆς ΕΜ καὶ ΓΡ = ΓΕ, ἀφοῦ τὸ τρίγωνον ΕΜΡ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἤτοι, ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΜΕ ἐφάπτεται εἰς Ρ τοῦ πρωτεύοντος τῆς ἐλλείψεως κύκλου. Ὁμοίως καὶ διὰ τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον Ε'Μ.

Θεώρημα 876—I

2086. Εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τυχοῦσαν ἑστιακὴν ἀκτῖνα ἐφάπτεται τοῦ πρωτεύοντος τῆς καμπύλης κύκλου.

Θεώρημα 876—II

2087. Εἰς τὴν παραβολήν, ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον τυχοῦσαν ἑστιακὴν ἀκτῖνα ἐφάπτεται τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφήν.

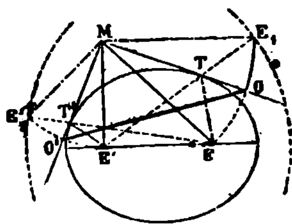
Θεώρημα 876—III

2088. Εἰς τὴν ἔλλειψιν, ἡ περιφέρεια τοῦ πρωτεύοντος κύκλου εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων σημείου Μ αὐτῆς γραφομένων περιφερειῶν. Εἰς τὴν ὑπερβολήν, ἡ αὐτὴ περιφέρεια εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἰδίων περιφερειῶν.

Θεώρημα 877

2089. Ἔστωσαν ΜΤ, ΜΤ' δύο ἐφαπτόμεναι ἐλλείψεως ἐκ σημείου Μ. Ἐὰν ληφθοῦν ἐπ' αὐτῶν μήκη ΜΟ, ΜΟ', ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰς ἑστιακὰς ἀποστάσεις ΜΕ, ΜΕ', ἡ εὐθεῖα ΟΟ' θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα 2α τῆς ἐλλείψεως.

Ἔστω ΜΟ = ΜΕ, ΜΟ' = ΜΕ'. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΟΟ' = 2α.



Σχ. 1301

Προεκτείνομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΤ' μέχρι τοῦ διευθύνοντος κύκλου μὲ κέντρον τὴν ἑστίαν Ε, δηλ. λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς μῆκος $EE_1' = 2\alpha$. Τὰ τρίγωνα $MT'E_1'$, ΜΤ'Ε' εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ τὰ Ε' καὶ E_1' εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΜΤ. Ἑπομένως, $E_1'\widehat{M}O' = O'\widehat{M}E'$, $ME_1' = ME'$ καὶ ὁμοίως $E_1\widehat{M}O = O\widehat{M}E$, $ME_1 = ME$.

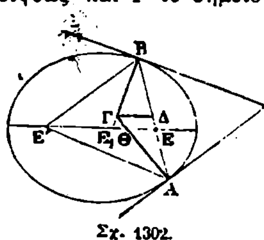
Τὰ δύο τρίγωνα $E_1'ME$ καὶ $E'ME_1$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας — βλ. *θεώρημα τοῦ Poncelet* (G., n° 633) — αἱ δὲ ΜΕ' καὶ ΜΕ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΤΕ'Τ' καὶ Τ'ΕΤ ἀντιστοίχως· εἶναι ἄρα καὶ αἱ τέσσαρες γωνίαι $E_1'MT'$, Τ'ΜΕ', ΕΜΤ, TME_1 ἴσαι.

Κατὰ συνέπειαν, γων. Ο'ΜΟ = $E_1'ME$ καὶ τὰ τρίγωνα $E_1'ME$, Ο'ΜΟ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν. Ὥστε ΟΟ' = ΕΕ' = 2α.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα εἶναι τοῦ W. Roberts, *N. A.*, 1848, σ. 68. Τὸ θεώρημα ἰσχύει καὶ δι' ὑπερβολήν· ἀλλ' ὅταν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κλάδου, ἓν ἐκ τῶν μηκῶν ΜΟ ἢ ΜΟ' θὰ πρέπει νὰ ληφθῇ ἀντίρροπον τοῦ ΜΤ ἢ ΜΤ'. (Gerono, αὐτ. σ. 69).

Θεώρημα 878

2090. Ἔστω ΑΕΒ ἑστιακὴ χορδὴ ἐλλείψεως καὶ Γ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν καθέτων τῆς καμπύλης εἰς τὰ Α καὶ Β. Δείξατε ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς ΑΒ.



Σχ. 1302.

Θὰ δείξωμεν ὅτι ΔΑ = ΔΒ.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΔΓ, ΑΕΘ, ὡς καὶ τὰ ἐπίσης ὅμοια ΒΔΓ, BE_1E δίδουν τὰς σχέσεις:

$$\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AE}{E\Theta},\quad A\Delta=\Delta\Gamma\cdot\frac{AE}{E\Theta},$$

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{BE}{EE_1},\quad B\Delta=\Delta\Gamma\cdot\frac{BE}{EE_1}.$$

Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ λόγοι $\frac{AE}{E\Theta}$ καὶ $\frac{BE}{EE_1}$ εἶναι ἴσοι. Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο, ὅτι αἱ ἀχθεῖσαι κάθετοι εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν εἰς τὰ Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΑΕ'Β· ἑπομένως:

$$\frac{AE'}{E'\Theta}=\frac{AE}{E\Theta}=\frac{AE'+AE}{E'\Theta+E\Theta}=\frac{2\alpha}{2\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$$

καὶ

$$\frac{E'B}{E'E_1}=\frac{BE}{EE_1}=\frac{BE+BE'}{EE'}=\frac{\alpha}{\gamma}.\quad \text{Ἄρα}\ldots$$

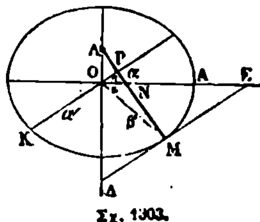
Σημείωσις. Τὸ θεώρημα εὑρίσκεται εἰς *N. A.*, 1860, σ. 44, n° 502 καὶ ἀποδεικνύεται εἰς τὴν σελ. 88. Ἐκ τούτου ἕπεται τὸ ἑξῆς πόρισμα:

Ἐὰν τοποθετήσωμεν ἔλλειψιν ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου καὶ μὲ τὸν μέγαν αὐτῆς ἄξονα κατακόρυφον, ῥάβδος ΑΒ ὁμογενὴς καὶ τῆς ὁποίας τὰ ἄκρα δύνανται νὰ διολισθαίνουν (ἄνευ τριβῶν), ἐπὶ τῆς περιμέτρου τῆς ἐλλείψεως ἰσορροπεῖ ἐὰν διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας.

Ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι ἀναγκαία διὰ τὴν ἰσορροπίαν, ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν ἡ ῥάβδος εἶναι ἐν ὁριζοντίᾳ θέσει. (*N.A.*, 1858, σ. 195).

Θεώρημα 879

2091. Εἰς πᾶσαν ἔλλειψιν, ἡ κάθετος εἰς σημεῖον Μ αὐτῆς διαιρεῖται ὑπὸ τῶν ἀξόνων εἰς δύο τμήματα ΜΛ, ΜΝ, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς συζυγοῦς πρὸς τὴν ΟΜ ἡμιδιαμέτρου.



Σχ. 1303.

Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΔΜΕ καὶ τὴν ΟΚ παράλληλον πρὸς αὐτὴν καὶ συζυγῆ τῆς ἡμιδιαμέτρου ΟΜ. Θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι

$$MN\cdot M\Lambda=OK^2.$$

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων καὶ ὁμοίων τριγώνων ΔΜΛ, ΜΝΕ, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{\Delta M}{M\Lambda} = \frac{MN}{ME},$$

ἐξ ἧς $MN \cdot M\Lambda = M\Delta \cdot ME = OK^2 = \alpha'^2$ (§ 2078).

Σημείωσις. Οἱ πρῶτοι τόμοι τῶν *Nouvelles Annales de Mathématiques* περιέχουν μέγαν ἀριθμὸν στοιχειδῶν θεμάτων σχετικῶν πρὸς τὰς κωνικὰς τομάς. Βλ. λ. χ. τόμ. VI, 1847, σ. 230, 231, 232 κ.ἑ.

Θεώρημα 879—I

2092. **Τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων, τῶν ὁριζομένων ἐπὶ καθέτου ΜΝ ἐλλείψεως ὑπὸ ἑνὸς ἄξονος καὶ ὑπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου τῆς ΟΜ, ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἑτέρου ἡμιάξονος.**

Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι

$$MP \cdot M\Lambda = \alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad MP \cdot MN = \beta^2.$$

Εὕρομεν προηγουμένως ὅτι:

$$MN \cdot M\Lambda = OK^2,$$

ἢ

$$MN \cdot M\Lambda \cdot MP^2 = OK^2 \cdot MP^2.$$

Ἀλλὰ εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην ἰσότητα, ΟΚ . ΜΡ εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ἐπιφανείας τοῦ εἰς τὴν ἔλλειψιν περιγεγραμμένου, παραλληλογράμμου, δηλ. ἴσον πρὸς αβ (§ 2072).

Ἑπομένως:

$$MN \cdot MP \times M\Lambda \cdot MP = \alpha^2\beta^2. \quad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἔχομεν

$$\alpha'^2 + MP^2 = MN.M\Lambda + MP^2 = (MP - NP)\,M\Lambda + (MN + NP)\,MP =$$
$$= MP \cdot M\Lambda - NP \cdot M\Lambda + MP \cdot MN + MP \cdot NP =$$
$$= MP \cdot M\Lambda + MP \cdot MN - NP\,(MP + P\Lambda) + MP \cdot NP =$$
$$= MP \cdot M\Lambda + MP \cdot MN - NP \cdot P\Lambda.$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΝΟΛ καὶ τῆς καθέτου ΟΡ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ λαμβάνομεν $NP \cdot P\Lambda = OP^2$. Ἑπομένως

$$\alpha'^2 + MP^2 = MP \cdot M\Lambda + MP \cdot MN - OP^2,$$

ἢ

$$MP.M\Lambda + MP.MN = \alpha'^2 + MP^2 + OP^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 = \alpha^2 + \beta^2. \quad (2)$$

Διὰ συγκρίσεως τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται ἀμέσως ὅτι

$$MP \cdot M\Lambda = \alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad MP \cdot MN = \beta^2. \quad (3)$$

Παρατήρησις. Ὁ λόγος $\frac{MN}{M\Lambda}$ εἶναι σταθερός, ὡς προκύπτει ἐκ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν σχέσεων (3):

$$\frac{MN}{M\Lambda} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Θεώρημα τοῦ Pagès 879—II

2092 α. **Εἰς τὴν τυχοῦσαν κωνικὴν τομήν, ἡ προβολὴ τοῦ τμήματος τῆς καθέτου εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ αὐτῆς, ἀπὸ τοῦ σημείου Μ μέχρι τοῦ σημείου τομῆς μετὰ τοῦ ἑστιακοῦ ἄξονος τῆς καμπύλης, εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς τὴν παράμετρον $\frac{\beta^2}{\alpha}$ τῆς κωνικῆς τομῆς.**

1) Εἶναι μία ἁπλῆ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τῆς § 1155 α:

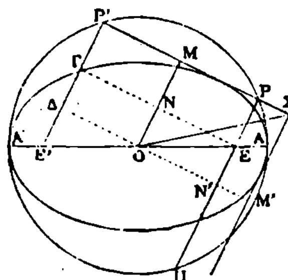
$$AP = \frac{2\tau(\tau-\alpha)}{\beta+\gamma} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

2) Βλέπε τὴν ἀπόδειξιν τοῦ Lemoine (*J. M. E.*, 1884, σ. 100), ἥτις εἶναι ἁπλουστάτη καὶ ἀπαιτεῖ γνώσεις τοῦ III μόνου Βιβλίου.

3) Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Pomey (*J. M. E.*, 1889, σ. 257, ὅπου καὶ τὸ ἱστορικὸν τοῦ ζητήματος) εἶναι πολὺ κομψὴ καὶ πολὺ φυσική.

Θεώρημα 880

2093. **Εἰς πᾶσαν ἔλλειψιν, τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου ἀπὸ ἐφαπτομένης αὐτῆς, ἠλαττωθὲν κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ ἰδίου σημείου ἀπὸ ἑστιακῆς χορδῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ἐφαπτομένην, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ μικροῦ ἡμιάξονος.**



Σχ. 1304.

Θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι

$$OM^2 - ON^2 = \beta^2.$$

Αἱ προβολαὶ Ρ, Ρ′ τῶν ἑστιῶν ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης κεῖνται ἐπὶ τοῦ πρωτεύοντος κύκλου τῆς ἐλλείψεως. Ἐπειδὴ δὲ

$$E'P' = E\Pi$$

καὶ

$$EP \cdot E\Pi = EA \cdot EA' = (\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma) = \beta^2,$$

ἕπεται

$$EP \cdot E'P' = \beta^2. \qquad (§\ 2084)$$

Ἀλλ' εἶναι ἐκ τοῦ σχήματος:

$$E'P' = OM + ON, \quad EP = OM - ON\cdot$$

ἑπομένως:

$$\beta^2 = EP \cdot E'P' = OM^2 - ON^2.$$

Θεώρημα 880—I

2094. **Ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τῶν περιγεγραμμένων εἰς ἔλλειψιν ὀρθογωνίων εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος αὐτῆς (σχ. 1304).**

Ἔστω Μ′Σ ἐφαπτομένη κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΣ. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἔχομεν:

$$OM^2 - ON^2 = \beta^2, \quad OM'^2 - ON'^2 = \beta^2$$

καὶ

$$OM^2 + OM'^2 = ON^2 + ON'^2 + 2\beta^2.$$

'Αλλ' εἶναι $OM^2 + OM'^2 = O\Sigma^2$, $ON^2 + ON'^2 = OE^2 = \gamma^2$.

'Επομένως $O\Sigma^2 = 2\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 =$ σταθ.

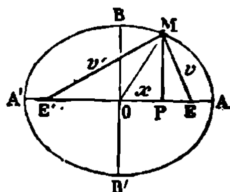
Εἶναι δηλ. ὁ τόπος τῶν κορυφῶν Σ περιφέρεια μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

2094 α. ***Σημείωσις.*** 'Ο τόπος οὗτος τῶν κορυφῶν τῶν περιγεγραμμένων εἰς κωνικὴν τομὴν ὀρθῶν γωνιῶν εἶναι ὁ *ὀρθοπτικὸς κύκλος* ἢ *κύκλος τοῦ Monge.* Διὰ τὴν ὑπερβολήν, ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου εἶναι ἴση πρὸς $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$. Διὰ τὴν παραβολὴν ἡ περιφέρεια αὕτη ἀποβαίνει ἡ διευθετοῦσα αὐτῆς (§ 2134).

Διὰ τὴν ὑπερβολήν, ἡ περιφέρεια αὕτη δύναται νὰ εἶναι πραγματική, περιωρισμένη εἰς τὸ κέντρον της, ἢ καὶ φανταστική. (*I. d. M.*, 1905, σ. 198).

Θεώρημα 881

2095. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον ἐλλείψεως καὶ x ἡ ἀπόστασις τοῦ ποδὸς P ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἐκ τοῦ Μ καθέτου ἐπὶ τὸν ἑστιακὸν ἄξονα. Αἱ ἑστιακαὶ ἀκτῖνες ΕΜ, Ε'Μ ἔχουν διὰ μήκη



Σχ. 1305.

$$EM = \alpha - \frac{\gamma x}{\alpha}$$

καὶ
$$E'M = \alpha + \frac{\gamma x}{\alpha}.$$

Ἔστωσαν υ, υ' αἱ ἑστιακαὶ ἀκτῖνες γνωρίζομεν ὅτι

$$OE = OE' = \gamma, \quad \upsilon'^2 - \upsilon^2 = PE'^2 - PE^2$$

ἢ
$$\upsilon'^2 - \upsilon^2 = (PE' + PE)(PE' - PE) = 2\gamma \,.\, 2x.$$

'Αλλ' εἶναι

$$4\gamma x = \upsilon'^2 - \upsilon^2 = (\upsilon' + \upsilon)(\upsilon' - \upsilon) = 2\alpha(\upsilon' - \upsilon)$$

ἢ
$$\upsilon' - \upsilon = \frac{2\gamma x}{\alpha}.$$

'Εκ τῆς σχέσεως ταύτης καὶ τῆς $\upsilon + \upsilon' = 2\alpha$, λαμβάνομεν ἀμέσως

$$\upsilon' = \alpha + \frac{\gamma x}{\alpha} \qquad (1)$$

$$\upsilon = \alpha - \frac{\gamma x}{\alpha}. \qquad (2)$$

Θεώρημα 882

2096. **Αἱ εἰς τὰ ἄκρα ἑστιακῆς χορδῆς ἐλλείψεως ἐφαπτόμεναι αὐτῆς τέμνονται ἐπὶ τῆς ἀντιστοίχου διευθετούσης.**

Θεωρήσωμεν τὸν πρωτεύοντα κύκλον. Εἰς τὴν ἑστιακὴν χορδὴν ΜΕΝ, ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτὸν ἡ χορδὴ Μ'ΕΝ'· γνωρίζομεν δὲ ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων Λ' τομῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα χορ-

δῶν περιφερείας διερχομένων διὰ σταθεροῦ σημείου Ε εἶναι εὐθεῖα Λ'Δ—ἡ πολικὴ τοῦ Ε πρὸς τὴν περιφέρεια (G., nº 802, 2º).

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΕ, μένει ἡ ἰδία κατὰ τὴν προβολὴν εἰς ἔλλειψιν τοῦ πρωτεύοντος κύκλου. Ἄρα αὕτη εἶναι καὶ ὁ τόπος τῶν τομῶν Λ τῶν εἰς τὰ Μ καὶ Ν ἐφαπτομένων τῆς ἐλλείψεως.

Καὶ ἐπειδή, προσέτι, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΓΔ εἶναι

$$ΟΔ = \frac{ΟΓ^2}{ΟΕ} = \frac{α^2}{γ},$$

ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΛΛ' εἶναι ἡ διευθετοῦσα πρὸς τὴν ἑστίαν Ε τῆς ἐλλείψεως (G., 846).

Σχ. 1306.

Θεώρημα 882—I

2096 α. 1) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν τμημάτων ἑστιακῆς χορδῆς, τῶν ὁριζομένων ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ τῆς ἑστίας, εἶναι σταθερὰ ποσότης.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 287, Παρατήρησις).

2) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων δύο ἑστιακῶν καὶ ὀρθογωνίων χορδῶν εἶναι σταθερὰ ποσότης.

3) Τὸ ἄθροισμα δύο ἑστιακῶν χορδῶν ἐλλείψεως, παραλλήλων πρὸς δύο συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς, εἶναι σταθερὰ ποσότης.

(*J. M. E.*, τοῦ Vuibert, 1888, σ. 149, nº 2113).

Θεώρημα 882—II

2096 β. Ἔστω Ε μία τῶν ἑστιῶν ἐλλείψεως ἐγγεγραμμένης εἰς παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Αἱ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι εἰς τὰ τρίγωνα ΕΑΒ, ΕΒΓ, ΕΓΔ καὶ ΕΔΑ εἶναι ἴσαι (Steiner).

Πόρισμα. Τὰ κέντρα των εὑρίσκονται ἐπὶ περιφερείας ἴσης πρὸς τὰς προηγουμένας καὶ ἐχούσης κέντρον τὴν ἑστίαν Ε. (*N. C. M.*, 1878, σ. 123, ζτμ. 329, Meutzner. Ἀπόδειξις ὑπὸ Jamet).

Θεώρημα τοῦ Chasles 883

2097. Ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται δύο ὁμοεστίων ἐλλείψεων ἀντιστοίχως, εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος τῶν ἐλλείψεων *N. A.*, 1849, σ. 214).

Ἐπειδὴ αἱ ἐλλείψεις αὗται εἶναι ὁμοέστιαι, ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ διὰ τὰς δύο καμπύλας:

$$γ^2 = α^2 - β^2 = α'^2 - β'^2.$$

Ἔστωσαν Μ, Μ' τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα ἐπαφῆς· θὰ ἔχωμεν:

$$ΟΜ^2 - ΟΝ^2 = β^2, \quad ΟΜ'^2 - ΟΝ'^2 = β'^2 \quad (§ 2093)$$

καὶ $OM^2 + OM'^2 = O\Sigma^2 = \beta^2 + \beta'^2 + ON^2 + ON'^2$.

Ἀλλ' εἶναι $ON^2 + ON'^2 = OE^2 = \gamma^2$.

Ἄρα $O\Sigma^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \gamma^2$, ποσότης σταθερά.

Σχ. 1307

Παρατήρησις. Ἐπίσης : $O\Sigma^2 = \alpha^2 + \beta'^2 = \alpha'^2 + \beta^2$.

Θεώρημα τοῦ Maclaurin 883—I

2098. Δίδονται δύο ὁμοιόθετοι καὶ ὁμόκεντροι ἐλλείψεις. Εἰς τὴν κορυφὴν Α τῆς μικροτέρας φέρομεν ἐφαπτομένην ΜΑΝ, τέμνουσαν τὴν μεγαλυτέραν εἰς Μ καὶ Ν, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Μ θεωροῦμεν δύο τυχούσας χορδὰς ΜΡ, ΜΠ τῆς τελευταίας ἐλλείψεως ἴσον κεκλιμένας πρὸς τὴν ΜΑΝ.

Δείξατε ὅτι, ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς ἐσωτερικῆς ἐλλείψεως φέρωμεν δύο χορδὰς αὐτῆς ΑΒ, ΑΓ παραλλήλους πρὸς τὰς ἀχθείσας εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ἔλλειψιν, τὸ ἄθροισμα τῶν χορδῶν τούτων εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων χορδῶν. (*Maclaurin, Traité des fluxions*, n° 648, σ. 119).

Σχ. 1308.

Διὰ τοῦ σημείου Ν φέρομεν τὴν ΝΣ παράλληλον πρὸς τὴν ΜΡ. Θὰ ἔχωμεν ΝΣ=ΜΠ.

Ἐπειδὴ αἱ δύο ἐλλείψεις εἶναι ὁμόκεντροι καὶ ὁμοιόθετοι, τὰ μέσα Ε, Ζ, Θ τῶν παραλλήλων χορδῶν ΜΡ, ΑΒ καὶ ΝΣ ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν διάμετρον (§ 2070). Εἰς τὸ τραπέζιον, ἀφ' ἑτέρου, ΕΜΝΘ, ἡ ΑΖ εἶναι ἡ μέση βάσις αὐτοῦ. Ἐπομένως

$$ME + N\Theta = 2 \,.\, AZ$$

ἢ

$$MP + N\Sigma = 2\,AB,$$

ἢ καὶ

$$MP + M\Pi = 2\,AB = AB + A\Gamma.$$

Παρατήρησις. Ἡ ἐκφώνησις καὶ ἡ ἀπόδειξις τοῦ Maclaurin (n° 625 τοῦ *Traité des fluxions* αὐτοῦ, τόμ. II, σ. 103), ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἑπομένην ἄσκησιν, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας :

Θεώρημα 883—II

2099. **Εἰς περιφέρειαν εἶναι ἐγγεγραμμένον τρίγωνον ἰσοσκελές. Ἐκ τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας φέρομεν χορδὰς παραλλήλους πρὸς τὰς ἴσας πλευρὰς καὶ πρὸς τὴν διάμετρον — διχοτόμον τοῦ τριγώνου τούτου.**

Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν διάμετρον ἔχει λόγον πρὸς τὴν διάμετρον ταύτην, ὃν λόγον ἔχει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν παραλλήλων πρὸς τὰς ἴσας πλευρὰς χορδῶν ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας των πρὸς τὴν χορδὴν—διχοτόμον τῆς γωνίας ταύτης ([127]).

2100. *Σημείωσις.* Ὁ Maclaurin γενικεύει τὴν πρότασιν ταύτην διὰ τὴν ἔλλειψιν, καθ' ἣν προβάλλεται ἡ περιφέρεια ἐπὶ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς διαμέτρου - διχοτόμου τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ([128]), καὶ προβαίνει εἶτα εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τῆς § 2098.

Ἡ πρότασις αὕτη (§ 2098) ἐξήρκεσεν εἰς τὸν Maclaurin ὅπως ἀποδείξῃ τὴν ἀκόλουθον ἐνδιαφέρουσαν πρότασιν τῆς Μηχανικῆς :

Μᾶζα ρευστὴ καὶ ὁμογενὴς στρεφομένη περὶ ἄξονα καὶ τῆς ὁποίας τὰ μόρια ἕλκονται πρὸς ἄλληλα κατὰ τὸν νόμον τοῦ Νεύτωνος $\left(F = \frac{k}{\rho^2}\right)$, *λαμβάνει σχῆμα ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς.*

Δύο θεωρήματα σχετικὰ πρὸς τὰς ὁμοεστίους ἐλλείψεις, ἦσαν ἀρκετὰ δι' αὐτὸν ὅπως ὑπολογίσῃ τὰς ἕλξεις ἐπὶ τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τοῦ ἐλλειψοειδοῦς. (*Aperçu historique* τοῦ Chasles, σ. 163, 167 καὶ 394).

Θεώρημα τοῦ Carnot 884

2101. **Δίδονται ἔλλειψις καὶ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ**

---

127. Σημ. μετ. Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης — τμῆμα τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι εἶναι αἱ τρεῖς πρῶται γραμμαὶ τῆς σελ. 1032 τοῦ γαλλικοῦ κειμένου—εἶναι ἁπλῆ· ἐπειδὴ ἀνάγεται εἰς τὴν σχέσιν (σχ. 813):

$$\frac{\text{ΕΘ συν } \alpha + \text{ΕΗ συν } \alpha}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΑΓ συν } \alpha + \text{ΑΔ συν } \alpha}{\text{ΑΒ}},$$

(α ἡ γωνία τῆς § 1291 α),
δηλ. εἰς τὴν δειχθεῖσαν ἐν § 1291 :

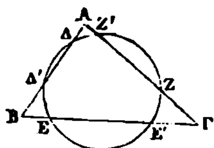
$$\frac{\text{ΑΓ} + \text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΕΘ} + \text{ΕΝ}}{\text{ΕΖ}}.$$

128. Σημ. μετ. Ἡ ἐπέκτασις διὰ τὴν ἔλλειψιν ταύτην εἶναι φανερά. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΕΘ'Η' εἰς τὴν προβολὴν παραμένει ἰσοσκελές, αἱ χορδαὶ Α'Γ', Α'Δ' τῆς ἐλλείψεως εἶναι ἴσον πάλιν κεκλιμέναι πρὸς τὰς Α'Β' καὶ Ε'Ζ' καὶ τῶν τελευταίων τούτων εὐθειῶν τὰ μήκη ἀμετάβλητα.

ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ τέμνουν τὴν καμπύλην εἰς τὰ σημεῖα Δ, Δ', Ε, Ε' καὶ Ζ, Ζ'. Δείξατε τὴν σχέσιν

$$\frac{ΑΔ\,.\,ΑΔ'}{ΒΔ\,.\,ΒΔ'}\cdot\frac{ΒΕ\,.\,ΒΕ'}{ΓΕ\,.\,ΓΕ'}\cdot\frac{ΓΖ\,.\,ΓΖ'}{ΑΖ\,.\,ΑΖ'}=1.$$

Ἡ πρότασις εἶναι φανερὰ διὰ τὴν περιφέρειαν, ἀφοῦ ἕκαστον γινόμενον εἰς τὸν ἀριθμητὴν εἶναι ἴσον πρὸς ἓν τῶν γινομένων τοῦ παρονομαστοῦ· λ. χ.



Σχ. 1309.

$$ΑΔ\,.\,ΑΔ' = ΑΖ\,.\,ΑΖ' \quad \text{κλπ.}$$

Εἶναι ἑπομένως ἀληθὴς καὶ διὰ τὴν ἔλλειψιν· ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν λόγων $\frac{ΑΔ}{ΒΔ}$ κλπ. διατηρεῖ τὴν αὐτὴν τιμὴν κατὰ τὴν προβολὴν τῶν (ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας κειμένων) ἀντιστοίχων τμημάτων.

2102. Παρατήρησις. Τὸ *θεώρημα τοῦ Carnot* ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἄλλα δύο εἴδη κωνικῶν τομῶν καὶ ἀποδεικνύεται ἁπλούστατα διὰ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας.

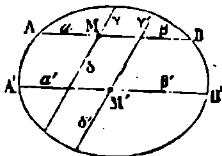
Ὅπως διὰ τῶν θεωρημάτων τοῦ *Νεύτωνος* (§ 2103) καὶ τοῦ Pascal (§ 2120), οὕτω καὶ διὰ τοῦ θεωρήματος τοῦ Carnot, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓν ἕκτον σημεῖον κωνικῆς τομῆς, ὅταν μᾶς δίδωνται πέντε ἄλλα σημεῖα αὐτῆς.

Πράγματι, ἔστω ταῦτα τὰ Δ, Δ', Ε, Ε' καὶ Ζ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΔΔ', ΕΕ' καὶ τυχοῦσαν ἄλλην διὰ τοῦ Ζ· ἡ προηγουμένη σχέσις καθιστᾷ γνωστὴν τὴν θέσιν τοῦ Ζ' καὶ μία δευτέρα εὐθεῖα διὰ τοῦ Ζ δίδει ἓν ἄλλον σημεῖον Ζ'' τῆς κων. τομῆς κ.ο.κ.

Ἡ πρότασις ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ καὶ ὅταν δύο τῶν ἐξ σημείων συμπίπτουν εἰς ἓν (εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ἀντιστοίχου ἐφαπτομένης).

Θεώρημα τοῦ Νεύτωνος 885

2103. Διὰ τυχόντος σημείου Μ ἐντὸς ἐλλείψεως φέρομεν δύο τυχούσας χορδάς. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν γινομένων τῶν ἐφ' ἑκάστης χορδῆς ὁριζομένων τμημάτων ὑπὸ τοῦ σημείου Μ καὶ τῆς καμπύλης, εἶναι σταθερὸς διὰ πᾶν ἄλλο σημεῖον Μ' εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ὁμοίως τῆς ἐλλείψεως εὑρισκόμενον καὶ ἐφ' ὅσον ἡ διεύθυνσις τῶν δι' αὐτοῦ χορδῶν εἶναι ἡ ἰδία πρὸς ἐκείνην τῶν διὰ τοῦ Μ.



Σχ. 1310.

Θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι

$$\frac{αβ}{γδ}=\frac{α'β'}{γ'δ'} \quad ἢ \quad \frac{αβ}{α'β'}=\frac{γδ}{γ'δ'}=\text{σταθ. k.}$$

Ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ τὸν κύκλον, ἀφοῦ

$$\frac{αβ}{γδ}=1=\frac{α'β'}{γ'δ'}$$

$$\frac{αβ}{α'β'}=\frac{γδ}{γ'δ'}\,. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν προβολὴν εἰς ἔλλειψιν τῆς περιφερείας, οἱ λόγοι παραλλήλων τμημάτων, ὡς τῶν α, α' ἢ β, β' κλπ., διατηροῦνται, εἶναι φανερὰ ἡ ἐπέκτασις τῆς ἰσχύος τῆς προτάσεως καὶ εἰς τὴν ἔλλειψιν.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς σταθερᾶς k, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν δύο διαμέτρους μ, ν τῆς ἐλλείψεως παραλλήλους πρὸς τὰς διευθύνσεις τῶν χορδῶν. Θὰ εἶναι τότε

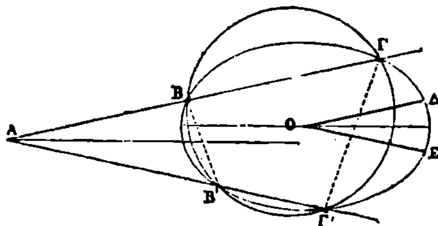
$$\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}=\frac{\alpha'\beta'}{\gamma'\delta'}=\frac{\mu^2}{\nu^2}.$$

Παρατήρησις. Τὸ *θεώρημα τοῦ Νεύτωνος* ἀληθεύει καὶ διὰ τυχοῦσαν ἀλγεβρικὴν καμπύλην. Ἡ εἰδικὴ περίπτωσις διὰ τὰς κωνικὰς τομὰς ἀναφέρεται ὑπὸ τοῦ *Ἀπολλωνίου*. (N.A., 1844, σ. 510).

Θεώρημα 886

2104. **Ἐὰν μία περιφέρεια τέμνῃ ἔλλειψιν εἰς τέσσαρα σημεῖα, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου τῶν κοινῶν χορδῶν εἶναι παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας.**

Διὰ τοῦ κέντρου O τῆς ἐλλείψεως φέρομεν παραλλήλους πρὸς



Σχ. 1311.

τὰς κοινὰς χορδὰς ΑΒΓ, ΑΒ'Γ'. Ἐκ τοῦ *θεωρήματος τοῦ Νεύτωνος* λαμβάνομεν:

$$\frac{AB\,.\,A\Gamma}{AB'\,.\,A\Gamma'}=\frac{O\Delta^2}{OE^2},$$

ἤ, ἀφοῦ

$$AB\,.\,A\Gamma=AB'\,.\,A\Gamma',$$

$$O\Delta=OE.$$

Εἶναι δηλ. ἴσαι αἱ δύο ἡμιδιάμετροι ΟΔ, ΟΕ, ἄρα καὶ ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τοὺς ἄξονας. Κατὰ συνέπειαν, ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα τῶν ἀξόνων.

Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν ΒΒ' καὶ ΓΓ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἕτερον τῶν ἀξόνων.

Θεώρημα 886—Ι

2104 α. **Ἐὰν τὰ τέσσαρα κοινὰ σημεῖα δύο κωνικῶν τομῶν εἶναι ὁμοκυκλικά, οἱ ἄξονες τῶν καμπύλων αὐτῶν εἶναι παράλληλοι.**

Εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

2104β. Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα § 2104 α εἶναι γενίκευσις τοῦ ἀντιστρόφου μιᾶς προτάσεως τοῦ ΙΙ Βιβλίου, σχετικῆς πρὸς ἐγγράψιμον τετράπλευρον (§ 674).

Θεώρημα 887

2105. **Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου Μ ἐλλείψεως φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν τετραπλεύρου, τὸ γινόμενον τῶν καθέτων ἐπὶ δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἴδιον γινόμενον διὰ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς ἀριθμὸν σταθερόν, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ σημείου Μ τῆς ἐλλείψεως.**

(Τὸ πρόβλημα *ad quatuor lineas* τοῦ Πάππου (§ 290 α)).

Θὰ πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{ΜΕ\,.\,ΜΘ}{ΜΖ\,.\,ΜΗ}$ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός.

Θεωρήσωμεν τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας προβολὴ εἶναι ἡ ἔλλειψις καὶ ἂς μεταφέρωμεν τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς, παραλλήλως ἑαυτῷ, ἕως ὅτου ἡ ἔλλειψις καὶ ἡ περιφέρεια ἀποκτήσωσιν κοινὸν σημεῖον τὸ Μ. Ἔστωσαν δὲ ΜΕ', ΜΘ' κλπ. αἱ ἐκ τοῦ Μ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν τετραπλεύρου Α'Β'Γ'Δ', οὗτινος προβολὴ εἶναι τὸ ΑΒΓΔ.

Σχ. 1312.

Διὰ τὸ τετράπλευρον Α'Β'Γ'Δ' θὰ ἔχωμεν (§ 1214)

$$ΜΕ'\,.\,ΜΘ' = ΜΖ'\,.\,ΜΗ'. \qquad (1)$$

Ἡ κάθετος ΜΕ δὲν εἶναι, βεβαίως, ἐν γένει ἡ προβολὴ τῆς ΜΕ'. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ *τρίγωνον* ΜΕΕ' *παραμένει πάντοτε ὅμοιον ἑαυτῷ* (129), ὁ λόγος $\frac{ΜΕ'}{ΜΕ}$ παραμένει σταθερὸς διὰ πᾶν σημεῖον Μ τῆς ἐλλείψεως:

$$\frac{ΜΕ'}{ΜΕ} = λ.$$

Ἀναλόγως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν

$$\frac{ΜΖ'}{ΜΖ} = μ, \quad \frac{ΜΘ'}{ΜΘ} = ν, \quad \frac{ΜΗ'}{ΜΗ} = ρ, \text{ ἀριθμοὶ σταθεροί.}$$

---

129. Σημ. μετ. Ἔστω, πράγματι, ω ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων. Θὰ ἔχωμεν (§ 1790)

$$(\mathrm{MAB}) = (\mathrm{MA'B'})\text{ συν } ω$$

ἢ

$$\frac{\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{ME}}{2} = \frac{\mathrm{A'B'}\,.\,\mathrm{ME'}}{2}\text{ συν } ω, \quad \text{δηλ.} \quad \frac{\mathrm{ME'}}{\mathrm{ME}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \text{σταθερὸν} = λ.$$

διὰ πᾶν σημεῖον **Μ** τῆς ἐλλείψεως. Ἀφ' ἑτέρου, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ γωνία φ τῶν **ΜΕ** καὶ **ΜΕ'** μένει ἀμετάβλητος, ἀφοῦ ἡ **ΜΕ** εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν σταθερὰν εὐθεῖαν **ΑΒ** τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἐλλείψεως, ἡ δὲ **ΜΕ'** κάθετος ἐπὶ τὴν σταθερᾶς διευθύνσεως εὐθεῖαν **Α'Β'** τοῦ ἐπιπέδου τῆς περιφερείας. Εἶναι δηλ. αἱ εὐθεῖαι αὗται παράλληλοι πάντοτε πρὸς ἑαυτάς.

'Αντικαθιστῶντες εἰς τὴν σχέσιν (1) λαμβάνομεν

$$\frac{ΜΕ.ΜΘ}{ΜΖ.ΜΗ}=\frac{μ.ρ}{λ.ν}=σταθ.$$

Θεώρημα 887—I

2106. 'Ομοίως: 'Εκ τυχόντος σημείου Μ ἐλλείψεως φέρομεν εὐθείας ἐπὶ τὰς πλευρὰς ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, συναντώσας αὐτὰς κατὰ γωνίας α, β, γ, δ. Δείξατε ὅτι, ἐκ τῶν εὐθειῶν τούτων, τὸ γινόμενον τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου ἔχει σταθερὸν λόγον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν εὐθειῶν τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ.

'Απόδειξις ἀκριβῶς ἀνάλογος τῆς προηγουμένης.

2107. Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα *ad quatuor lineas*, ὅπερ μᾶς μετέδωσεν ὁ *Πάππος*, ἐμελετήθη ὑπὸ τῶν *Εὐκλείδου* καὶ *'Απολλωνίου* ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν ἣν ἐδώσαμεν εἰς τὴν παράγραφον 2106. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἐπίσης γνωστὸν καὶ ὑπὸ τὸν τίτλον *πρόβλημα τοῦ Πάππου*, ὡς ὠνόμασεν αὐτὸ ὁ Descartes.

Οἱ 'Αρχαῖοι Ἕλληνες ἔθετον τὸ γενικώτερον πρόβλημα, τῆς εὑρέσεως τοῦ τόπου τῶν σημείων Μ τῶν τοιούτων, ὥστε ἂν ἐξ ἑκάστου αὐτῶν φέρωμεν εὐθείας συναντώσας ν δεδομένας ἄλλας κατὰ δοθείσας γωνίας, ὁ λόγος τῶν γινομένων $\frac{ν}{2}$ ἐκ τῶν εὐθειῶν τούτων πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ὑπολοίπων $\frac{ν}{2}$ νὰ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός. Διὰ τέσσαρας εὐθείας ἀνεγνώρισαν οὗτοι τὸν τόπον ὡς κωνικὴν τομήν· τὸ τρίγωνον εἶναι μία εἰδικὴ περίπτωσις, εἰς τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν τὸν λόγον τοῦ τετραγώνου μιᾶς ἀποστάσεως πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων ἀποστάσεων.

'Ο Descartes ἐπέλυσε τὸ πρόβλημα διὰ τῆς 'Αναλυτικῆς Γεωμετρίας (τὴν ὁποίαν εἶχεν ὁ ἴδιος ἐπινοήσει) καὶ ὁ Νεύτων ἔδωσε μίαν ἀπόδειξιν καθαρῶς γεωμετρικὴν διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ τετραπλεύρου.

'Ο Chasles (*Aperçu historique*, σ. 37, § 32), θεωρεῖ τὴν πρότασιν ταύτην ὡς τὴν πλέον γενικῆς σημασίας (universelle) καὶ τὴν πλέον γόνιμον, ἐκ τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰς κωνικὰς τομάς.

Θεώρημα τοῦ Desargues 888

2108. Ἔστω ΕΖΘΔ τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς ἔλλειψιν καὶ τέμνουσα τῶν δύο σχημάτων, συναντῶσα τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ΔΘ, ΕΖ τοῦ τετραπλεύρου εἰς Α καὶ Α', τὰς ἄλλας δύο ΕΔ, ΖΘ εἰς Β καὶ Β' καὶ τὴν καμπύλην εἰς Μ καὶ Μ'.

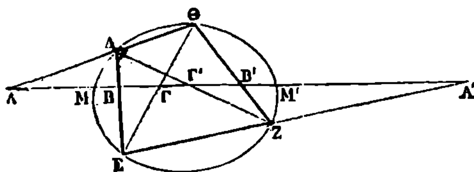
Δείξατε τὴν ἰσότητα τῶν λόγων

$$\frac{ΜΑ.ΜΑ'}{ΜΒ.ΜΒ'}=\frac{Μ'Α.Μ'Α'}{Μ'Β.Μ'Β'}.$$

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (§ 2106), ὁ λόγος $\frac{ΜΑ.ΜΑ'}{ΜΒ.ΜΒ'}$ εἶναι σταθερός, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ σημείου Μ τῆς καμπύλης.

Διὰ τὸ δεύτερον ἑπομένως σημεῖον τομῆς Μ' ταύτης καὶ τῆς διατεμνούσης θὰ ἔχωμεν

$$\frac{MA \cdot MA'}{MB \cdot MB'} = \frac{M'A \cdot M'A'}{M'B \cdot M'B'}.$$



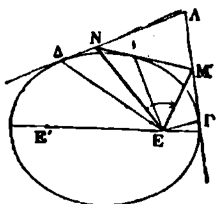
Σχ. 1313.

2109. Παρατήρησις. Τὸ *θεώρημα τοῦ Desargues* εἶναι θεμελιῶδες διὰ τὴν θεωρίαν τῆς ἐνελίξεως καὶ διετυπώθη ὡς ἀνωτέρω ὑπὸ τοῦ Pascal. Δύναται δὲ νὰ χρησιμεύσῃ πρὸς ἀνεύρεσιν ἑνὸς ἕκτου σημείου κωνικῆς τομῆς τῆς ὁποίας ἐδόθησαν πέντε ἄλλα σημεῖα· ἐπειδὴ τέσσαρα ἐξ αὐτῶν Δ, Ε, Ζ, Θ ὁρίζουν ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον εἰς τὴν καμπύλην, ἐπὶ τυχούσης δὲ διὰ τοῦ πέμπτου Μ διατεμνούσης ἀνευρίσκεται, διὰ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως, τὸ ἕτερον σημεῖον τομῆς Μ' αὐτῆς καὶ τῆς καμπύλης.

Σημείωσις. Βλέπε: *Introduction à l'étude de l'homographie*, 1875, σ. 50 ὑπὸ J.-B.-V. Reynaud.

1ον Θεώρημα τοῦ Poncelet 889

2110. Ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἐκ μιᾶς τῶν ἑστιῶν κωνικῆς τομῆς τμῆμα κινητῆς ἐφαπτομένης, περιεχόμενον μεταξὺ δύο σταθερῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης, εἶναι σταθερὰ διὰ πάσας τὰς θέσεις τῆς κινητῆς ἐφαπτομένης. (*Traité des propriétés projectives des figures*, τόμ. I, nº 464).



Σχ. 1314.

1η Ἀπόδειξις.

Ἔστωσαν ΛΓ, ΛΔ αἱ σταθεραὶ ἐφαπτόμεναι, ΜΝ ἡ κινητὴ ἐφαπτομένη. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ γωνία ΜΕΝ εἶναι σταθερά.

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΔ, ΕΙ, ΕΓ. Γνωρίζομεν (G., nº 633), ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὸ κοινὸν σημεῖον δύο ἐφαπτομένων μετὰ μιᾶς τῶν ἑστιῶν εἶναι διχοτόμος τῶν ἐκ τῆς ἑστίας ταύτης ἑστιακῶν ἀκτίνων εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Ἑπομένως,

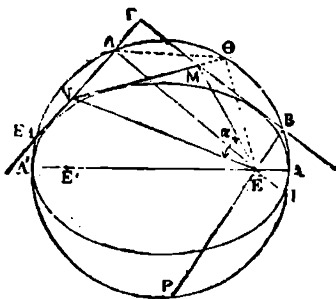
$$\widehat{MEΓ} = \widehat{MEI}, \quad \widehat{NEI} = \widehat{NEΔ},$$

ἄρα καὶ

$$\widehat{MEN} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{ΓEΔ} = \text{σταθερὰ γωνία}.$$

Παρατήρησις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ἀπ' εὐθείας καὶ νὰ συναχθῇ ὡς ἁπλοῦν πόρισμα αὐτοῦ ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν ΓΕΛ καὶ ΔΕΛ.

2111. *2α Ἀπόδειξις.* Γράφομεν τὸν πρωτεύοντα κύκλον τῆς ἐλλείψεως καὶ προβάλλομεν τὴν ἑστίαν Ε ἐπὶ τὰς δύο ἐφαπτομένας. Κατὰ τὸ *θεώρημα τοῦ La Hire* (G., n° 626), αἱ κορυφαὶ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΕΒΓ, ΕΘΝ, $ΕΔΕ_1$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ πρωτ. κύκλου.



Σχ. 1315.

Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΕΘΔΝ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον ($\widehat{Δ} = \widehat{Θ} = 90^o$), θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{ΕΝΘ} = \widehat{ΕΔΘ} = \frac{1}{2}\,\widehat{ΘΒΙ},$$

ἀφοῦ ἡ γωνία ΙΕΔΘ δύναται νὰ θεωρηθῇ ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ πρωτεύοντος κύκλου ΑΑ'. Ἐπίσης, τὸ τετράπλευρον ΕΒΘΜ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ἑπομένως:

$$\widehat{ΕΜΝ} = \widehat{ΕΒΘ} = \frac{1}{2}\,\widehat{ΘΔΡ} \text{ τῆς ἰδίας περιφερείας ΑΑ'.}$$

Ἡ τρίτη γωνία ΜΕΝ τοῦ τριγώνου ΜΕΝ θὰ ἔχῃ ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοιπομένου τόξου τῆς περιφερείας ΑΑ'$= \frac{1}{2}\widehat{ΙΡ}$. Καὶ ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι σταθερὸν τόξον (ἀνεξάρτητον τῆς ΜΝ), ἕπεται ὅτι καὶ ἡ γωνία ΜΕΝ $=$ α εἶναι σταθερὰ γωνία.

Θεώρημα 889—I

2112. **Εἰς τὸ ἐπίπεδον σταθερᾶς γωνίας ΒΓΕ στρέφομεν περὶ σταθερὸν σημεῖον Ε γωνίαν σταθεροῦ μεγέθους α καὶ ἔστω ΜΝ ἡ εὐθεῖα ἣν ὁρίζουν ἑκάστοτε τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν τῶν δύο γωνιῶν.**

Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΝ περιβάλλει κωνικὴν τομὴν ἔχουσαν ἑστίαν τὸ σημεῖον Ε. (Poncelet, *Traité des pr. proj. des figures*, n° 472).

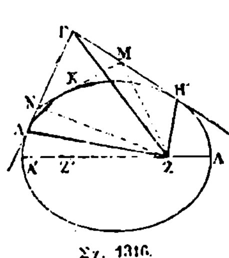
Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου.

Θεώρημα 889—II

2113. **Ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὸ σημεῖον τομῆς δύο ἐφαπτομένων ἐλλείψεως μετὰ μιᾶς τῶν ἑστιῶν εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν ἐκ τῆς ἑστίας ταύτης ἑστιακῶν ἀκτίνων εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. (Poncelet, αὐτ., nos 461, 469).**

Ἡ ἀπ' εὐθείας ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι γνωστὴ (G., n° 633)· δυνάμεθα ὅμως νὰ συναγάγωμεν αὐτὸ καὶ ὡς πόρισμα τοῦ *θεωρήματος τοῦ Poncelet* (§ 2110).

Πράγματι, διὰ θέσιν τοῦ σημείου ἐπαφῆς Κ τῆς κινητῆς ἐφαπτομένης ΜΝ συμπίπτουσαν πρὸς τὴν τοῦ Η, θὰ εἶναι



Σχ. 1316.

$$\widehat{MZN} = \widehat{\Gamma ZH}$$

καὶ διὰ $K \equiv \Lambda$,

$$\widehat{MZN} = \widehat{\Gamma Z\Lambda}.$$

Ἤτοι :

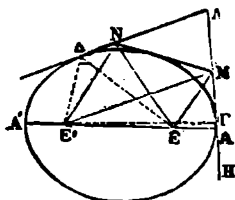
$$\widehat{\Gamma ZH} = \widehat{\Gamma Z\Lambda}.$$

2114. *Ὁρισμός.* Τὴν γωνίαν ΜΖΝ καλοῦμεν καὶ *ἐπιβατικὴν γωνίαν* (angle vecteur), ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν μεταβλητὴν ἐφαπτομένην ΜΝ καὶ ἐν σχέσει πρὸς τὰς σταθερὰς ἐφαπτομένας ΓΗ, ΓΛ καὶ τὴν ἑστίαν Ε.

Εἰς μίαν ἐφαπτομένην ΜΝ ἀντιστοιχοῦν δύο *ἐπιβατικαὶ γωνίαι*, αἱ ΜΖΝ καὶ ΜΖ'Ν. Αὗται εἶναι ἐν γένει ἄνισαι, ἐκτὸς ἐὰν αἱ σταθεραὶ ἐφαπτόμεναι εἶναι ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τοὺς ἄξονας τῆς κωνικῆς τομῆς.

2ον Θεώρημα τοῦ Poncelet 890

2115. Εἰς πᾶσαν ἔλλειψιν, αἱ δύο ἐπιβατικαὶ γωνίαι, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς κινητὴν ἐφαπτομένην ΜΝ, ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα, ἴσον πρὸς τὸ παραπλήρωμα τῆς γωνίας τῶν σταθερῶν ἐφαπτομένων. (*Traité etc.*, n° 447.—*Applications d'Algèbre et de Géométrie*, τόμ. II, σ. 460).



Σχ. 1317.

Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\widehat{MEN} + \widehat{ME'N} + \widehat{\Lambda} = 2 \text{ ὀρθαὶ γωνίαι}$$

Ἀλλ' εἶναι :

$$\widehat{MEN} = \frac{1}{2}\widehat{\Gamma E\Delta}, \quad ME'N = \frac{1}{2}\widehat{\Gamma E'\Delta},$$

τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν γωνιῶν τῶν δύο τετραπλεύρων ΕΓΛΔ καὶ Ε'ΓΛΔ εἶναι 8 ὀρθαί. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς τὰ δύο μερικὰ ἀθροίσματα :

$$\widehat{\Gamma E\Delta} + \widehat{\Lambda} + \widehat{\Gamma E'\Delta} + \Lambda \quad \text{ἢ} \quad 2[\widehat{MEN} + \widehat{ME'N} + \widehat{\Lambda}] \qquad (1)$$

καὶ

$$\widehat{E\Gamma\Lambda} + \widehat{E\Delta\Lambda} + \widehat{E'\Gamma\Lambda} + \widehat{E'\Delta\Lambda}. \qquad (2)$$

Καὶ ἐπειδή :

$$\widehat{E\Gamma\Lambda} + \widehat{E'\Gamma\Lambda} = 2 \text{ ὀρθαί},$$

ἀφοῦ

$$\widehat{E'\Gamma\Lambda} = \widehat{E\Gamma H},$$

καὶ ὁμοίως

$$\widehat{E\Delta\Lambda} + \widehat{E'\Delta\Lambda} = 2 \text{ ὀρθαί},$$

ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα (2) ἰσοῦται πρὸς 4 ὀρθάς. Τὴν αὐτὴν ἄρα τιμὴν θὰ ἔχῃ καὶ τὸ ἄθροισμα (1) καὶ κατὰ συνέπειαν

$$\widehat{MEN} + \widehat{ME'N} + \widehat{\Lambda} = 2 \text{ ὀρθαὶ γωνίαι.}$$

Θεώρημα 890—I

2116. **Εἰς τὴν ὑπερβολήν, εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἰδίων ἐπιβατικῶν γωνιῶν ἥτις εἶναι σταθερὰ γωνία.**

Θεώρημα 891

2117. **Εἰς κωνικὴν τομὴν θεωροῦμεν τετράπλευρον περιγεγραμμένον εἰς αὐτήν, ὡς καὶ τὸ τετράπλευρον τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου. Δείξατε ὅτι αἱ διαγώνιοι τῶν δύο τετραπλεύρων διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (Νεύτων).**

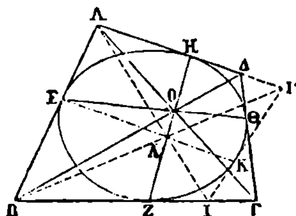
Δοθεῖσαν κωνικὴν τομὴν δυνάμεθα πάντοτε νὰ τοποθετήσωμεν ἐπὶ κώνου ἐκ περιστροφῆς (§ ἐπμ. 2212). Διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου καὶ διὰ τῶν πλευρῶν καὶ διαγωνίων τῶν δύο τετραπλεύρων φέρομεν ἐπίπεδα καὶ ἔστω (Τ) τομὴ τοῦ κώνου καὶ τῶν ἐπιπέδων τούτων ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦ κώνου.

Ἡ τομὴ αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ περιφερείας ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης εἰς δύο τετράπλευρα καὶ διὰ τὰ ὁποῖα αἱ τέσσαρες διαγώνιοι αὐτῶν τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον (§ 1274). Τὸ αὐτὸ ἄρα συμβαίνει καὶ εἰς τὴν δοθεῖσαν κωνικὴν τομήν.

Θεώρημα 891—I

2118. **Δοθεισῶν πέντε εὐθειῶν νὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὰς κωνικῆς τομῆς.**

Πρόκειται περὶ ἀμέσου ἐφαρμογῆς τοῦ *θεωρήματος τοῦ Νεύτωνος* (§ 2117). Ἐπειδὴ τέσσαρες ἐφαπτόμεναι ὁρίζουν τετράπλευρον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένον εἰς τὴν κων. τομὴν καὶ τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς σημεῖον Ο· διὰ τοῦ σημείου τούτου θὰ διέρχωνται καὶ αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου τῶν σημείων ἐπαφῆς.



Σχ. 1318.

Ἔστω ΙΙ' ἡ πέμπτη ἐφαπτομένη· ἡ εὐθεῖα αὕτη μετὰ τριῶν ἐκ τῶν δοθεισῶν ὁρίζει δεύτερον περιγεγραμμένον τετράπλευρον ΑΒΙΙ', τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς σημεῖον Λ.

Ἐπειδὴ αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΔ, ΒΓ ἀνήκουν καὶ εἰς τὰ δύο τετράπλευρα, ἡ διὰ τῶν Λ καὶ Η εὐθεῖα εἶναι ἡ χορδὴ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων τούτων.

Θεωροῦντες καὶ τὸ τετράπλευρον τῶν τεσσάρων εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΙΙ', ὁρίζομεν ἀναλόγως τὴν χορδὴν ἐπαφῶν ΕΘ.

2119. ***Πόλοι καὶ πολικαὶ εἰς τὰς κωνικὰς τομάς.*** Ἐπειδὴ μίαν τυχοῦσαν κωνικὴν τομὴν δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν ἐπὶ κώνου ἐκ περιστροφῆς (§ 2212), εἶναι φανερὸν ὅτι πᾶσαι αἱ προβολικαὶ

ἰδιότητες τῶν πόλων καὶ πολικῶν εἰς τὸν κύκλον διατηροῦνται καὶ εἰς τὰς κωνικὰς τομάς. Θὰ περιορισθῶμεν νὰ ἀναφέρωμεν μόνον μερικὰς ἐξ αὐτῶν:

Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου κων. τομῆς φέρωμεν τεμνούσας αὐτήν, αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τομῆς ἑκάστης τεμνούσης καὶ τῆς καμπύλης τέμνονται εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας — τῆς πολικῆς τοῦ σημείου Μ.

Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι, ἀνὰ δύο, τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς κων. τομῆς καὶ τῶν διὰ τοῦ Μ τεμνουσῶν τέμνονται ἐπὶ τῆς πολικῆς τοῦ σημείου Μ.

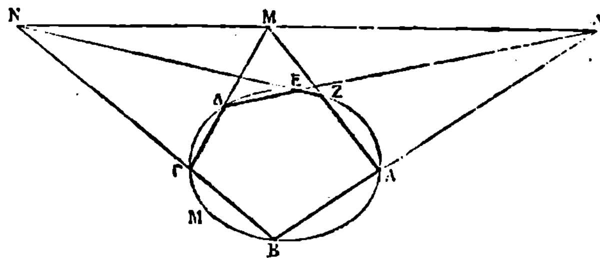
Τὸ κοινὸν σημεῖον δύο ἐφαπτομένων κων. τομῆς εἶναι ὁ πόλος τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν.

Διὰ νὰ καταστῇ τις ἐνήμερος τῆς γονιμότητος τῆς θεωρίας τῶν πολικῶν ἐν τῇ ἐφαρμογῇ της εἰς τὰς κων. τομάς, ὡς καὶ τῆς *Μεθόδου τῶν ἀντιστρόφων πολικῶν τοῦ Poncelet*, ἀρκεῖ νὰ ἀναγνώσῃ τὸ *Traité des propriétés projectives des figures* τοῦ ἐπιφανοῦς τούτου γεωμέτρου.

Ἑξάγραμμον τοῦ Pascal 891—II

2120. **Εἰς πᾶν ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κωνικὴν τομήν, τὰ σημεῖα τομῆς τῶν τριῶν ζευγῶν ἀπέναντι πλευρῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.**

1) Ἡ πρότασις εἶναι φανερὰ ἐκ τῆς ἀντιστοίχου εἰς τὴν περι-



Σχ. 1319.

φέρειαν (§ 1117 γ) καὶ δι' ἀναγωγῆς εἰς τὸν πρωτεύοντα κύκλον, ἢ διὰ τοποθετήσεως τῆς κων. τομῆς ἐπὶ κώνου ἐκ περιστροφῆς.

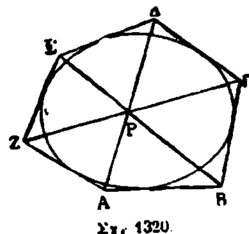
2) Δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰς ἰδιότητας τῶν διατεμνουσῶν *(θεώρημα τοῦ Μενελάου)* ἀπ' εὐθείας εἰς τὸ σχῆμα τῆς κωνικῆς τομῆς καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου (G., nº 747).

3) Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς ἰδιότητας τοῦ ἀναρμονικοῦ λόγου τετράδων σημείων ἢ εὐθειῶν, ἐργαζόμενοι ἀναλόγως ὡς καὶ προκειμένου περὶ τοῦ κύκλου. (Βλ.: *Traité de Géométrie* τῶν Rouché καὶ Comberousse, 7η ἔκδοσις, nº 328).

Θεώρημα τοῦ Brianchon 891—III

2121. **Εἰς πᾶν ἑξάγωνον περιγεγραμμένον εἰς κωνικὴν τομήν, αἱ συνδέουσαι εὐθεῖαι τὰ τρία ζεύγη ἀπέναντι κορυφῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.**

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται τελείως ἀναλόγως διὰ τῶν 1) ἢ 3) προηγουμένως ἀναφερθεισῶν μεθόδων, ἢ καὶ δι' ἐφαρμογῆς τῆς θεωρίας τῶν ἀντιστρόφων πολικῶν εἰς τὸ προηγούμενον *θεώρημα τοῦ Pascal* (§ 2120).



Σχ. 1320

Σημείωσις. Βλ. *Traité de Géométrie* τῶν Rouché καὶ Comberousse, 7η ἔκδοσις, n° 329.

2122. Ἐφαρμογαὶ τῶν θεωρημάτων τῶν Pascal καὶ Brianchon.

Τὸ *ἐγγεγραμμένον ἑξάγωνον* μᾶς παρέχει τὸν τρόπον κατασκευῆς ὁσωνδήποτε σημείων κων. τομῆς ὅταν μᾶς δοθοῦν πέντε σημεῖα αὐτῆς· ἐπειδὴ συνδέοντες αὐτὰ ἀνὰ δύο κατὰ πάντας τοὺς δυνατοὺς τρόπους καὶ θεωροῦντες αὐτὰ ἑκάστοτε ὡς τὰς πέντε κορυφὰς ἑνὸς ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου, ἀνευρίσκομεν καὶ ἀπὸ μίαν ἕκτην κορυφὴν αὐτῶν—σημεῖον τῆς κων. τομῆς.

Τὰ πέντε νέα ταῦτα σημεῖα, συνδυαζόμενα μεταξύ των ἢ καὶ μὲ τὰ πρῶτα, δίδουν νέα ἑξάγωνα καὶ ἑπομένως νέα σημεῖα τῆς κων. τομῆς κ.ο.κ.

Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὸν προσδιορισμὸν ἕκτης ἐφαπτομένης κωνικῆς τομῆς, τῆς ὁποίας ἐδόθησαν πέντε ἄλλαι δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἰδιοτήτων τοῦ *περιγεγραμμένου κώνου.*

Τὰ *θεωρήματα τῶν Pascal καὶ Brianchon* μᾶς ἐπιτρέπουν τὸν προσδιορισμὸν μιᾶς κων. τομῆς εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς δίδονται ταύτης πέντε στοιχεῖα (σημεῖα ἢ ἐφαπτόμεναι): πέντε σημεῖα, τέσσαρα σημεῖα καὶ μία ἐφαπτομένη, τρία σημεῖα καὶ δύο ἐφαπτόμεναι, κλπ., πέντε ἐφαπτόμεναι. (Βλ.: *Mémoire sur les lignes de second ordre* τοῦ Brianchon, 1817).

Θεώρημα 891—IV

2122 α. **Ἐὰν ἓν τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κωνικὴν τομήν, τὰ δύο ζεύγη ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης εἰς τὰς ἀπέναντι κορυφὰς τοῦ τετραπλεύρου τέμνονται ἐπὶ τῆς τρίτης διαγωνίου αὐτοῦ.**

Εἶναι ἐπέκτασις τῆς ἀντιστοίχου ἰδιότητος τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου (§ 1237 β).

Θεώρημα τοῦ Möbius 892

2123. **Ἔστω ἐπιφάνεια παραγομένη διὰ περιστροφῆς κωνικῆς τομῆς περὶ τὸν ἑστιακὸν αὐτῆς ἄξονα. Δείξατε ὅτι πᾶν ἐπίπεδον ἀγόμενον διὰ μιᾶς τῶν ἑστιῶν Ε τοῦ μεσημβρινοῦ τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ κωνικὴν τομὴν ἔχουσαν τὸ σημεῖον Ε ὡς ἑστίαν.**

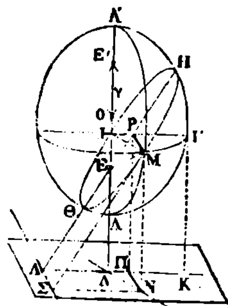
Ἔστω ὡς μεσημβρινὸς ἡ ἔλλειψις ΑΗΑ', ἔχουσα ἑστίας τὰς Ε καὶ Ε', α, β ἡμιάξονας, 2γ ἑστιακὴν ἀπόστασιν καὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΛ ὡς διευθετοῦσαν ἀντίστοιχον τῆς ἑστίας Ε.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ τελευταία αὐτὴ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς ἐλλείψεως ἀπ' αὐτῆς καὶ τῆς ἑστίας Ε εἶναι σταθερὸς (G., n° 845):

$$\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{ΗΕ}{ΗΛ}=\frac{γ}{α}.$$

Κατὰ τὴν περιστροφὴν περὶ τὸν ἄξονα ΑΑ', ἡ ἔλλειψις παράγει ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς καὶ ἡ διευθετοῦσα ΔΛ ἐπίπεδον (Π) κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΑ'.

Ἂς τάμωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν μεσημβρινὸν ΑΗΑ' καὶ διερχομένου διὰ τῆς ἑστίας Ε· ἔστω ΘΜΗ ἡ λαμβανομένη τομὴ καὶ ΛΣ ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ τοῦ θεωρουμένου.



Σχ. 1321.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς τομῆς ἀπὸ τῆς ἑστίας Ε καὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἔχουν λόγον σταθερόν· ἐπειδὴ τότε ἡ καμπύλη αὕτη θὰ εἶναι κωνικὴ τομή, ἔχουσα ἑστίαν τὸ σημεῖον Ε καὶ διευθετοῦσαν τὴν εὐθεῖαν ΛΣ.

Φέρομεν πρὸς τοῦτο διὰ τοῦ σημείου Μ μεσημβρινὴν τομὴν τῆς ἐπιφανείας καὶ ἐπίπεδον ΜΙΙ' κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα, τέμνον τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ περιφέρειαν ἀκτῖνος ΙΜ = ΙΙ'. Ἡ ΡΜ κάθετος ἐπὶ τὸν πρωτεύοντα μεσημβρινὸν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΛΣ, ὁ δὲ μεσημβρινὸς ΑΜΑ' ἔχει ὡς διευθετοῦσαν τὴν τομὴν ΔΝ τούτου καὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π). Προβάλλοντες τὸ σημεῖον Μ εἰς Ν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π), λαμβάνομεν:

$$\mathrm{MN} = \mathrm{P\Pi} = \mathrm{I\Delta} = \mathrm{I'K}, \quad \mathrm{M\Sigma} = \mathrm{P\Lambda},$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὸ μεσημβρινὸν ΑΜΑ' θὰ εἶναι

$$\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{I\Delta}} = \frac{\gamma}{\alpha}. \tag{1}$$

Ἀρκεῖ ἤδη νὰ ἐκφράσωμεν τὸ μῆκος ΙΔ συναρτήσει τοῦ ΡΛ.

Παρατηροῦμεν πρὸς τοῦτο ὅτι τὰ τρίγωνα ΛΕΔ, ΙΕΡ εἶναι ὅμοια· ἄρα

$$\frac{\mathrm{I\Delta}}{\mathrm{P\Lambda}} = \frac{\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{E\Lambda}} \tag{2}$$

καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2)

$$\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{P\Lambda}} = \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{M\Sigma}} = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{E\Lambda}}.$$

Ἐπειδὴ τὸ τελευταῖον μέλος τῆς σχέσεως ταύτης εἶναι σταθερὸν διὰ μίαν ὡρισμένην τομὴν τῆς ἐπιφανείας, ἔπεται ὅτι ὄντως ἡ τομὴ ΘΜΗ τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἔλλειψις, μὲ ἑστίαν Ε καὶ διευθετοῦσαν ΛΣ.

Σημείωσις. Βλ.: Ν. Α., 1857, σ. 176 καὶ *Hist. d. Sc. Math.* ὑπὸ Max. Marie, τόμ. XII, σ. 179.

Διὰ τοῦ θεωρήματος τῶν Quetelet καὶ Dandelin, καθ' ὃ πᾶσα τομὴ κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι δευτεροβάθμιος καμπύλη, εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδείξωμεν ἀπ' εὐθείας τὴν ἰδιότητα τῆς ἐφαπτομένης ὅπως σχηματίζῃ ἴσας γωνίας μετὰ τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. (Ν. Α., 1879, σ. 95, Maleix καὶ § 2114 α, Σημ.).

Ὑπερβολὴ Θεωρήματα

Θεώρημα 893

2124. Μία εὐθεῖα δὲν δύναται νὰ συναντᾷ ὑπερβολὴν εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα.

Ἡ αὐστηροτέρα καὶ μᾶλλον πλήρης ἀπόδειξις ἕπεται ἐκ τῆς σπουδῆς τῶν μεταβολῶν τῆς διαφορᾶς τῶν ἀποστάσεων δύο σταθερῶν σημείων ἀπὸ τυχούσης εὐθείας (*Μέθοδοι*, §§ 258—261)· ἀλλ'

Σχ. 1322.

ἡ ἀπόδειξις αὕτη ὑπερβαίνει τὸ πλαίσιον τῶν *Στοιχείων τῆς Γεωμετρίας*.

2124 α. *Παρατήρησις*. Δυσκολία διὰ τὴν ἀπόδειξιν παρουσιάζεται ὅταν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα XX′ διέρχεται μεταξὺ τῶν Z καὶ Z′ καὶ διὰ τὰ σημεῖα τὰ κείμενα πέραν τοῦ σημείου τομῆς τῆς XX′ καὶ τῆς ZZ_1, ὅπου Z_1 τὸ συμμετρικὸν τοῦ Z′ πρὸς τὴν XX′.

Ἐπίσης καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν θεωροῦμεν σημεῖα N πέραν τοῦ κοινοῦ Δ τῆς ZZ′ καὶ XX′ κείμενα (σχ. 1322). Ἐὰν τὸ συμμετρικὸν N′ πρὸς ZZ′ εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας ZN′Z′, ἡ δοθεῖσα ἀπόδειξις εἰς G., nº 680 δὲν ἀποδεικνύει ὅτι ἡ διαφορὰ N′Z′ — N′Z εἶναι διάφορος τῆς MZ′ — MZ ὅταν ἔχῃ δοθεῖ ὅτι M′Z′ — M′Z = 2α.

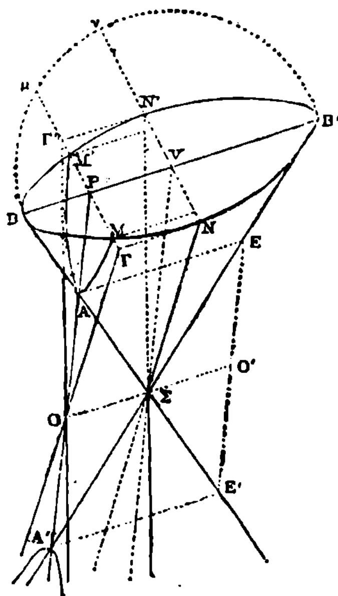
Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ καταφύγωμεν εἰς τὴν σπουδὴν τῶν μεταβολῶν τῆς διαφορᾶς τῶν ἀποστάσεων (§ 258). Πράγματι, ἀπὸ τοῦ σημείου Θ μέχρι X′ → ∞, ἡ διαφορὰ μεταβάλλεται ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ μήκους ζζ′, προβολῆς τῆς ZZ′ ἐπὶ τῆς XX′. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὰ σημεῖα μεταξὺ Δ καὶ X, ἡ διαφορὰ εἶναι μεγαλυτέρα (τῆς ZZ′, ἄρα καὶ) τῆς ζζ′, ἕπεται ὅτι διὰ τὸ σημεῖον N δὲν δύναται ἡ διαφορὰ αὕτη νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν διαφορῶν διὰ τὰ σημεῖα M ἢ M′.

Ἐπίσης, διὰ τὰ σημεῖα M καὶ N εὑρίσκομεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὰ Z καὶ Z′ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ζζ′ καὶ ἐπομένως ὅτι ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΓX′ δὲν ὑπάρχει σημεῖον P διὰ τὸ ὁποῖον PZ — PZ′ = 2α.

Θεώρημα 894

2124 β. **Ἔστω κῶνος ἐκ περιστροφῆς ΣBB′ καὶ τομὴ αὐτοῦ καθ' ὑπερβολὴν MAM′, ἔχουσα ἄξονα πρωτεύοντα τὸν AOA′. Δείξατε ὅτι αἱ ἀσύμπτωτοι OΓ, OΓ′ τῆς ὑπερβολῆς ταύτης εἶναι αἱ ἐκ τοῦ κέντρου της O παράλληλοι πρὸς τὰς γενετείρας ΣN, ΣN′ τοῦ κώνου, καθ' ἃς**

τέμνεται οὗτος ὑπὸ ἐπιπέδου ἀγομένου διὰ τῆς κορυφῆς του καὶ παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς ὑπερβολικῆς τομῆς·



Σχ. 1323.

Ἂς τάμωμεν τὸν κῶνον ὑπὸ ἐπιπέδου ΒΝΒ′Ν′ παραλλήλου πρὸς τὴν ΟΣ, καθέτου ἐπὶ τὸν πρωτεύοντα μεσημβρινὸν καὶ ἀγόμενον δι' εὐθείας ΡΜ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΣΒ′ καὶ τὴν ΟΡ. Ἡ εὐθεῖα ΜΜ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΒ′, ἐπὶ τὴν ΡΟ καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΣΒ′. Ὁμοίως, ἡ πρὸς ταύτην παράλληλος ΝΝ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΒΒ′, ΣV καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΣΒ′.

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ο εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΑ′, ἡ εὐθεῖα ΣV, παράλληλος πρὸς τὴν ΑΑ′, διαιρεῖ εἰς δύο μέρη ἴσα τὰς ΑΕ καὶ ΒΒ′, παραλλήλους ἀμφοτέρας πρὸς τὴν ΣΟ. Εἶναι ἑπομένως ἡ ΝΝ′ ὁ μικρὸς ἄξων τῆς ἐλλείψεως ΒΝΒ′ καὶ ἡ ΜΜ′ χορδὴ παράλληλος πρὸς αὐτόν. Ἑπομένως

$$PM < VN \quad ἤ \quad PM < P\Gamma.$$

Ὅταν τὸ ἐπίπεδον ΒΝΒ′ ἀπομακρύνεται τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, ἡ διαφορὰ ΜΓ ἐλαττοῦται. Ἐπειδὴ τὸ μὲν μῆκος ΡV μένει σταθερόν, ἐκ δὲ τοῦ κύκλου (ἐστιγμένου) μὲ διάμετρον τὸν μέγαν ἄξονα ΒΒ′ τῆς ἐλλείψεως λαμβάνομεν

$$\frac{P\mu}{V\nu} = \frac{PM}{VN}\left[= \text{συν}\,\omega = \frac{\beta}{\alpha}\right]$$

καθὼς καί

$$P\mu = \sqrt{V\mu^2 - VP^2} = \sqrt{V\nu^2 - VP^2} \qquad (V\mu = VB' = B\nu)$$

ἤ

$$P\mu = V\nu\sqrt{1 - \frac{VP^2}{V\nu^2}},$$

ἐκ τῆς ὁποίας σχέσεως καταφαίνεται ὅτι διὰ $V\nu = VB' \to \infty$, ὁ λόγος $\frac{P\mu}{V\nu} = \frac{PM}{V\nu}$ ἔχει ὅριον τὴν μονάδα καὶ ἡ διαφορὰ ἑπομένως $VN - PM$ ἤ $P\Gamma - M\Gamma$ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

Ἤτοι αἱ εὐθεῖαι ΟΓ, ΟΓ′ εἶναι αἱ ἀσύμπτωτοι τῆς ὑπερβολῆς (G., n° 680).

2124γ. *Παρατήρησις.* Ἡ γωνία τῶν ἀσυμπτώτων εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τῶν γενετειρῶν ΣΝ, ΣΝ′.

Διὰ δοθέντα κῶνον, ἡ γωνία τῶν ἀσυμπτώτων εἶναι μεγίστη ὅταν τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κώνου. Ἐπειδὴ εἶναι αὐτὴ τότε ἡ γωνία δύο ἀξονικῶν τοῦ κώνου γενετειρῶν.

2124 δ. Σημείωσις. Δύο αἰῶνας πρὶν τῶν Quetelet καὶ Dandelin, ὁ Grégoire de Saint-Vincent εἶχεν δώσει ἓν ὡραῖον θεώρημα ἐπὶ τῆς ὑπερβολικῆς τομῆς κώνου μὲ βάσιν κυκλικήν. Ὑποθέτοντες περιφέρειαν τὴν τομὴν ΒΝΒ'Ν' (σχ. 1323), θὰ ἔχωμεν

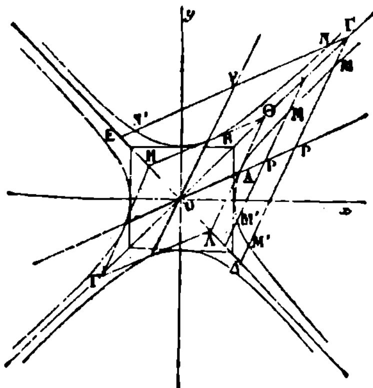
$$\Gamma M . \Gamma M' = (\Gamma P - MP)(\Gamma P + MP) = \Gamma P^2 - MP^2 = PY^2$$

ποσότητα σταθερὰν δι' ἓν ὡρισμένον τέμνον ἐπίπεδον [= ΓΟΓ'] καὶ διὰ τυχοῦσαν τομὴν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου. (*Mathesis*, 1904, σ. 179, A. Aubry).

Θεώρημα 895

2125. Δύο ὑπερβολαὶ καλοῦνται συζυγεῖς ἀλλήλων ἐὰν ἔχουν τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους καὶ τοὺς αὐτοὺς ἄξονας ἀλλὰ διὰ τὰς ὁποίας ὁ πρωτεύων ἄξων τῆς μιᾶς εἶναι ὁ δευτερεύων τῆς ἄλλης καὶ ἀντιστρόφως.

Εἰς τὴν ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν, πᾶσαι αἱ συζυγεῖς διάμετροι εἶναι ἴσαι, τὰ δὲ παραλληλόγραμμα τὰ κατασκευαζόμενα ἐπὶ δύο συζυγῶν διαμέτρων ἔχουν τὰς κορυφάς των ἐπὶ τῶν ἀσυμπτώτων.



Σχ. 1324.

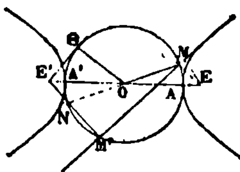
Ὑποθέτοντες ὅτι ὁ τόπος τῶν μέσων Ρ παραλλήλων χορδῶν ΜΜ' εἶναι ἡ εὐθεῖα ΟΡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς, παρατηροῦμεν ὅτι, ἕνεκα τῆς συμμετρίας τοῦ σχήματος πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους, ἐὰν λάβωμεν ΟΗ = ΟΛ, ἡ εὐθεῖα ΗΘ θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς συζυγοῦς τῆς δοθείσης ὑπερβολῆς καὶ τὸ σημεῖον Β μέσον αὐτῆς καὶ σημεῖον ἐπαφῆς· ἐπειδὴ καὶ τὸ Α εἶναι μέσον (ὡς γνωστὸν) τῆς ἐφαπτομένης ΛΘ, παραλλήλου πρὸς τὰς ΜΜ' χορδάς.

Αἱ διάμετροι ΟΑ, ΟΒ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ρόμβου ΘΛΘ'Η καὶ ἑπομένως πρὸς τὰς χορδὰς ΝΝ' καὶ ΜΜ', τῶν μέσων τῶν ὁποίων εἶναι τόποι. Ἀφ' ἑτέρου, εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ αἱ κορυφαὶ τοῦ ρόμβου ἑπομένως κεῖνται ἐπὶ τῶν ἀσυμπτώτων.

Δοθεισῶν δύο συζυγῶν διαμέτρων ὑπερβολῆς, ἡ μία τούτων διαπερᾷ τὴν καμπύλην ἐνῷ ἡ ἄλλη δὲν ἔχει κοινὰ σημεῖα μετ' αὐτῆς.

Θεώρημα 896

2126. Τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τῶν ἑστιῶν ὑπερβολῆς ἀπὸ τυχούσης ἐφαπτομένης αὐτῆς εἶναι σταθερόν.



Σχ. 1325.

Ἔστωσαν Μ, Μ' οἱ πόδες τῶν ἐκ τῶν Ε, Ε' καθέτων καὶ Ν ἡ τομὴ τῆς ΜΟ καὶ τῆς Ε'Μ'. Τὰ τρίγωνα ΕΜΟ, Ε'ΝΟ εἶναι προφανῶς ἴσα καὶ τὸ σημεῖον Ν κεῖται ἐπὶ τοῦ πρωτεύοντος τῆς ὑπερβολῆς κύκλου, ἀφοῦ ΟΜ = ΟΝ. Θὰ ἔχωμεν δέ:

$$E'M'.EM = E'M'.E'N = E'\Theta^2 =$$

$$= OE'^2 - O\Theta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2.$$

Παρατήρησις. Πλεῖστα θεωρήματα ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἔχουν τὰ ἀνάλογά των εἰς τὴν ὑπερβολήν· ἰδιαιτέρως διὰ τὰς προτάσεις τῶν §§ 2093, 2094.

Διὰ τὴν τελευταίαν, ὁ κύκλος εἶναι πραγματικὸς ἐφ' ὅσον $\beta < \alpha$· διὰ ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν ($\alpha = \beta$), ὁ κύκλος περιορίζεται εἰς τὸ κέντρον του καὶ διὰ $\beta > \alpha$ ἀποβαίνει φανταστικός. Ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα τότε νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένας τῆς ὑπερβολῆς καθέτους ἐπ' ἀλλήλας.

Θεώρημα 897

2127. Ἐπὶ τυχούσης τεμνούσης ὑπερβολήν, ἡ καμπύλη καὶ αἱ ἀσύμπτωτοι αὐτῆς ἀποτέμνουν ἴσα τμήματα.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 174).

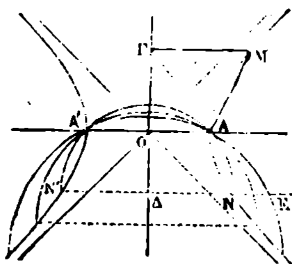
Θεώρημα 898

2128. Πᾶσα ἐφαπτομένη ὑπερβολῆς, περατουμένη εἰς τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς, διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς εἰς δύο ἴσα τμήματα.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 175).

Θεώρημα 899

2129. Ἔστω Γ ἡ προβολὴ σημείου Μ ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς ἐπὶ τὸν μὴ διατέμνοντα αὐτὴν ἄξονα. Ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Α αὐτῆς ἀπὸ τοῦ σημείου Γ εἶναι ἴση πρὸς τὴν τετμημένην ΜΓ τοῦ σημείου Μ.



Σχ. 1326.

Πράγματι,

$$M\Gamma^2 = x^2 = \alpha^2 + y^2$$

καὶ $A\Gamma^2 = O\Gamma^2 + OA^2 = y^2 + \alpha^2.$

Ἄρα: $M\Gamma = A\Gamma.$

Παρατήρησις. Βάσει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ κατασκευάσωμεν ὑπερβολὴν ([180]) σημεῖον πρὸς σημεῖον αὐτῆς.

Φέρομεν παράλληλον ΔΕ πρὸς

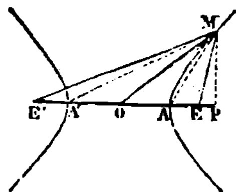
---

180. Σημ. μετ. Τῆς ὁποίας ἐδόθησαν ὁ δευτερεύων ἄξων καὶ μία κορυφὴ Α.

τὸν πρωτεύοντα ἄξονα αὐτῆς καὶ μὲ κέντρον Δ καὶ ἀκτῖνα ΔΑ γράφομεν περιφέρειαν, τέμνουσαν εἰς Ν καὶ Ν′ τὴν ἀχθεῖσαν παράλληλον. Τὰ σημεῖα Ν καὶ Ν′ ἀνήκουν εἰς τὴν ὑπερβολήν.

Θεώρημα 900

2130. **Εἰς τὴν ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν, ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὸ κέντρον μετὰ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς καμπύλης εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.** (Ν. Α., 1842, σ. 249).



Σχ. 1327.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΕΜΕ′, ἡ εὐθεῖα ΜΟ εἶναι διάμεσος αὐτοῦ· ἄρα

$$2\,MO^2 + 2\,OE^2 = ME'^2 + ME^2$$

ἢ $$ME'^2 + ME^2 = 2\,MO^2 + 2\gamma^2. \quad (1)$$

Ἀλλ᾽ εἶναι $ME' - ME = 2\alpha$

ἢ $$ME'^2 - 2\,.\,ME\,.\,ME' + ME^2 = 4\alpha^2$$

ἢ καὶ $$ME'^2 + ME^2 = 4\alpha^2 + 2\,.\,ME\,.\,ME'. \quad (2)$$

Διὰ συγκρίσεως τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν

$$2\,MO^2 + 2\gamma^2 = 4\alpha^2 + 2\,.\,ME\,.\,ME'$$

ἤ, ἀφοῦ διὰ τὴν ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν εἶναι $\gamma^2 = 2\alpha^2$,

$$MO^2 = ME\,.\,ME'.$$

Θεώρημα 901

2131. **Εἰς τὴν ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν, αἱ παρὰ τὴν βάσιν ΑΑ′ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΜΑ′, μὲ κορυφὰς τυχὸν σημεῖον Μ τῆς καμπύλης καὶ τὰ ἄκρα Α, Α′ τοῦ μεγάλου ἄξονος αὐτῆς, ἔχουν διαφορὰν ἴσην πρὸς μίαν ὀρθὴν γωνίαν.**

Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης $x^2 - y^2 = \alpha^2$ ἀνάγεται εἰς τὴν

$$MP^2 = OP^2 - OA^2 = (OP - OA)(OP + OA') =$$
$$= AP\,.\,A'P, \text{ (Σχ. 1327)}$$

ἐξ ἧς $$\frac{AP}{MP} = \frac{MP}{A'P}.$$

Εἶναι δηλ. τὰ τρίγωνα ΑΡΜ, Α′ΡΜ ὅμοια καὶ ἑπομένως :

$$M\widehat{A'}P = A\widehat{M}P,$$

$$M\widehat{A'}P + M\widehat{A}P = 90^\circ,$$

$$M\widehat{A'}A + 180^\circ - M\widehat{A}A' = 90^\circ,$$

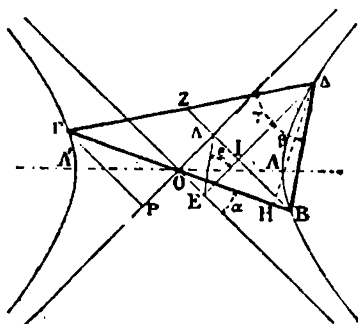
ἐξ ἧς $$M\widehat{A}A' - M\widehat{A'}A = 90^\circ.$$

Σημείωσις. Ἠδυνήθημεν νὰ γενικεύσωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα (§ 2131 α) καὶ ἤχθημεν οὕτω εἰς μίαν στοιχειώδη ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τῶν Brianchon καὶ Poncelet, διὰ τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν. (Βλ. ἐπμ., §§ 2183 α καὶ β).

Θεώρημα 901—I

2131 α. Εἰς τὴν ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν, ἡ τυχοῦσα διάμετρος σχηματίζει, μετὰ τῶν ἐκ τῶν ἄκρων της χορδῶν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς καμπύλης, γωνίας μὲ διαφορὰν σταθερὰν καὶ ἴσην πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας α, ἣν σχηματίζουν ἡ διάμετρος αὕτη καὶ ἡ ἀσύμπτωτος ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Δ.

Φέρομεν τὰς ΔΕ καὶ ΒΛ παραλλήλους πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους ΟΛ καὶ ΟΕ. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Β, Δ ἀνήκουν εἰς τὴν ὑπερβολήν, θὰ εἶναι



Σχ. 1328.

$$ΔΕ \,.\, ΟΕ = ΔΕ \,.\, ΙΛ = ΒΛ \,.\, ΙΕ$$

ἢ
$$\frac{ΕΔ}{ΙΕ} = \frac{ΛΒ}{ΛΙ}$$

ἐξ ἧς ἀναλογίας ἕπεται καὶ ἡ

$$\frac{ΕΔ - ΙΕ}{ΙΕ} = \frac{ΛΒ - ΙΛ}{ΛΙ}$$

ἢ
$$\frac{ΙΔ}{ΙΕ} = \frac{ΙΒ}{ΙΛ} .$$

Εἶναι ἑπομένως τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΙΛΕ καὶ ΙΒΔ ὅμοια καὶ αἱ γωνίαι ε καὶ β ἴσαι· ἀναλόγως ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ ε = γ, δηλ. ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Δ παράλληλος πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΔΓ. Ἐπειδὴ δέ, ἂν ΔΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΒ, θὰ εἶναι (§ 468):

$$\widehat{ΕΔΗ} = \frac{1}{2}(\widehat{Β} - \widehat{Γ}),$$

καὶ
$$\widehat{ΕΔΗ} = α,$$

ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς των καθέτους, ἕπεται

$$\widehat{Β} - \widehat{Γ} = 2α.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν α = 45° θὰ εἶναι ΔΒ = ΑΑ΄ καὶ

$$\widehat{Β} - \widehat{Γ} = 90°$$

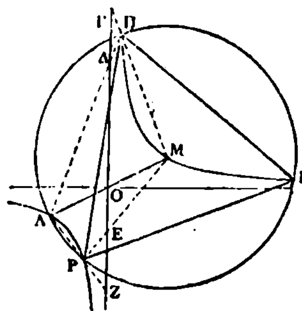
ὡς εἴδομεν προηγουμένως (§ 2131).

2131 β. Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τυχὸν σημεῖον ἰσοπλεύρου ὑπερβολῆς μετὰ τῶν ἄκρων διαμέτρου τεμνούσης αὐτήν, εἶναι ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην ἀσύμπτωτον τῆς καμπύλης. (A. d. G., τόμ. II, 1811-12, σ. 126).

Μεταξὺ τῶν λυτῶν τοῦ ζητήματος τούτου, συγκαταλέγονται καὶ οἱ Luillier, Encontre, Vecten καὶ Rochat καὶ τῶν ὁποίων τὰ ὀνόματα συχνὰ ἀπαντῶνται εἰς τὰς σελίδας τοῦ περιοδικοῦ αὐτοῦ.

2131 γ. Ἐὰν περιφέρεια ἔχῃ κέντρον σημεῖον ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς καὶ διέρχεται διὰ τοῦ συμμετρικοῦ τούτου πρὸς τὸ κέντρον τῆς καμπύλης, τέμνει τὴν ὑπερβολὴν εἰς τρία ἄλλα σημεῖα, ἅτινα εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου. (*N. A.*, 1892, σ. 31, n° 1642, Lemaire καὶ 1884, σ. 448, n° 1507).



Σχ. 1828 *bis*.

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (§ 2131, β), αἱ χορδαὶ ΜΠ, ΛΠ εἶναι ἴσον κεκλιμέναι πρὸς τὴν ἀσύμπτωτον, δηλ. αἱ ὀξεῖαι γωνίαι εἰς Δ καὶ Γ εἶναι ἴσαι μεταξύ των· τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς γωνίας εἰς Ε καὶ Ζ καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι ΔΛΡ καὶ ΡΜΠ [131] θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσαι.

Ἀλλ' εἶναι

$$\widehat{\Delta\Lambda P} = 180^\circ - \widehat{PI\Pi}$$

καὶ

$$\widehat{PM\Pi} = 2 . \widehat{PI\Pi}\cdot$$

ἄρα $PI\Pi = 60^\circ$. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ αἱ γωνίαι εἰς τὰ Ρ καὶ Π εἶναι ἐπίσης ἴσαι πρὸς 60° καὶ ἑπομένως ὅτι τὸ τρίγωνον ΡΠΙ εἶναι ἰσόπλευρον.

Παρατήρησις. Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἐλέγομεν ἐπίσης: Κατὰ τὸ *θεώρημα τῶν Brianchon καὶ Poncelet* (ἐπμ. § 2183 β), τὸ σημεῖον **Μ** εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΡΠΙ καὶ τοῦτο ἰσόπλευρον, ἀφοῦ τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς αὐτὸ συμπίπτει πρὸς τὸ ὀρθόκεντρόν του.

2131 β. Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι τοῦ Brocard. Τὸ ἀνήγγειλεν τὸ 1874 καὶ τὸ προέτεινε εἰς τὰ *Ν. Α.* τὸ 1884 (σ. 448, ζτμ. 1507, κατὰ τὸ *Educational Times*)· ἀπεδείχθη δὲ τὸ 1885, σ. 382 ὑπὸ τῶν Moret - Blanc, Barisien κλπ.

Ἐπανεμφανίσθη καὶ πάλιν τὸ 1892, ὑπὸ διατύπωσιν τοῦ Lemaire (σ. 31*, ζτμ. 7641). Εἰς τὸν ἴδιον τόμον, ὁ Brocard δίδει τὴν λύσιν, ὡς καὶ ἱστορικὸν σχετικὸν σημείωμα. Τὸ 1896, ὁ E. Foucart ἀποδεικνύει αὐτὸ ἀναλυτικῶς καὶ εἰς τὴν σ. 290 ὁ Mannheim δίδει τὴν ἀπόδειξιν ἣν ἀναδημοσιεύομεν ἀνωτέρω.

Ἡ ἀπόδειξις, ἣν ἀναφέρομεν ἡμεῖς εἰς τὴν *Παρατήρησιν* (ἀνωτ.), εἶναι βραχυτάτη καὶ πολὺ εὐμνημόνευτος.

2132. Χρῆσις τῆς διευθετούσης διὰ τὴν σπουδὴν τῶν κωνικῶν τομῶν. Διὰ τὴν στοιχειώδη σπουδὴν τῶν κωνικῶν τομῶν, οἱ ἄγγλοι συγγραφεῖς ὁρίζουν τὰς καμπύλας ταύτας διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῆς διευθετούσης καὶ τῆς ἀντιστοίχου πρὸς ταύτην ἑστίας.

Κωνικὴ τομὴ εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δοθέντος σημείου καὶ δοθείσης εὐθείας ἔχουν λόγον σταθερόν.

---

131. Σημ. μετ. Ἀφοῦ τὰ τρίγωνα ΔΛΖ καὶ ΜΓΕ εἶναι ὅμοια.

Ἡ καμπύλη εἶναι *ἔλλειψις*, ἐὰν ὁ λόγος οὗτος εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, *παραβολὴ* ἐὰν ἰσοῦται πρὸς αὐτὴν καὶ *ὑπερβολὴ* ἐὰν εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος.

Ἐκ τῆς διαφορᾶς ταύτης τῶν ἀρχικῶν ὁρισμῶν τῶν καμπύλων τούτων ἀπὸ τῆς κλασσικῆς, ἣν ἀκολουθοῦμεν ἡμεῖς, ἐπέρχεται σημαντικὴ ἀπόκλισις εἰς τὴν σειρὰν τῆς ἐκθέσεως τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἐν λόγῳ καμπύλων· διὰ τὴν σύγκρισιν καὶ τὴν ἐκ ταύτης ὠφέλειαν βλέπε:

Journal des Math. élémentaires 1890, σειρὰν ἄρθρων τοῦ Morel.— *A Treatise on Geometrical conics* ὑπὸ Cockshott καὶ Welter (1891), ὡς καὶ τὸ τόσον ἀξιόλογον ἔργον τῶν Milne καὶ Davis: *Geometrical conics*.

Παραβολὴ — Θεωρήματα

Θεώρημα 902

2133. **Αἱ ἐκ σημείου Ρ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι παραβολῆς σχηματίζουν ἴσας γωνίας πρὸς τὴν συνδέουσαν τὸ σημεῖον τοῦτο μετὰ τῆς ἑστίας εὐθεῖαν καὶ μετὰ τῆς ἐκ τοῦ ἰδίου σημείου παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῆς καμπύλης.**

Εἶναι δὲ ἡ πρώτη εὐθεῖα διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.

Σχ. 1320.

Ἔστωσαν ΡΜ, ΡΝ αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ ΡΗ ἡ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα.

1) Θὰ δείξωμεν πρῶτον ὅτι γων. ΖΡΝ ΗΡΜ.

Ἔστωσαν Ε καὶ Θ τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τῆς ἑστίας πρὸς τὰς ἐφαπτομένας. Τὰ σημεῖα ταῦτα ἀνήκουν εἰς τὴν διευθετοῦσαν τῆς παραβολῆς (G., n° 695), αἱ δὲ προβολαὶ Ι καὶ Κ τῆς ἑστίας ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων εἶναι σημεῖα τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφὴν τῆς καμπύλης (G., n° 697).

Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον ΡΖ διέρχεται διὰ τῶν σημείων Ι καὶ Κ, ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΖΙΡΚ θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{KPZ} = \widehat{KIZ} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{KIZ} = \widehat{HPM}$$

ἀφοῦ αἱ δύο τελευταῖαι γωνίαι ἔχουν τὰς πλευρὰς των καθέτους·

Ἐπομένως

$$KPZ \quad ZPN \quad HPM.$$

2) Θὰ δείξωμεν ὅτι γων. PZM = PZN.
Ἐπειδὴ

$$\widehat{PZM} = \widehat{PEM}, \quad \widehat{PZN} = \widehat{P\Theta N},$$

ὡς ἐκ τῆς συμμετρίας, καὶ

$$\widehat{PEM} = 90^\circ + \widehat{PE\Theta} = 90^\circ + \widehat{P\Theta E} = \widehat{P\Theta N},$$

ἀφοῦ $\widehat{PE\Theta} = \widehat{P\Theta E}$ ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου

$$EP\Theta \quad (PE = PZ = P\Theta),$$

ἕπεται

$$\widehat{PZM} = \widehat{PZN}.$$

Θεώρημα 902—I

2133 α. **Ἡ ἀπόστασις τῆς ἑστίας παραβολῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὴν γωνίας εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.**

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἔχωμεν :

$$\widehat{NPZ} = \widehat{HPM} = \widehat{EMP} \text{ (ZM παραλ. τῆς PH)} = \widehat{PMZ}$$

καὶ ὁμοίως

$$\widehat{PNZ} = \widehat{MPZ}.$$

Εἶναι δηλ. τὰ τρίγωνα NPZ καὶ MPZ ὅμοια καὶ ἑπομένως

$$\frac{ZM}{ZP} = \frac{ZP}{ZN} \quad \text{ἢ} \quad ZP^2 = ZM \,.\, ZN.$$

2133 β. Πόρισμα. **Ἡ ἀπόστασις τῆς ἑστίας παραβολῆς ἀπὸ ἐφαπτομένης αὐτῆς εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ τῆς ἡμιπαραμέτρου τῆς παραβολῆς (= ἑστιακῆς ἀποστάσεως τῆς κορυφῆς τῆς παραβολῆς).**

Ἀρκεῖ νὰ ἀντικατασταθῇ ἡ μία τῶν ἐφαπτομένων τῆς προηγουμένης προτάσεως διὰ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφὴν τῆς καμπύλης.

Θεώρημα 903

2134. **Αἱ ἐφαπτόμεναι παραβολῆς, αἱ ἐκ σημείου P τῆς διευθετούσης αὐτῆς ἀγόμεναι, εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Ἡ δὲ χορδὴ ἐπαφῶν διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν συνδέουσαν τὸ σημεῖον I μετὰ τῆς ἑστίας εὐθεῖαν.**

Διὰ τὴν ἀγωγὴν τῶν ἐκ τοῦ P ἐφαπτομένων, γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον P καὶ ἀκτῖνα PE. Αἱ κάθετοι IM, ΘN ὁρίζουν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς (G., n° 703).

Αἱ γωνίαι PEM, PIM εἶναι ὀρθαί, ὡς καὶ ἡ γων. PEN· αἱ εὐθεῖαι, ἑπομένως, EM, EN κεῖνται εἰς τὴν προέκτασιν ἡ μία τῆς ἄλλης. Διέρχεται δηλ. ἡ χορδὴ ἐπαφῶν MN διὰ τῆς ἑστίας καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν PE.

Τὴν ἀνωτέρω πρότασιν πορίζόμεθα καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου μέρους τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως. Ἐπειδὴ αἱ ἐφαπτόμεναι, οὖσαι κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας EI καὶ EΘ, κατ' ἀνάγκην θὰ τέμνωνται κατ' ὀρθὴν γωνίαν, ἀφοῦ ἡ γωνία IEΘ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμιπεριφέρειαν.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι ἡ διευθετοῦσα παραβολῆς εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τομῆς τῶν καθέτων ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τόπος τῶν κοινῶν σημείων τῶν ἐφαπτομένων, δι' ἃς ἡ χορδὴ τῶν ἐπαφῶν διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας.

Σχ. 1330.

Θεώρημα 904

2135. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν τμημάτων ἑστιακῆς χορδῆς παραβολῆς εἶναι σταθερὰ ποσότης.

Ἔστω MEN ἡ χορδή· θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα

$$\frac{1}{EM}+\frac{1}{EN}=\frac{EM+EN}{EM.EN}=\frac{MN}{EM.EN}$$

εἶναι σταθερόν.

Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΘM, ΘN. Κατὰ τὰ προηγούμενα (§ 2134, *Παρατήρησις*), τὸ σημεῖον Θ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διευθετούσης καὶ ἡ γωνία NΘM εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ EΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν MN. Ἑπομένως:

$$EM.EN=E\Theta^2$$

καὶ διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ λόγος $\frac{MN}{\Theta E^2}$ εἶναι σταθερός.

Γνωρίζομεν ὅτι

$$B\Theta=\Theta E=\Theta\Gamma \text{ ἢ } B\Gamma=2.\Theta E=MP,$$

ὅπου MP κάθετος ἐπὶ τὴν ΓN. Ἀφ' ἑτέρου, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔEΘ καὶ NMP εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς των καθέτους· ἑπομένως

$$\frac{MN}{\Theta E}=\frac{MP}{E\Delta}=\frac{2\Theta E}{E\Delta}$$

Σχ. 1331.

καὶ

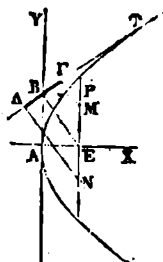
$$\frac{MN}{\Theta E^2}=\frac{2}{E\Delta}, \text{ ποσότης σταθερά.}$$

2136. Παρατήρησις. $\frac{2}{E\Delta} = \frac{2}{p}$. Ἐπομένως: $\frac{1}{EM} + \frac{1}{EN} = \frac{2}{p}$ ἤ:

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν δύο τμημάτων ἑστιακῆς χορδῆς παραβολῆς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ἀντιστρόφου τῆς παραμέτρου αὐτῆς.

Θεώρημα 905

2137. Ἐὰν εἰς τὴν ἑστίαν παραβολῆς ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ λάβωμεν ἐπ' αὐτῆς δύο τμήματα ΕΜ, ΕΝ ἴσα καὶ ἑκατέρωθεν τῆς ἑστίας κείμενα, τὰ σημεῖα Μ, Ν καὶ αἱ προβολαὶ αὐτῶν Γ, Δ ἐπὶ τυχούσης ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἶναι κορυφαὶ τραπεζίου σταθεροῦ ἐμβαδοῦ. (*N. A.*, 1845, σ. 363).



Σχ. 1332.

Ἐπειδὴ (§ 1566)

$$(\text{ΜΓΔΝ}) = \text{ΜΝ} \,.\, \text{ΒΡ} = \text{σταθερόν},$$

ἀφοῦ τὸ μέσον Β τῆς πλευρᾶς ΔΓ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφὴν (§ 2134).

Πρόβλημα 905—I

2138. Εἰς τὴν ἑστίαν Ε ἐλλείψεως ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὸν μέγαν αὐτῆς ἄξονα καὶ ἐπὶ ταύτης λαμβάνομεν δύο τμήματα ΕΜ, ΕΝ ἴσα καὶ ἑκατέρωθεν τῆς ἑστίας κείμενα.. Ζητεῖται ὅπως ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς ἐλλείψεως τοιαύτη, ὥστε τὸ τραπέζιον τῶν Μ, Ν καὶ τῶν προβολῶν Γ, Δ αὐτῶν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν δοθὲν k^2.

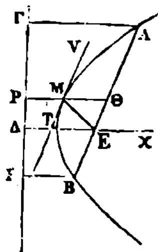
Ἡ προβολὴ τῆς ἑστίας ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, δηλ. τὸ μέσον Β τοῦ τμήματος ΓΔ, κεῖται ἐπὶ τοῦ πρωτεύοντος κύκλου. Διὰ τὴν κατασκευὴν ἑπομένως τοῦ σημείου τούτου καὶ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, εὑρίσκομεν τὴν τομὴν Β τῆς περιφερείας ταύτης καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν ΜΝ, εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ἀγομένην ἴσην πρὸς

$$\text{ΒΡ} = \frac{k^2}{\text{ΜΝ}}$$

Σημείωσις. Αἱ τόσον στοιχειώδεις λύσεις τῶν ζητημάτων τῶν §§ 2137 καὶ 2138 ὑπεδείχθησαν ὑπὸ τοῦ Terquem. (*N. A.*, 1845, σ. 365).

Θεώρημα 906

2139. Πᾶσα ἑστιακὴ χορδὴ παραβολῆς εἶναι τετραπλασία τῆς ἑστιακῆς ἀκτῖνος εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς πρὸς τὴν χορδὴν ταύτην παραλλήλου ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης. (*N. A.*, 1877, σ. 335 καὶ 1878, σ. 91).



Σχ. 1333.

Φέρομεν τὰς καθέτους ΑΓ, ΒΙ, ΜΡ ἐπὶ τὴν διευθετοῦσαν τῆς παραβολῆς· ἡ ΜΡ, προεκτεινομένη, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Θ τῆς ΑΒ (G., n° 706, 2). Ἄρα

$$2 \,.\, \text{ΘΡ} = \text{ΑΓ} + \text{ΒΙ} = \text{ΑΕ} + \text{ΕΒ} = \text{ΑΒ}.$$

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΕΜΤ εἶναι ἰσοσκελὲς — ἀφοῦ $\widehat{EMT} = \Theta M V = \widehat{ETM}$ — θὰ εἶναι

$$EM = ET = \Theta M = MP, \quad P\Theta = 2 \cdot EM,$$

καὶ ἑπομένως

$$2\Theta P \ \text{ἢ} \ 4EM = AB.$$

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα εἶναι τοῦ Sondat, καθηγητοῦ εἰς Annesy· τὸ ὄνομα αὐτοῦ ἀνεφέρετο συχνὰ εἰς τὰ *N. A.*, τῶν ἐτῶν 1875-1880.

Θεώρημα 907

2140. Τὸ μεταξὺ δύο σταθερῶν ἐφαπτομένων παραβολῆς τμῆμα μεταβλητῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς, φαίνεται ἐκ τῆς ἑστίας ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν. (*Traité d. pr. proj. des figures* τοῦ Poncelet, τόμ. I, n° 466, 467. Κατὰ τὸν Poncelet, τὸ θεώρημα τοῦτο, ὡς καὶ τὸ ἑπόμενον (§ 2141), ἀνήκουν εἰς τὸν Lambert).

Σχ. 1334.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος ἐκείνης διὰ τὴν ἔλλειψιν.

Προβάλλομεν τὴν ἑστίαν ἐπὶ τὰς τρεῖς ἐφαπτομένας κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Θ, Ν, κείμενα ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφὴν (§ 2134).

Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΕΘΔΝ εἶναι ἐγγράψιμον, θὰ ἔχωμεν

$$\text{γων. } B\Theta M = N\Theta\Delta = NE\Delta$$

καὶ ἐκ τοῦ ὁμοίως ἐγγραψίμου ΘΕΜΒ,

$$\text{γων. } B\Theta M = BEM.$$

Ἑπομένως:

$$\text{γων. } BE\Delta = MEN.$$

Εἶναι δηλ. ἡ γωνία καθ' ἣν φαίνεται τὸ τμῆμα ΒΔ ἐκ τῆς ἑστίας ἴση πρὸς τὸ *παραπλήρωμα τῆς γωνίας τῶν δύο σταθερῶν ἐφαπτομένων.*

Θεώρημα τοῦ Lambert 907—I

2141. Ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνων ΒΓΔ (σχ. 1334) διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας.

Ἐπειδὴ αἱ εἰς τὰ Ε καὶ Γ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί. (Βλ. ἐπίσης ἐπμ. § 2166).

Τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου (ΒΓΔ) *περιγεγραμμένου εἰς παραβολὴν εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διευθετούσης αὐτῆς.* (Steiner). ([132]).

---

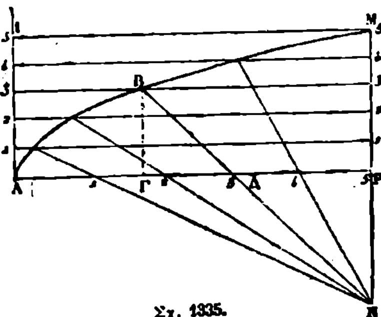
132. Σημ. μετ. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ε εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ Steiner (ἢ Miquel) τοῦ πλήρους τετραπλεύρου τῶν τεσσάρων εὐθειῶν ΓΒ, ΓΔ ΒΔ, ΜΝ καὶ κατὰ τὴν § 712 α. Σημείωσις:

3) *Οἱ πόδες τῶν ἐκ τοῦ* Ρ (= Ε *ἐνταῦθα*) *καθέτων ἐπὶ τὰς τέσσαρας εὐ-*

2142. *Σημείωσις*. Ἐκ τῶν θεωρημάτων τούτων δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν πλῆθος πορισμάτων. (Βλ. *Poncelet, Traité* κλπ., τομ. I, n° 465 καὶ ἑπόμ. *Applications d'Analyse et de Géométrie*, τόμ. II, σ. 461 καὶ ἑπμ.).

Θεώρημα 908

2143. Διὰ τὴν σχεδίασιν τοῦ ζυγοῦ μιᾶς ἀτμομηχανῆς, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἡμίσεος μήκους ΑΡ καὶ τοῦ ἡμίσεος πλάτους ΡΜ=ΡΝ, διαιροῦμεν τὰ μήκη ΑΡ καὶ ΜΡ εἰς τμήματα ἴσα καὶ τοῦ αὐτοῦ πλήθους. Διὰ τῶν σημείων διαιρέσεως τοῦ μήκους ΜΡ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα ΑΡ αἱ ἑνοῦμεν τὸ σημεῖον Ν μὲ ἀ σημεῖα διαιρέσεως Γ, Δ... οὗ ἄξονος.



Σχ. 1335.

Δείξατε ὅτι αἱ τομαὶ τῶν ἀχθεισῶν παραλλήλων καὶ τῶν ἀντιστοίχων πρὸς αὐτὰς εὐθειῶν ΝΓ, ΝΔ... εἶναι σημεῖα παραβολικοῦ τόξου ΑΒΜ.

Διὰ τὸ σημεῖον Β, ἐπὶ παραδείγματι, θὰ ἔχωμεν $B\Gamma = \frac{3}{5} MP$, ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΓΔ, ΡΔΝ λαμβάνομεν:

$$\frac{\Gamma\Delta}{\Delta P} = \frac{B\Gamma}{MP} = \frac{3}{5} \quad \text{καὶ} \quad \Gamma\Delta = \frac{3}{5}\Delta P = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}AP\right) = \frac{6}{25}AP.$$

Ἀλλ' εἶναι:

$$A\Gamma = \frac{3}{5}AP - \Gamma\Delta = \frac{15}{25}AP - \frac{6}{25}AP = \frac{9}{25}AP$$

καὶ ὡς εἴδομεν

$$\frac{B\Gamma}{MP} = \frac{3}{5}.$$

Ἑπομένως:

$$\frac{B\Gamma^2}{MP^2} = \frac{9}{25} = \frac{A\Gamma}{AP} \quad \text{ἢ} \quad B\Gamma^2 = A\Gamma \cdot \frac{MP^2}{AP} = A\Gamma \cdot c.$$

θείας κεῖνται ἐπ' εὐθείας R, ἥτις εἶναι προφανῶς ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὴν κορυφὴν τῆς παραβολῆς.

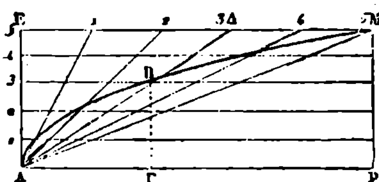
4 καὶ 5) *Τα ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων τριγώνων κεῖνται ἐπ' εὐθείας* R' *παραλλήλου πρὸς τὴν* R· *διέρχεται δὲ ἡ* R *διὰ τοῦ μέσου τῆς καθέτου ἀποστάσεως τοῦ* P (= E) *ἀπὸ τῆς* R.

Εἶναι ἑπομένως ἡ R' ἡ διευθετοῦσα τῆς παραβολῆς.

Τὰ θεωρήματα 3), 4) καὶ 5) ἀποδεικνύομεν πολὺ εὐκόλως θεωροῦντες τὴν εὐθεῖαν R ὡς τὴν *εὐθεῖαν Simson* τοῦ E ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τρίγωνον ΒΓΔ.

καὶ τὸ σημεῖον Β δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀνῆκον εἰς παραβολὴν τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις πρὸς τοὺς ἄξονας ΑΧ, ΑΥ, συμπίπτοντας πρὸς τὰς διευθύνσεις ΑΡ, ΑΙ, εἶναι $y^2 = cx$.

2144. Χρησιμοποιεῖται ἐπίσης καὶ ὁ ἀκόλουθος τρόπος χαράξεως:



Σχ. 1336.

Συνδέομεν δι' εὐθειῶν τὸ σημεῖον Α μετὰ τῶν σημείων 1, 2... (Σχ. 1336)· τὰ σημεῖα, καθ' ἃ αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνουν τὰς ἐκ τῶν ἀντιστοίχων σημείων διαιρέσεως ἐπὶ τῆς ΑΕ ἀγομένας παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα, ἀνήκουν εἰς παραβολήν.

Ἐπειδὴ θὰ ἔχωμεν πάλιν:

$$\frac{ΒΓ}{ΜΡ} = \frac{3}{5}, \quad \frac{ΒΓ^2}{ΜΡ^2} = \frac{9}{25}$$

καὶ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΕ

$$\frac{ΑΓ}{ΕΔ} = \frac{ΒΓ}{ΑΕ} = \frac{3}{5}.$$

Ἐπειδὴ $ΕΔ = \frac{3}{5} ΕΜ = \frac{3}{5} ΑΡ$, λαμβάνομεν

$$\frac{ΑΓ}{ΑΡ} = \frac{9}{25} = \frac{ΒΓ^2}{ΜΡ^2}$$

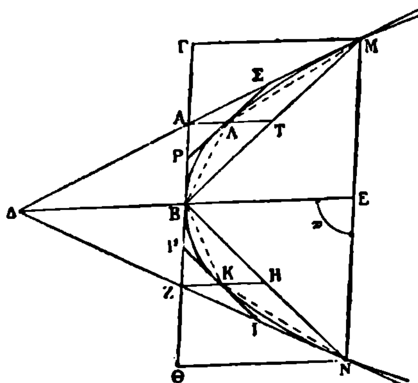
ἢ

$$ΒΓ^2 = ΑΓ . \frac{ΜΡ^2}{ΑΡ} = ΑΓ . c.$$

Γράφουν δηλ. πάλιν τὰ σημεῖα Β παραβολήν.

Θεώρημα 909

2145. Δεῖξαι δι' ἀπ' εὐθείας μεθόδου, ὅτι τὸ καμπυλόγραμμον τρίγωνον ΜΒΝΔΜ, τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ παραβολικοῦ τόξου καὶ τῶν εἰς τὰ ἄκρα του ἐφαπτομένων, εἶναι τὸ τρίτον τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν ΜΝ καὶ τοῦ τμήματος ΒΕ τῆς συζυγοῦς πρὸς τὴν χορδὴν ταύτην διαμέτρου· καὶ ὅτι τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΜΒΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὰ δύο τρίτα τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ.



Σχ. 1337.

Ὡς γνωστόν, ΜΕ = ΕΝ, ΒΕ = ΒΔ καὶ τὸ τρίγωνον ΜΔΝ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΜΓΘΝ.

Τὸ παραβολικὸν τμῆμα ΜΒΝ εἶναι ἡ διαφορὰ ἀπὸ τοῦ τριγώνου ΜΔΝ τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων ΔΜ, ΔΝ καὶ τῆς καμπύλης.

Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΒΖ, παράλληλον τῆς χορδῆς ΜΝ· Θὰ ἔχωμεν $AZ = \frac{MN}{2}$ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΖ εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ ΜΔΝ ἢ τὸ τέταρτον τοῦ παραλληλογράμμου.

Φέρομεν, ὁμοίως, τὰς ἐφαπτομένας ΙΙ', ΣΡ παραλλήλους πρὸς τὰς χορδὰς ΝΒ, ΒΜ. Θὰ ἔχωμεν

$$(IZI') = \frac{1}{4}(BZN) = \frac{1}{4}(\Delta BZ), \quad (A P \Sigma) = \frac{1}{4}(AB\Delta)$$

καὶ ἐπομένως

$$S_2 = (II'Z) + (A P \Sigma) = \frac{A\Delta Z}{4}.$$

Αἱ ἐφαπτόμεναι, αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς χορδὰς ΝΚ, ΚΒ, δίδουν δύο τρίγωνα τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ΙΖΙ'.

Αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι, αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς χορδὰς ΒΛ, ΛΜ, δίδουν δύο ἄλλα μὲ ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ΑΡΣ.

Τὸ ἄθροισμα ἐπομένως τῶν τεσσάρων τούτων νέων τριγώνων εἶναι

$$\frac{(IZI') + (PA\Sigma)}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(A\Delta Z)}{4} = \frac{(A\Delta Z)}{16}.$$

Ὥστε, ἂν Ρ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου:

$$S_1 = (A\Delta Z) = \frac{P}{4},$$

$$S_2 = (IZI') + (AP\Sigma) = \frac{(A\Delta Z)}{4} = \frac{P}{16} = \frac{P}{4^2}.$$

$$S_3 = \frac{P}{4^3} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ἐργαζόμενοι συνεχῶς καθ' ὅμοιον τρόπον (δι' ἀγωγῆς ἐφαπτομένων παραλλήλων πρὸς τὰς ἐπὶ μέρους χορδὰς κλπ.), βλέπομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τῆς περιεχομένης μεταξὺ τῆς καμπύλης καὶ τῶν δύο ἐφαπτομένων ΔΜ, ΔΝ, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς φθινούσης προόδου, μὲ πρῶτον ὅρον $\frac{P}{4}$ καὶ λόγον $\frac{1}{4} < 1$. Ἐπομένως

$$S = \frac{\frac{P}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{P}{3}$$

ἢ

$$\text{Παραβ. τμῆμα } (MBN) = \frac{2}{3} \cdot P.$$

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις εἶναι κατ' ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τοῦ Ἀρχιμήδους *δι' ἐξαντλήσεως* (§ 1902). Ὁ Ἀρχιμήδης ἐθεώρησε *ἐσωτερικὰ* τρίγωνα, ἀντὶ *ἐξωτερικῶν*, διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραβολικοῦ χωρίου.

Ἡ μέθοδος αὕτη ὠνομάσθη δι' *ἐξαντλήσεως*, ἐκ τοῦ λόγου ὅτι ἐξαντλοῦμεν, κατά τινα τρόπον, τὸν μεταξὺ τῆς καμπύλης καὶ τῶν ἐφαπτομένων ἐπίπεδον χῶρον.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑΙ

Τόπος 910

2146. **Ἐκ τῶν διαφόρων σημείων περιφερείας φέρομεν καθέτους ἐπὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου της. Ποῖος ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν καθέτων τούτων;**

Ἔστωσαν ΑΑ′ ἡ περιφέρεια καὶ xy ἡ εὐθεῖα. Ἂν 2λ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας καὶ Ν τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας, θὰ ἔχωμεν

$$\mu\Gamma = \frac{1}{2}N\Gamma = \frac{1}{2}(2\lambda + PN) = \lambda + \frac{PN}{2}.$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς τεταγμένας ΡΝ εἰς δύο ἴσα

Σχ. 133Η.

μέρη, ὁ τόπος τῶν μέσων Μ εἶναι ἔλλειψις μὲ μέγαν ἄξονα ΑΑ′ = 2ρ καὶ μικρὸν ΒΒ′ = ρ [134]. Ἐπειδὴ δὲ μεταβαίνομεν ἐκ τῶν σημείων Μ ἢ Μ′ εἰς τὰ σημεῖα τοῦ τόπου μ ἢ μ′ δι' ἀφαιρέσεως ἀπὸ τῶν μηκῶν ΓΜ ἢ ΓΜ′ τοῦ σταθεροῦ κήκους λ, εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων μ, μ′ ... εἶναι ἔλλειψις ἴση πρὸς τὴν προηγουμένην καὶ προκύπτουσα ἐξ αὐτῆς διὰ τῆς μεταφορᾶς $\overrightarrow{A'\alpha'}$ ($A'\alpha' = \lambda$).

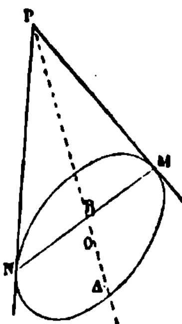
Τόπος 911

2147. Τόποι τοῦ κέντρου τῶν ἐλλείψεων, 1) τῶν ἐφαπτομένων δύο εὐθειῶν εἰς δύο δοθέντα αὐτῶν σημεῖα καὶ 2) τοῦ κέντρου καὶ τῆς

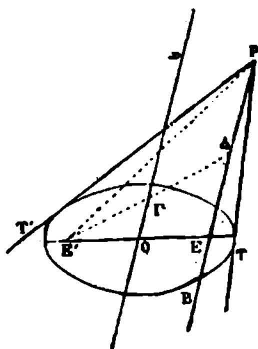
133. Σημ. μετ. Ἐπειδὴ ἡ καμπύλη ΑΒΜΑ′Μ′Β′Α εἶναι προφανῶς προβολὴ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας ἄλλης ἴσης πρὸς αὐτὴν καὶ διὰ τὴν ὁποίαν ἡ γωνία τοῦ ἐπιπέδου της μετὰ τοῦ τῆς ἀρχικῆς εἶναι $\omega = \text{τοξ. συν}\,\frac{1}{2} = 60^\circ$.

ἑτέρας ἑστίας τῶν ἐλλείψεων, τῶν ἐφαπτομένων δύο εὐθειῶν καὶ τῶν ὁποίων μία τῶν ἑστιῶν Ε' εἶναι δοθὲν σημεῖον.

1) Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 2081, ὁ τόπος τῶν κέντρων Ο τῶν



Σχ. 1339.



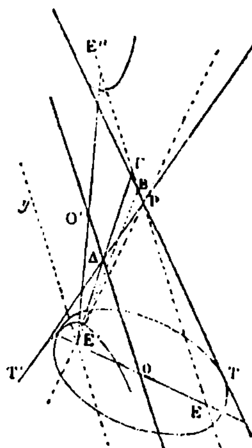
Σχ. 1340.

ἐλλείψεων εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΡ διὰ τοῦ μέσου Β τῆς κοινῆς χορδῆς ἐπαφῶν ΜΝ (Σχ. 1339).

2) Ὁ τόπος τῆς ἑστίας Ε εἶναι εὐθεῖα ΡΒ σχηματίζουσα μετὰ τῆς ΡΤ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Ε'ΡΤ' (*θεώρημα τοῦ Poncelet*). Ἑπομένως, ὁ τόπος τοῦ κέντρου Ο εἶναι παράλληλος Οx πρὸς τὴν πρώτην εὐθεῖαν καὶ διερχομένη διὰ τοῦ μέσου τῆς ΕΕ' ἢ τοῦ μέσου τῆς Ε'Ρ.

2147 α. Παρατήρησις. Ἐφ' ὅσον ἡ ἑστία Ε ἀνέρχεται τὴν εὐθεῖαν (ε) ≡ ΒΡ ἐπὶ τοσοῦτον καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἔλλειψις ἐπιμηκύνεται. Διὰ Ε ≡ Ρ ἡ ἔλλειψις ἀπεπλατύνθη εἰς τὸν μέγαν ἄξονα αὐτῆς Ε'Ρ.

Διὰ θέσεις τοῦ Ε πέραν τοῦ Ρ, ὡς λ. χ. διὰ Ε ≡ Β (Σχ. 1341), ἡ ἔλλειψις ἀποβαίνει ὑπερβολή. Ἔστω Δ τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα Οx (≡ ΟΟ') τέμνει τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην ΡΤ' τῶν καμπύλων καὶ Γ τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα Ε'Δ τέμνει τὴν εὐθεῖαν (ε) — τόπον τῶν ἑστιῶν Ε.



Σχ. 1341.

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ εἶναι τὸ κέντρον τῆς ὑπερβολῆς μὲ ἑστίας τὸ Ε' καὶ Γ, κεῖται δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς ΡΤ', ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς ὑπερβολῆς ταύτης. Ὁμοίως, τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ἑτέρας ἐφαπτομένης ΡΤ καὶ τῆς Οx εἶναι τὸ κέν-

τρον ἐκείνης ἐκ τῶν θεωρουμένων ὑπερβολῶν, ἥτις ἔχει τὴν εὐθεῖαν PT ὡς ἀσύμπτωτον.

Ἡ εὐθεῖα, τέλος, Ε'γ, παράλληλος πρὸς ἀμφοτέρας τὰς Οχ καὶ (ε) εὐθείας, τέμνει τὰς εὐθείας ταύτας εἰς τὸ κοινὸν ἐπ' ἄπειρον σημεῖον αὐτῶν. Ἡ ἀντίστοιχος καμπύλη ἑπομένως ἀποβαίνει παραβολή, ἀφοῦ τὸ κέντρον καὶ ἡ μία τῶν ἑστιῶν της ἀπεμακρύνθησαν εἰς ἄπειρον (G., n° 690).

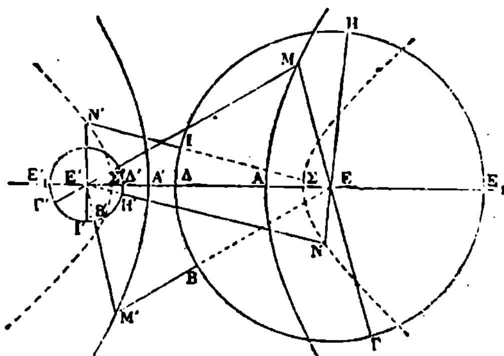
Τόπος 912

2148. **Τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων δύο περιφερειῶν (Ε, R), (Ε', ρ), ἢ μιᾶς περιφερείας καὶ μιᾶς εὐθείας.**

1) *Δύο περιφερειῶν*. Ἔστω σημεῖον Μ' τοιοῦτον, ὥστε Μ'Β = Μ'Β'. Ἐπειδὴ

$$M'E - M'E' = BE - B'E' = R - \rho,$$

ὁ τόπος τῶν σημείων Μ' εἶναι ἡ ὑπερβολὴ μὲ ἑστίας Ε, Ε' καὶ



Σχ. 1342.

μέγαν ἄξονα $2\alpha = R - \rho$. Τὸ σημεῖον Α', μέσον τῆς ΔΔ', εἶναι ἡ μία τῶν κορυφῶν τῆς καμπύλης, ἀφοῦ $A'E - A'E' = R - \rho$, καὶ ὁμοίως τὸ μέσον Α τῆς E_1E_1' εἶναι ἡ ἑτέρα κορυφὴ αὐτῆς· ἐπειδὴ $AE' - AE = (AE_1' - \rho) - (AE_1 - R) = R - \rho$.

Καὶ τὰ σημεῖα Μ, διὰ ΜΓ = ΜΓ', ἀνήκουν καὶ αὐτὰ εἰς τὴν καμπύλην· ἐπειδὴ

$$ME' - ME = (M\Gamma' - \rho) - (M\Gamma - R) = R - \rho.$$

Ἡ ὑπερβολὴ αὕτη εἶναι ὁ τόπος (Τ) τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, τῶν ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς τῶν περιφερειῶν (Ε) καὶ (Ε') (*ἀριστερὸς κλάδος* Α'), ἢ τῶν ἐφαπτομένων ἐσωτερικῶς ἀμφοτέρων καὶ περιβαλουσῶν αὐτὰς (*δεξιὸς κλάδος* Α).

Ὁ πλήρης τόπος (Τ) περιλαμβάνει καὶ μίαν δευτέραν ὑπερβολήν, τὸν τόπον τῶν κέντρων Ν, Ν' τῶν περιφερειῶν, τῶν ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς τῆς μιᾶς τῶν περιφερειῶν (Ε), (Ε') καὶ ἐσωτερικῶς τῆς ἄλλης (περιβαλλουσῶν αὐτήν). Πράγματι,

$$NH = NH', \quad \text{ἄρα } E'N - NE = (NH + \rho) - (NH' - R) = R + \rho$$

καὶ $NI = NI'$, ἄρα $EN' - E'N' = (N'I + R) - (NI' - \rho) = R + \rho$.

Τὰ σημεῖα Σ, Σ', μέσα τῶν $E_1\Delta'$ καὶ $E_1'\Delta$ ἀντιστοίχως, εἶναι αἱ κορυφαὶ τῆς δευτέρας ταύτης (ἐστιγμένης) ὑπερβολῆς. Ἐπειδὴ

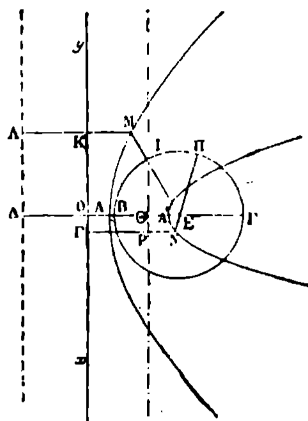
$$E'\Sigma - E\Sigma = (\Delta'\Sigma + \rho) - (\Sigma E_1 - R) = R + \rho$$

καὶ $$E\Sigma' - E'\Sigma' = (\Sigma'\Delta + R) - (\Sigma E_1' - \rho) = R + \rho. \quad (1)$$

Ἐὰν ἡ μία τῶν περιφερειῶν (E), (E') εἶναι ἐσωτερικὴ τῆς ἄλλης, ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἐλλείψεων.

2) *Περιφερείας καὶ εὐθείας*. Διὰ περιφέρειαν (E, ρ) καὶ εὐθεῖαν xy, ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἐκ δύο παραβολῶν.

Ἔστω πράγματι ΔΛ παράλληλος πρὸς τὴν xy καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς $O\Delta = \rho$. Ἐπειδὴ $MI = MK$, θὰ εἶναι καὶ $ME = M\Lambda$ καὶ τὰ σημεῖα M θὰ γράφουν παραβολὴν μὲ ἑστίαν E, διευθετοῦσαν ΔΛ καὶ κορυφὴν τὸ μέσον A τῆς ΔΕ.



Σχ. 1343.

Ἡ δευτέρα παραβολὴ ἔχει ἑστίαν τὴν ἰδίαν καὶ διευθετοῦσαν τὴν συμμετρικὴν τῆς ΔΛ πρὸς τὴν xy εὐθεῖαν ΘΡ (ἐστιγμένην). Ἐπειδὴ διὰ τὰ σημεῖα, δι' ἃ $NH = N\Gamma$ ἢ $NE + \rho = NP + \rho$, θὰ εἶναι καὶ $NE = NP$.

Ἡ κορυφὴ ταύτης εἶναι τὸ μέσον A' τῆς EΘ.

Ἡ διερεύνησις τῶν διαφόρων εἰδικῶν περιπτώσεων εἶναι ἐνδιαφέρουσα καὶ ἀπηλλαγμένη δυσκολιῶν.

Τόπος 913

2149. **Τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν διερχομένων διὰ σταθεροῦ σημείου καὶ ἐφαπτομένων δοθείσης περιφερείας ἢ δοθείσης εὐθείας.**

Εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ προηγουμένου προβλήματος· μία τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν εἶναι περιωρισμένη εἰς τὸ κέντρον της. Ἀναλόγως δὲ τῆς θέσεως τοῦ σημείου, ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς περιφερείας, ὁ τόπος εἶναι ἔλλειψις ἢ ὑπερβολή. (G., n^os 615 καὶ 649).

Τόπος 914

2150. **Διὰ τῶν σημείων, εἰς ἃ μεταβλητὴ ἐφαπτομένη παραβολῆς τέμνει δύο ἄλλας σταθερὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς, φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἐφαπτομένας ταύτας. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν παραλλήλων τούτων;**

Ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ χορδὴ ΑΓ τῶν ἐπαφῶν.

Πράγματι, ἔστω Η τυχὸν σημεῖον τῆς χορδῆς ταύτης καὶ ΗΔ, ΗΕ, παράλληλοι πρὸς τὰς δοθείσας ἐφαπτομένας. Θὰ ἔχωμεν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΕΗ, ΓΒΑ:

$$\frac{ΓΕ}{ΕΒ}=\frac{ΓΗ}{ΗΑ}$$

καὶ ἐκ τῶν ἐπίσης ὁμοίων ΑΔΗ, ΑΒΓ καὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΒΔΗΕ.

$$\frac{ΓΗ}{ΗΑ}=\frac{ΔΒ}{ΑΔ}.$$

Ἑπομένως

$$\frac{ΓΕ}{ΕΒ}=\frac{ΔΒ}{ΔΑ}$$

καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΔ θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς (G., nos 710 καὶ 712).

Σχ. 1344.

Τόπος 915

2151. Τόπος τῶν ἑστιῶν καὶ κορυφῶν τῶν παραβολῶν τῶν ἐχουσῶν δοθεῖσαν διευθετοῦσαν καὶ διερχομένων διὰ σταθεροῦ σημείου ἢ ἐφαπτομένων δοθείσης εὐθείας.

1) Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Μ θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῆς ἑστίας Ζ καὶ τῆς διευθετούσης ΛΔ, ὁ τόπος τοῦ Ζ θὰ εἶναι ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον Μ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν ΜΛ τοῦ Μ ἀπὸ τῆς διευθετούσης.

Ἀφ' ἑτέρου ἡ κορυφὴ Α τῆς ἀντιστοίχου παραβολῆς εἶναι τὸ μέσον τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως ΖΔ ἀπὸ τῆς διευθετούσης. Ὁ τόπος ἐπομένως τοῦ σημείου Α εἶναι ἔλλειψις (§ 2146), μὲ μέγαν ἄξονα $αα' = 2 . ΛΜ$ καὶ μικρὸν ΜΛ.

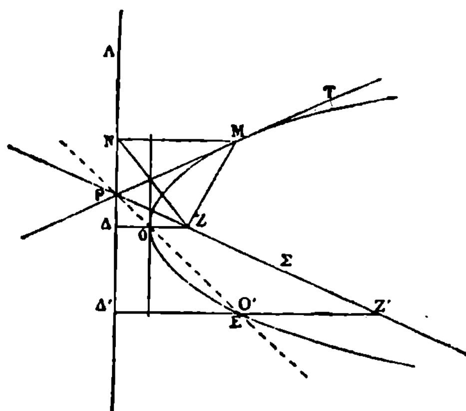
Σχ. 1345.

2) Ἔστωσαν ΤΡ ἡ σταθερὰ ἐφαπτομένη καὶ ΔΛ ἡ διευθετοῦσα (σχ. 1346). Ἐὰν Ζ ἡ ἑστία τῆς παραβολῆς, τὸ συμμετρικὸν ταύτης σημεῖον Ν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΤΡ κεῖται ἐπὶ τῆς διευθετούσης.

Ἑπομένως γων. $ΖΡΜ = ΝΡΜ$ καὶ ὁ τόπος τοῦ σημείου Ζ εἶναι εὐθεῖα ΡΣ, συμμετρικὴ τῆς διευθετούσης πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΡΤ.

3) Διὰ τὸν τόπον τῶν κορυφῶν Ο τῶν παραβολῶν τούτων, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι μέσα τῶν καθέτων ἀποστάσεων ΖΔ, Ζ'Δ' ἀπὸ τῆς διευθετούσης. Κεῖνται ἐπομένως ἐπὶ

εὐθείας ΡΟ, διερχομένης διὰ τοῦ Ρ καὶ τοῦ τυχόντος Ο ἐξ αὐτῶν.



Σχ. 1346.

Τόπος 916

2152. Τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δοθέντος σημείου καὶ ἀπὸ δοθείσης εὐθείας εἶναι δεδομένον μῆκος λ.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 76).

Τόπος 917

2153. Τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο καθέτων ἐπ' ἀλλήλας εὐθειῶν εἶναι δοθὲν k^2.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 78).

Ἐὰν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι δὲν εἶναι ὀρθογώνιοι, ὁ τόπος εἶναι ὑπερβολὴ μὲ ἀσυμπτώτους τὰς εὐθείας ταύτας.

Τόπος 918

2154. Εἰς τραπέζιον, ἡ μεγαλειτέρα βάσις εἶναι σταθερά, θέσει καὶ μεγέθει, ἡ μικροτέρα ὡρισμένου μήκους καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν σταθερόν. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου Ο τῶν διαγωνίων αὐτοῦ;

Ἔστωσαν $\quad ΑΔ = α, \quad ΒΓ = β, \quad ΑΒ + ΔΓ = λ.$

Διὰ τοῦ σημείου Ο φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς· θὰ ἔχωμεν:

$$ΑΕ = ΟΘ = ΟΗ = ΔΖ$$

καὶ

$$ΟΕ = ΑΘ, \quad ΟΖ = ΔΗ.$$

1) $$ΗΘ = \frac{2αβ}{α + β} \qquad (\S\ 1199)$$

καὶ $$ΑΕ = ΔΖ = \frac{αβ}{α+β}.$$

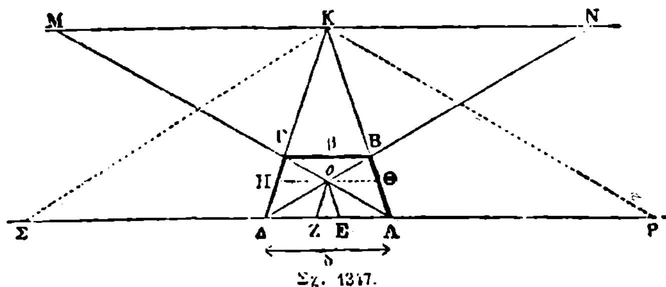
Εἶναι δηλ. σταθερὰ σημεῖα τὰ Ε καὶ Ζ διὰ πᾶσαν θέσιν τοῦ Ο.
Ἀφ' ἑτέρου:

$$\frac{ΘΑ}{ΘΒ} = \frac{α}{β} \quad ἢ \quad \frac{ΘΑ}{ΑΒ} = \frac{α}{α+β} \quad καὶ \quad ΘΑ = ΑΒ.\frac{α}{α+β}$$

καὶ ὁμοίως $$ΔΗ = ΔΓ.\frac{α}{α+β}.$$

Ἐπομένως:

$$ΟΖ + ΟΕ = (ΑΒ + ΔΓ)\frac{α}{α+β} = \frac{αλ}{α+β} = σταθ.$$



Σχ. 1347.

καὶ ὁ τόπος τοῦ σημείου Ο εἶναι ἔλλειψις, μὲ ἑστίας τὰ σημεῖα Ε, Ζ καὶ μέγαν ἄξονα ἴσον πρὸς $\frac{αλ}{α+β}$.

Τόπος 918—I

2155. Τόπος τοῦ σημείου Κ, τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ προηγουμένου τραπεζίου, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων αὐτοῦ εἶναι σταθερὸν λ. Σχ. 1347).

$$ΑΡ = ΚΜ = ΚΝ = ΔΣ = \frac{αβ}{α-β} \qquad (§\ 1199)$$

καὶ τὰ σημεῖα Ρ καὶ Σ εἶναι τὰ σταθερὰ ἐνταῦθα σημεῖα.
Ἐπίσης:

$$\frac{ΑΜ}{ΑΓ} = \frac{ΚΜ}{ΒΓ} = \frac{α}{α-β}, \quad ΑΜ = ΑΓ.\frac{α}{α-β}.$$

ὁμοίως $$ΔΝ = ΣΚ = ΒΔ.\frac{α}{α-β}$$

καὶ ἐπομένως:

$$(ΚΡ + ΚΣ) = (ΑΓ + ΒΔ)\frac{α}{α-β} = \frac{αλ}{α-β} = σταθ.$$

κλπ.

Παρατήρησις. Τὰ προηγούμενα δύο ζητήματα συνοψίζονται εἰς τὸ ἑπόμενον θεώρημα κατὰ ἁπλοῦν καὶ γενικὸν τρόπον:

Θεώρημα 918—II

2156. Ἔστω ΑΔ σταθερόν, θέσει καὶ μεγέθει, εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ ΒΓ ἄλλο, σταθεροῦ μήκους, παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον καὶ τοιοῦτον ὥστε εἰς πᾶσαν θέσιν αὐτοῦ νὰ εἶναι

$$\text{ΑΒ} + \text{ΔΓ} = \lambda, \text{ σταθερὸν μῆκος.}$$

Θεωροῦμεν τώρα τρίτον τμῆμα ΜΕΘ παράλληλον πρὸς τὰ δύο πρῶτα, σταθεροῦ ἐπίσης μήκους καὶ ἀγόμενον διὰ τῶν σημείων Ε καὶ Θ τῶν ΑΒ καὶ ΔΓ, διὰ τὰ ὁποῖα $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΒ}} = \frac{\text{ΔΘ}}{\text{ΘΓ}} = \frac{\mu}{\nu}$, σταθερὸς λόγος. Δείξατε ὅτι τὸ σημεῖον Μ τοῦ τρίτου τούτου τμήματος γράφει ἔλλειψιν, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον Ο καὶ αἱ ἑστίαι Ε, Ε′ ὁρίζονται δι' ἀγωγῆς ἐκ τοῦ Μ εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὴν διάμεσον ΝΡ καὶ πρὸς τὰς πλευρὰς ΝΑ, ΝΔ τοῦ (μεταβλητοῦ ἑκάστοτε) τριγώνου ΔΝΑ τοῦ σχήματος.

Σχ. 1348.

Πράγματι, πᾶν σημεῖον τοῦ κινητοῦ συστήματος γράφει ἔλλειψιν, πᾶσαι δὲ αἱ ἐλλείψεις αὗται εἶναι ὅμοιαι.

Διὰ τὸ σημεῖον Γ, ἐπὶ παραδείγματι, ἔχομεν (ΒΓ=β, ΔΓ=α):

$$\text{ΔΓ} + \text{ΓΡ}' = \text{ΔΓ} + \text{ΑΒ} = \lambda \quad \text{καὶ} \quad \text{ΔΡ}' = \text{ΔΑ} + \text{ΑΡ}' = \alpha + \beta.$$

Εἶναι ἑπομένως τὰ Δ καὶ Σ′ αἱ ἑστίαι καὶ λ ὁ μέγας ἄξων τῆς ἐλλείψεως, ἣν γράφει τὸ Γ.

Διὰ τὸ Ν,

$$\frac{\text{ΑΝ}}{\text{ΝΒ}} = \frac{\text{ΔΝ}}{\text{ΝΓ}} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\text{ΑΝ}+\text{ΔΝ}}{\text{ΝΒ}+\text{ΝΓ}} = \frac{\text{ΑΝ}+\text{ΔΝ}}{\lambda-(\text{ΑΝ}+\text{ΔΝ})} = \frac{\alpha}{\beta}$$

ἢ

$$\text{ΑΝ} + \text{ΔΝ} = \frac{\alpha\lambda}{\alpha+\beta} = \text{σταθ.}$$

Τὰ σημεῖα Α καὶ Δ εἶναι αἱ ἑστίαι τοῦ τόπου τοῦ Ν.

Διὰ τὰ σημεῖα Η, φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους:

$$\frac{\text{ΡΗ}}{\text{ΝΡ}} = \frac{\text{ΙΗ}}{\text{ΑΝ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΝ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}} \cdot \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΝ}} = \frac{\mu}{\mu+\nu} \cdot \frac{\beta+\alpha}{\alpha} = k = \text{σταθ.}$$

καὶ τὸ Η γράφει ὁμοιόθετον ἔλλειψιν τῆς ὑπὸ τοῦ Ν γραφομένης (κέντρον Ρ, λόγος k). Ταύτης ἑστίαι εἶναι προφανῶς τὰ σημεῖα Ι καὶ Κ.

Τὸ σημεῖον Μ γράφει τὴν διὰ τῆς μεταφορᾶς $\overrightarrow{\text{ΗΜ}}$ τῆς ἐλλείψεως — τόπου τοῦ Η (ἀφοῦ ΜΗ = σταθερὸν μῆκος) παραγομένην ἔλλειψιν. Ἐκ τῆς αὐτῆς μεταφορᾶς τῶν σημείων Ι καὶ Κ, προκύπτουν αἱ ἑστίαι Ζ καὶ Ζ′ τῆς ἐλλείψεως, ἣν γράφει τὸ Μ. Τὸ

ἄθροισμα $MZ + MZ' =$ μῆκος μεγάλου ἄξονος ταύτης, λαμβάνεται ἐκ τῶν σχέσεων

$$MZ = EA, \quad MZ' = \Theta\Delta, \quad MZ + MZ' = EA + \Delta\Theta$$

καὶ

$$\frac{EA}{AB} = \frac{\Delta\Theta}{\Delta\Gamma} = \frac{EA + \Delta\Theta}{\lambda} = \frac{\mu}{\mu + \nu}.$$

Ἐπομένως:

$$MZ + MZ' = \frac{\lambda\mu}{\mu + \nu}.$$

Τόπος 918—III

2156 α. Τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων τραπεζίου περιγεγραμμένου εἰς ἡμιπεριφέρειαν καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἀπέναντι τῆς διαμέτρου πλευρὰ μεταβάλλεται.

1) Ἔστω Κ τὸ σημεῖον τοῦτο· θὰ ἔχωμεν

$$\frac{AK}{BE} = \frac{\Delta K}{\Delta B} = \frac{\Gamma P}{\Gamma B}, \quad AK = \frac{BE \cdot \Gamma P}{\Gamma B}$$

$$\frac{PK}{BE} = \frac{\Gamma P}{\Gamma B}, \quad PK = \frac{BE \cdot \Gamma P}{\Gamma B} = AK.$$

Σχ. 1349.

Εἶναι δηλ. τὸ Κ μέσον τῆς ΑΡ (§ 1246 α) καὶ ὁ τόπος του ἔλλειψις, ἔχουσα τὴν ΒΓ διὰ μέγαν ἄξονα καὶ διὰ μικρὸν τὴν $OH = \frac{O\Lambda}{2}$ (§ 2146).

2) Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ΒΔ, ΓΕ καὶ ΑΡ κεῖνται ἐπὶ τῶν συμμετροδιαμέσων αὐτοῦ· κατ' ἀνάγκην ἐπομένως τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Κ (τοῦ Lemoine).

Τόπος 918—IV

2156 β. (Ἐκ δοθέντος σημείου Μ ἐλλείψεως κέντρου Ο φέρομεν καθέτους ἐπὶ τοὺς ἄξονας αὐτῆς. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ἥτις συνδέει τὰ σημεῖα Ρ, Π τῶν καθέτων τούτων διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Ν

καὶ ὅτι ὁ τόπος τοῦ σημείου Ν, ὅταν τὸ Μ διαγράφῃ τὴν καμπύλην, εἶναι ἔλλειψις μὲ κέντρον Ο) [134].

Τόπος 919

2157. Εἱς τυχὸν σημεῖον Μ ἐλλείψεως φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς ΜΤ, τέμνουσαν τὸν μικρὸν ἄξονα εἰς Τ. Ποῖος ὁ τόπος τῆς προβολῆς τοῦ σημείου Τ ἐπὶ τὴν ἑστιακὴν ἀκτῖνα ΖΜ; (Mannheim, *N. A.*, 1862, σ. 126, nº 614. Λύσεις εἰς σ. 172 καὶ 316).

Σχ. 1350.

Ἐκ τῆς ἑτέρας ἑστίας Ζ' φέρομεν κάθετον Ζ'Δ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην καὶ προεκτείνομεν αὐτὴν μέχρι τῆς συναντήσεώς της Ε μετὰ τῆς περιφερείας (Ζ, 2α). Γνωρίζομεν ὅτι θὰ εἶναι ΔΕ=ΔΖ' καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΕ = 2α θὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Μ.

Ἀλλ' ἐπειδὴ Ζ'Τ = ΖΤ = ΤΕ, τὸ τρίγωνον ΖΤΕ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἡ κάθετος ΤΝ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς βάσεως ΖΕ. Ἐπομένως ΖΝ = α καὶ ὁ τόπος τοῦ Ν εἶναι ἡ περιφέρεια (Ζ, α).

Παρατήρησις. Ἐὰν προβάλωμεν τὸ σημεῖον Τ *ἐπὶ τῆς ἄλλης ἑστιακῆς ἀκτῖνος* Ζ'Μ, *ἡ συνδέουσα τὴν προβολὴν ταύτην* Λ *μετὰ τοῦ σημείου* Ν *εὐθεῖα διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς καμπύλης* [135].

Σημείωσις. Εἰς τὸν αὐτὸν τόμον καὶ εἰς τὰς σελ. 172, 174, 316, εὑρίσκονται διάφοροι λύσεις, γεωμετρικαὶ ἢ ἀναλυτικαί, τῆς προτάσεως.

Θεώρημα 919—I

2158. Εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ παραβολῆς φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς, τέμνουσαν τὴν εἰς τὴν κορυφὴν Α ἐφαπτομένην εἰς Τ. Ὁ τόπος τῆς προβολῆς τοῦ σημείου Τ ἐπὶ τὴν ἑστιακὴν ἀκτῖνα ΕΜ εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον Ε καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ἀπόστασιν ΕΑ [136].

---

134. Σημ. μετ. Εἰς μετάφρασιν κατὰ λέξιν. Πρόκειται περὶ προτάσεως ἐσφαλμένης καὶ ἀσαφοῦς διατυπώσεως· Δὲν συνοδεύεται ἄλλωστε ὑπὸ ἀποδείξεως — ἐξ ἧς θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἐξαχθοῦν συμπεράσματα περὶ τῆς ὀρθῆς ἐκφωνήσεως.

135. Σημ. μετ. Ἐπειδὴ Ζ'Λ = α ἐπίσης καί, ἀφοῦ Ζ'Μ + ΖΜ = 2α· ΛΜ + ΜΖ = α. Ἀλλ' εἶναι ΖΜ + ΜΝ = α· ἄρα : ΛΜ = ΜΝ, τὸ τρίγωνον ΛΜΝ ἰσοσκελές, ΛΝ παράλληλος τῆς ΕΖ' καὶ ἡ διὰ τοῦ μέσου Ν τῆς ΖΕ παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΕΖ' τοῦ τριγώνου Ζ'ΖΕ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ο τῆς τρίτης αὐτοῦ πλευρᾶς ΖΖ'.

136. Σημ. μετ. Ἡ ἀπόδειξις ἁπλῆ, ἀφοῦ τὸ μεταξὺ τοῦ σημείου Μ καὶ τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφήν.

Τόπος 920

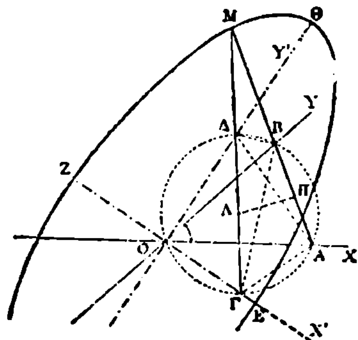
2159. Αἱ κορυφαὶ Α καὶ Β ἑνὸς ἀμεταβλήτου τριγώνου ὀλισθαίνουν ἐπὶ δύο σταθερῶν εὐθειῶν. Ποῖος ὁ τόπος ὁ γραφόμενος ὑπὸ τῆς τρίτης κορυφῆς;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 144).

Τὸ ζήτημα τοῦτο δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Θεώρημα τοῦ Schooten 920—I

2160. Ἐὰν ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, μήκους καὶ θέσεως σταθερῶν ἐπὶ ἐπιπέδου Μ, κινῆται εἰς τρόπον, ὥστε τὰ ἄκρα αὐτοῦ Α καὶ Β νὰ γράφουν ἀντιστοίχως δύο σταθερὰς καὶ τεμνομένας εὐθείας, κειμένας ἐπὶ ἐπιπέδου Π συμπίπτοντος πρὸς τὸ Μ, τότε πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Μ γράφει ἔλλειψιν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π.



Σχ. 1351.

Πόρισμα. Τὸ τυχὸν σημεῖον Μ εὐθείας ΑΒ, τῆς ὁποίας δύο ὡρισμένα σημεῖα Α καὶ Β γράφουν δύο τεμνομένας εὐθείας ΟΧ, ΟΥ, γράφει ἔλλειψιν ἔχουσαν κέντρον τὸ σημεῖον Ο.

Διὰ τὴν σπουδαιότητα τῆς προτάσεως ταύτης, παραθέτομεν κατωτέρω μίαν ἐπ' εὐθείας ἀπόδειξιν αὐτῆς.

Θεωρήσωμεν τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΟΒ καὶ τὴν διαμετρικὴν εὐθεῖαν ΜΔΛΓ. Φέρομεν καὶ τὰς εὐθείας ΟΓ, ΟΔ, ΑΔ καὶ ΒΓ.

Ἡ περιφέρεια (ΟΑΒ) *διατηρεῖ σταθερὰν ἀκτῖνα,* ἐπειδὴ εἶναι περιγεγραμμένη εἰς τρίγωνον ΑΟΒ σταθερᾶς βάσεως ΑΒ καὶ σταθερᾶς ἀπέναντι αὐτῆς γωνίας $= \widehat{ΟΧ, ΟΥ}$.

Τὰ τρίγωνα ΑΓΜ, ΒΔΜ *μένουν ἐπίσης ἴσα πρὸς ἑαυτά·* ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΗΜ καὶ τὸ ἀπόστημα ΛΗ τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς χορδῆς ΑΒ παραμένουν, προφανῶς, σταθερά, θέσει καὶ μεγέθει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Μ.

Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ γράφουν εὐθείας ΟΧ', ΟΥ' *διερχομένας διὰ τοῦ* Ο *καὶ καθέτους ἐπ' ἀλλήλας.* Ἐπειδή, ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων τετραπλεύρων:

$$Τ\widehat{Ο}Χ = Γ\widehat{Β}Α = σταθ., \quad Δ\widehat{Ο}Υ = Δ\widehat{Γ}Β = σταθ.$$

καὶ $Γ\widehat{Ο}Δ = 90^\circ$, ὡς βαίνουσα ἐπὶ ἡμιπεριφερείας.

Τὸ σημεῖον Μ, *ἄρα, γράφει ἔλλειψιν, ἔχουσαν τὸ σημεῖον* Ο *διὰ κέντρον καὶ ἡμιάξονας τὰ μήκη* ΜΓ, ΜΔ. Διότι τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, τῆς ὁποίας δύο σταθερὰ σημεῖα Γ καὶ Δ (ΓΔ = διάμετρος τῆς περιφερείας (Λ)) γράφουν δύο εὐθείας ΟΧ', ΟΥ' ὀρθογωνίους (G., nº 643).

2160 α. **Σημειώσεις.** 1) Ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἀξόνων ἔγινεν ὑπὸ τοῦ Mannheim. (*N. A.*, 1850, σ. 419, n° 6).

2) Ὁ Ch. Dupin ἐπεξέτεινε εἰς τὸν χῶρον τὸ *θεώρημα τοῦ* Schooten :

Θεώρημα. Ἐὰν μία εὐθεῖα κινῆται εἰς τὸν χῶρον εἰς τρόπον, ὥστε τρία σταθερὰ σημεῖα αὐτῆς νὰ γράφουν τρία δοθέντα ἐπίπεδα, πᾶν ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας γράφει ἐλλειψοειδὲς μὲ κέντρον τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν τριῶν ἐπιπέδων.

Πόρισμα τούτου εἶναι ἡ ἀκόλουθος πρότασις, τὴν ὁποίαν ὁ Mannheim ἀπέδειξεν ἀπ' εὐθείας :

Θεώρημα. Ἐὰν τέσσαρα σταθερὰ σημεῖα εὐθείας γράφουν τέσσαρα ἐπίπεδα, πᾶν ἄλλο σημεῖον αὐτῆς γράφει ἔλλειψιν. (*N. A.*, 1889, σ. 308 καὶ 318).

Θεώρημα τοῦ Steiner 920—II

2161. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως, ἣν γράφει δοθὲν σημεῖον Μ εὐθείας τῆς ὁποίας δύο σταθερὰ σημεῖα Α, Β γράφουν δύο τεμνομένας εὐθείας ΟΧ, ΟΥ, εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως εἶναι γινόμενον τοῦ π καὶ τῶν ἡμιαξόνων αὐτῆς α καὶ β, διὰ δὲ τὴν ἔλλειψιν ἥν γράφει τὸ σημεῖον Μ.

$$\alpha = M\Gamma, \quad \beta = M\Delta$$

ὡς εἴδομεν. Ἄρα

$$E = \pi\alpha\beta = \pi \,.\, M\Gamma \,.\, M\Delta,$$

ἀριθμὸς ἀνεξάρτητος τῆς γωνίας τῶν ΟΧ καὶ ΟΥ εὐθειῶν.

Τόπος 920—III

2161 α. Ποῖος ὁ τόπος τοῦ κέντρου Κ τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων τοῦ τριγώνου ΟΑΒ τῶν δύο προηγουμένων ἀσκήσεων; (Weill).

Τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ *μέσον* ἢ *συμπληρωματικὸν* τρίγωνον Α'Ο'Β' τοῦ ΑΟΒ. Τούτου, ἡ πλευρὰ $A'B' = \frac{AB}{2}$ εἶναι σταθεροῦ μήκους, ἡ γωνία Ο' εἶναι ἴση πρὸς τὴν σταθερὰν ΧΟΥ καὶ αἱ κορυφαὶ Α' καὶ Β' γράφουν τὰς εὐθείας ΟΧ, ΟΥ. Ἐπειδὴ δὲ μένει καὶ ἴσον πάντοτε ἑαυτῷ, ἀφοῦ $KA' = KB' = \frac{1}{2}$ ἀκτῖνος περιφερείας ΑΟΒ (§ 28, 2), ὁ τόπος τοῦ Κ θὰ εἶναι ἔλλειψις (§ 2159).

Βλέπε καὶ *J.M.E.*, τῶν Bourget καὶ Longchamps, 1887, σ. 163).

Τόπος 920—IV

2161 β. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι τοῦ Simson, αἱ σχετικαὶ πρὸς δύο τρίγωνα ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν καὶ πρὸς τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας, τέμνονται κατὰ σταθερὰν γωνίαν.

Ὁ δὲ τόπος τοῦ κοινοῦ αὐτῶν σημείου εἶναι κωνικὴ τομὴ (*Droz-Farny*).

Τὸ κοινὸν τῶν εὐθειῶν σημεῖον εἶναι τὸ μέσον εὐθυγράμμου τμήματος σταθεροῦ μήκους καὶ τοῦ ὁποίου τὰ πέρατα ὀλισθαίνουν ἐπὶ δύο ὀρθογωνίων εὐθειῶν. (*Mathesis*, 1901, σ. 104 ζτμ. 1090).

Τόπος 921

2162. Μία περιφέρεια κυλίεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἄλλης διπλασίας ἀκτῖνος. Ποῖος ὁ τόπος ὁ γραφόμενος ὑπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου τῆς κυλιομένης περιφερείας;

Κατὰ τὸ *θεώρημα τοῦ Cardan* ἢ τοῦ *La Hire* (§ 1285), τὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς κυλιομένης περιφερείας Μ γράφει διάμετρον τῆς ἀκινήτου Ρ.

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο διαμετρικὰ σημεῖα τῆς περιφερείας Μ. Τα σημεῖα ταῦτα θὰ γράψουν δύο διαμέτρους καθέτους ἐπ' ἀλλήλας τῆς περιφερείας Ρ καὶ κατὰ τὸ *θεώρημα τοῦ Schooten* πᾶν ἄλλο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῆς κινητῆς περιφερείας Μ θὰ γράψῃ ἔλλειψιν.

Παρατήρησις. Τὰ σημεῖα Α, Β καὶ πᾶν ἄλλο τῆς περιφερείας Μ γράφουν διαμέτρους· ταύτας δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀπείρως πεπλατυσμένας ἐλλείψεις.

Σημείωσις. Κατὰ τὸν ἴδιον La Hire, ἡ θεώρησις τῶν *ἐπικυκλοειδῶν* ὀφείλεται εἰς τὸν Desargues. Διὰ τὰς καμπύλας ταύτας βλ. G., nº 892.

Τόπος 922

2163. Ποῖος ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν ἐλλείψεων, αἵτινες ἐγγράφονται εἰς δοθὲν κυρτὸν τετράπλευρον; (Νεύτων).

Εἶναι ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων αὐτοῦ εὐθεῖα.

Πράγματι, δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἀνεύρωμεν ἐπίπεδον ἐπὶ τὸ ὁποῖον ἡ προβολὴ μιᾶς τῶν ἐν λόγῳ ἐλλείψεων νὰ εἶναι περιφέρεια. Ταύτης τὸ κέντρον Ο εὑρίσκεται, κατὰ τὴν § 1614, ἐπὶ τῆς εὐθείας μν, τῆς συνδεούσης τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου αβγδ, καθ' ὃ προβάλλεται τὸ δοθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα μν εἶναι προβολὴ τῆς ἀντιστοίχου ΜΝ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ καὶ τὸ σημεῖον Ο ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου Ο τῆς ἐλλείψεως, ἡ πρότασις ἀποβαίνει φανερά.

2164. Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κέντρον ἐλλείψεως, ἧς δίδονται πέντε ἐφαπτόμεναι. Ἐπειδὴ ἀνὰ τέσσαρες ἐκ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν ὁρίζουν τετράπλευρα περιγεγραμμένα εἰς τὴν κωνικὴν τομὴν καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἀντίστοιχοι εὐθεῖαι ΜΝ διέρχονται διὰ τοῦ ζητουμένου κέντρου τῆς καμπύλης.

Τόπος 923

2165. Τόπος τῶν ἑστιῶν τῶν παραβολῶν, αἵτινες περιγράφονται εἰς τρεῖς δοθείσας εὐθείας.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον τῶν τριῶν ἐφαπτομένων. Γνωρίζομεν ὅτι αἱ προβολαὶ τῆς ἑστίας Ε ἐπὶ τὰς τρεῖς ἐφαπτομένας εἶναι τρία σημεῖα Δ, Ζ, Θ, κείμενα ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφὴν τῆς καμπύλης. Κεῖνται ἐπ' εὐθείας ἑπομένως τὰ τρία ταῦτα σημεῖα καὶ κατὰ τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τοῦ *Robert Simson* (§ 22), τὸ σημεῖον Ε πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Ὁ τόπος, ἑπομένως, τῶν ἑστιῶν Ε εἶναι ἡ περιφέρεια αὐτη.

2166. *Παρατηρήσεις.* 1) Θεώρημα τοῦ Lambert: *Ἡ περιφέρεια ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων τομῆς τριῶν ἐφαπτομένων παραβολῆς, διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας αὐτῆς.*

Πρόκειται περὶ ἄλλης διατυπώσεως τῆς προηγουμένης προτάσεως. (Βλ. καὶ § 2141).

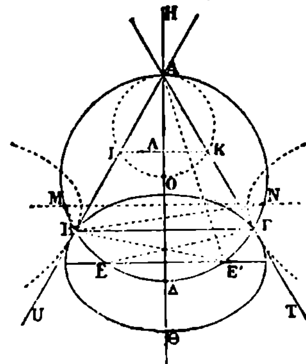
2) Ὑπάρχουν πολυάριθμοι ἐφαρμογαὶ τοῦ ἀνωτέρω τόπου. Δοθεισῶν λ. χ. τεσσάρων ἐφαπτομένων παραβολῆς ὁρίζεται ἡ ἑστία αὐτῆς, ὡς τομὴ τῶν περιφερειῶν τῶν περιγραφομένων εἰς τρία ἐκ τῶν σχηματιζομένων τριγώνων ὑπὸ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

Τὸ σημεῖον τοῦτο ἄλλωστε εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ Steiner ἢ Miquel τοῦ τετραπλεύρου τῶν δοθεισῶν ἐφαπτομένων (§ 21).

Τόπος 923—I

2166 α. **Ὁ τόπος τῶν ἑστιῶν τῶν κωνικῶν τομῶν, αἵτινες ἐφάπτονται τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ εἰς τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ αὐτοῦ, ἀποτελεῖται ἐκ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α καὶ ἐκ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου.**

1) Εἶναι φανερὸν κατὰ πρῶτον, ὅτι αἱ ἐλλείψεις ἢ ὑπερβολαί, τῶν ὁποίων ὁ πρωτεύων ἄξων κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΘ καὶ ἐφάπτονται τῶν ΑΒ, ΑΓ εἰς Β καὶ Γ, ἔχουν τὰς ἑστίας των ἐπὶ τῆς διχοτόμου ταύτης.



Σχ. 1362.

Καὶ αἱ μὲν ἑστίαι τῶν ἐλλείψεων τούτων εἶναι τομαὶ Ρ, Ρ′ τῆς εὐθείας ΑΘ καὶ τῶν ζευγῶν τῶν διὰ τοῦ Β (ἢ Γ) εὐθειῶν, τῶν ἴσον κεκλιμένων πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΑΒU καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ ταύτης κειμένων (μὴ φαινομένων εἰς τὸ σχῆμα). Ἔστω Ρ ἡ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ἑστία καὶ Ρ′ ἡ ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένη.

Διὰ θέσιν τῆς ΒΡ′ παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον, ἡ ἑστία Ρ′ εἶναι ἀπομεμακρυσμένη εἰς ἄπειρον ἐνῷ ἡ ἄλλη Ρ εἶναι (προφανῶς) τὸ κέντρον Ο τῆς περιφερείας ΑΒΓ. Εἶναι λοιπὸν ἡ ὁριακὴ αὐτὴ ἔλλειψις παραβολὴ (Π), ἔχουσα ἑστίαν τὸ Ο καὶ ἐφαπτομένη τῆς εὐθείας ΙΚ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ· ἐπειδὴ τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι καὶ μέσα τῶν ἐφαπτομένων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ἀπὸ τῶν σημείων ἐπαφῆς μέχρι τοῦ ἄξονος τῆς καμπύλης.

Διὰ θέσεις τῆς ΒΡ′ πέραν τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΘ, τὸ σημεῖον Ρ′ μεταπηδᾷ εἰς τὸ τμῆμα ΑΗ τῆς εὐθείας ΑΘ, ἐνῷ τὸ Ρ παραμένει ἐντὸς τοῦ τριγώνου καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἔλλειψις ἀποβαίνει ὑπερβολὴ μὲ ἑστίας τὰ σημεῖα πάλιν Ρ, Ρ′. Εἶναι δηλ. ἡ παραβολὴ (Π) τὸ ὁριακὸν σχῆμα μεταξὺ τῶν θεωρουμένων ἐλλείψεων καὶ ὑπερβολῶν.

2) Ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια ΑΒΔΓ εἶναι ὁ τόπος τῶν ἑστιῶν τῶν ἐλλείψεων καὶ ὑπερβολῶν, τῶν ὁποίων ὁ κάθετος ἐπὶ τὸν ἑστιακὸν ἄξων κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΘ.

Ἔστω πράγματι τυχοῦσα παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ εὐθεῖα, τέμνουσα τὴν περιφέρειαν (Ο) εἰς Ε καὶ Ε'. Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι ἑστίαι μιᾶς τῶν θεωρουμένων ἐλλείψεων, ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν ΕΓΑ καὶ Ε'ΓΤ. Αὕτη ὅμως εἶναι φανερά, ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου Ε'ΓΑΒ τοῦ σχήματος, ἀφοῦ

γων. ΕΓΑ = Ε'ΒΑ (ἐκ τῆς συμμετρίας) = Ε'ΓΤ,

ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ ἐν λόγῳ τετραπλεύρου.

Διερεύνησις. Ἐὰν ἡ ἀχθεῖσα παράλληλος ἐφάπτεται τῆς περιφερείας εἰς Δ, ἡ ἀντίστοιχος ἔλλειψις εἶναι περιφέρεια. Ὅταν διέρχεται διὰ τῆς ΒΓ, ἡ ἔλλειψις ἀποβαίνει ἀπείρως πεπλατυσμένη καὶ συμπίπτει πρὸς τὸ τμῆμα ΒΓ. Διὰ θέσεις τέλος ΜΝ μεταξὺ ΒΓ καὶ Α, λαμβάνομεν ὑπερβολάς, ἀφοῦ

γων. ΑΒΜ = ΑΒΝ.

Κατὰ ταῦτα, τὸ τόξον ΒΔΓ τῆς περιφερείας Ο εἶναι ὁ τόπος τῶν ἑστιῶν τῶν ἐλλείψεων καὶ τὸ τόξον ΒΑΓ ὁ τόπος τῶν ἑστιῶν τῶν ὑπερβολῶν.

2166 β. *Παρατηρήσεις.* 1) γων. ΑΕΒ = ΑΕΓ, γνωστὴ ἰδιότης τῆς ἐλλείψεως.

2) Ὁ προηγούμενος τόπος εἶναι ὁ ἴδιος τῆς § 85 α.

3) Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δὲν εἶναι ἰσοσκελές, ὁ πλήρης τόπος εἶναι *καμπύλη τρίτου βαθμοῦ*, μὲ διπλοῦν σημεῖον τὸ Α καὶ διερχομένη διὰ τῶν Β καὶ Γ. (*N. A.*, τῶν Terquem καὶ Gérono, 1850, σ. 247, Martorey).

2166 γ. Σημείωσις. *Σύνθετοι τόποι.* Οἱ σύνθετοι τόποι, διάφορα παραδείγματα τῶν ὁποίων ἐδώσαμεν ἤδη (§§ 85 α καὶ β, 86, 1407 γ, 2166 α), ἀπαιτοῦν προσοχήν τινα, ὅταν τὸ πρόβλημα ὁδηγῇ εἰς γενικὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ τετάρτου. Εἰς τὸ πρόβλημα λ. χ. τοῦ Chasles: *Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων δοθείσης ἐλλείψεως καὶ τῶν περιφερειῶν, αἵτινες διέρχονται διὰ δύο δεδομένων σημείων αὐτῆς*, ὁ τόπος οὗτος ἀποτελεῖται ἐκ μιᾶς κωνικῆς τομῆς καὶ μιᾶς καμπύλης τετάρτου βαθμοῦ. Τὸ ζήτημα τοῦτο ἔδωσε γένεσιν εἰς πολυαρίθμους μελέτας καὶ ἡ πλήρης σπουδὴ αὐτοῦ ἔγινεν μόνον τὸ 1880 εἰς τὰ *N. A.*, σ. 122, ὑπὸ τοῦ R. P. Le Cointe.

Εἰς τὴν *Mathesis*, 1881, σ. 53, ἀναφέρεται τὸ ἴδιον πρόβλημα, ὁ δὲ Neuberg εἰς μίαν πολὺ ἐνδιαφέρουσαν *Σημείωσιν, συνοψίζει πάσας τὰς μέχρι τότε δοθείσας λύσεις* εἰς τὰς σελ. 54 ἕως 57 τοῦ ἰδίου τεύχους.

Τὰ *N. A.*, 1905, σ. 471, ἐπανέρχονται ἐπὶ τῆς πλέον ἐνδιαφερούσης περιπτώσεως τοῦ προβλήματος τοῦ Chasles.

Πρόβλημα 924

2167. Ποία ἡ περιβάλλουσα τῆς μιᾶς πλευρᾶς ὀρθῆς γωνίας, τῆς ὁποίας ἡ ἄλλη πλευρὰ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου ἐνῷ ἡ κορυφὴ αὐτῆς γράφει:

1) Δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἤ
2) Δοθεῖσαν περιφέρειαν;

(Βλ. *Μέθοδοι*, §§ 126 καὶ 127).

Πρόβλημα 925

2168. Τέμνομεν τὰς πλευρὰς ὀρθῆς γωνίας ὑπὸ εὐθειῶν εἰς τρόπον, ὥστε τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα νὰ ἔχουν ἐμβαδὸν δοθὲν k^2. Ποία ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν τούτων;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 129).

Πρόβλημα 926

2169. Ποία ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ΑΓ, αἵτινες διαιροῦσιν δύο δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα ΔΜ, ΔΝ εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα;

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 128).

Πρόβλημα 926—I

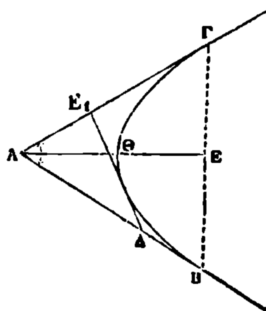
2170 Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ εὐθείας ΑΒ. Ἐπὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων ΜΑ, ΜΒ κατασκευάζομεν τετράγωνα, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ κείμενα ἐὰν τὸ σημεῖον Μ εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος ΑΒ, ἑκατέρωθεν δὲ αὐτῆς ἐὰν τὸ Μ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ ΑΒ.

Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ κέντρα Λ, Ν τῶν τετραγώνων τούτων περιβάλλει παραβολήν. (A. Butin, *J. M. É.*, 1887, σ. 215).

Ἡ παραβολὴ αὕτη ἔχει ἑστίαν τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ διευθετοῦσαν τὴν ἐκ τῆς κορυφῆς Δ, τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ κατασκευαζομένου ἰσοσκελοῦς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ, ἀγομένην παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ.

Πρόβλημα 927

2171. Ποία ἡ περιβάλλουσα τεμνούσης ΔΕ σταθερᾶς γωνίας Α, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ΑΔ, ΑΕ τοῦ σχηματιζομένου ἑκάστοτε τριγώνου ΑΔΕ παραμένῃ σταθερὸν = λ;



Σχ. 1353.

Διὰ νὰ ἀναχθῶμεν εἰς προηγούμενον ζήτημα, λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας μήκη ΑΒ = ΑΓ=λ. Ἐπειδὴ ΑΕ + ΑΔ=λ, θὰ εἶναι ΕΓ = ΑΔ καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΔ θὰ διαιρῇ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τμήματα ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ἑπομένως (§ 2169), ἡ περιβάλλουσα τῆς ΕΔ εἶναι παραβολή, κλπ.

2171 α. Παρατηρήσεις. 1) Ἐὰν ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΔΕ ἦτο σταθερά, ἡ περιβάλλουσα τῆς εὐθείας ΔΕ θὰ ἦτο ἡ παρεγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον καὶ εἰς τὴν γωνίαν Α περιφέρεια (§ 739).

2) Ἡ προηγουμένη παραβολὴ ἐφάπτεται τῶν ΑΕ, ΑΔ εἰς τὰ Β καὶ Γ.

3) Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΔΕ ἦτο σταθερόν, ἡ περιβάλλουσα τῆς ΔΕ θὰ ἦτο ὑπερβολή, μὲ ἀσυμπτώτους τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Πρόβλημα 928

2172. Ποία ἡ περιβάλλουσα τῶν περιφερειῶν, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ παραβολῆς καὶ αἵτινες ἐφάπτονται χορδῆς τῆς καμπύλης καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτῆς;

(Βλ. *Μέθοδοι,* § 132).

Πρόβλημα 928—I

2173. Ποία ἡ περιβάλλουσα τῶν περιφερειῶν, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ ἐλλείψεως καὶ αἵτινες ἐφάπτονται περιφερείας ἐχούσης κέντρον τὴν μίαν τῶν ἑστιῶν τῆς καμπύλης;

(Βλ. *Μέθοδοι,* § 133).

Πρόβλημα 929

2174. Ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς περιφέρειαν. Ὑπάρχουν ἄπειρα τρίγωνα ἐγγεγραμμένα εἰς τὴν ἰδίαν περιφέρειαν καὶ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὀρθόκεντρον Η μετὰ τοῦ δοθέντος. Ποία ἡ περιβάλλουσα τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων τούτων;

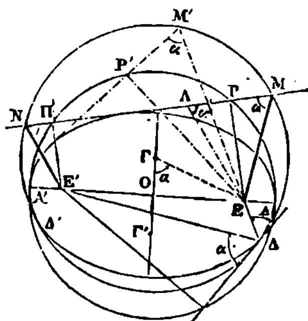
(Βλ. *Μέθοδοι,* § 130).

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποδίδεται συχνὰ εἰς τὸν Paul Serret *N. A.*, 1865, σ. 478), ἀλλ' ἀνήκει πράγματι εἰς τὸν Emile Lemoine (*N. A.*, 1858, σ. 240).

Τὰ ζητήματα ταῦτα δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν συσχετιζόμενα πρὸς τὰ ἀντίστροφα σχήματα τοῦ Mathieu. (Βλ. §§ 2306, 2308 κ.ἑξ.).

Τόπος 930

2175. Ποῖος ὁ τόπος τῶν κορυφῶν Μ σταθερᾶς γωνίας α, τῆς ὁποίας μία πλευρὰ διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας Ε δοθείσης ἐλλείψεως ἐνῷ ἡ ἄλλη ἐφάπτεται αὐτῆς;



Σχ. 1354.

Ἔστωσαν Μ, Μ' δύο τυχοῦσαι θέσεις τῆς κινητῆς κορυφῆς. Ἡ προβολὴ Ρ τῆς ἑστίας Ε ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην πλευρὰν τῆς γωνίας γράφει τὸν πρωτεύοντα κύκλον τῆς ἐλλείψεως, τὰ δὲ τρίγωνα ΕΡΜ, ΕΡ'Μ' μένουν πάντοτε ὅμοια ἀλλήλων, ὡς ὀρθογώνια καὶ ἔχοντα μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν των σταθεράν.

Κατὰ τὴν πρότασιν ἑπομένως τῆς § 1355, ὁ τόπος τῶν σημείων Μ θὰ εἶναι περιφέρεια καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν ἀκτῖνα $ΟΑ = α$, ἴσον πρὸς τὸν λόγον $\frac{ΕΜ}{ΕΡ}$.

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς περιφερείας ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κέντρον Γ αὐτῆς θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Ο τῆς ΕΕ'. Ἐὰν λοιπὸν κατασκευάσωμεν τρίγωνον ΕΓΟ

ὅμοιον πρὸς τὸ ΕΡΜ, τὰ τρίγωνα ΟΕΡ καὶ ΓΕΜ θὰ εἶναι, προφανῶς, ἐπίσης ὅμοια καὶ ἐπομένως

$$\frac{\Gamma M}{OP = \alpha} = \frac{EM}{EP} \quad \text{ἢ} \quad \Gamma M = \alpha \cdot \frac{EM}{EP} = \alpha \cdot \frac{E\Gamma}{EO} = \frac{\alpha}{\eta\mu\,\alpha} = \text{σταθ.}$$

Εἶναι δηλ. τὸ μῆκος ΓΜ ἡ ἀκτὶς τῆς ζητουμένης περιφερείας καὶ Γ τὸ κέντρον αὐτῆς (πρβλ. § 1353, 1)).

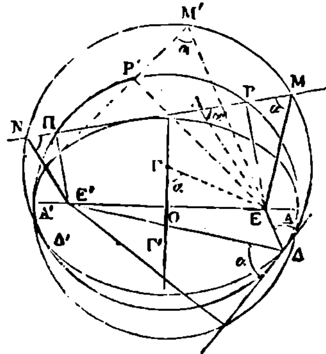
2176. Παρατηρήσεις. 1) Ἡ δοθεῖσα ἔλλειψις εἶναι δισεφαπτομένη τῆς περιφερείας Γ καὶ εἰς τὰ σημεῖα Δ, Δ', ὅπου αἱ ἑστιακαὶ ἀκτῖνες σχηματίζουν γωνίαν α μετὰ τῶν ἐφαπτομένων. (Πρβλ. ἐπμ. 2186).

2) Διὰ τὴν ἑστίαν Ε' καὶ τὰ σημεῖα Ν, ὁ τόπος εἶναι ἡ ἰδία περιφέρεια. Διὰ δὲ τὰ σημεῖα Λ (ΕΛΡ = α), ὁ τόπος εἶναι ἡ συμμετρικὴ τῆς εὑρεθείσης περιφέρεια πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΕ'.

3) Ἡ περιφέρεια ΜΜ'Ν ὀνομάζεται *περιφέρεια τοῦ Poncelet*.

Πρόβλημα 930—I

2177. Μία τῶν πλευρῶν σταθερᾶς γωνίας α διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Ε, ἐνῷ ἡ κορυφὴ αὐτῆς Μ γράφει δοθεῖσαν περιφέρειαν (Γ). Ποία ἡ περιβάλλουσα τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς γωνίας; (*N. A.*, 1865, σ. 546. Τὸ ζήτημα τοῦτο ἐξητάσθη ὑπὸ τοῦ Poncelet ἀπὸ τοῦ 1817, εἰς τὰς *Applications* κλπ. αὐτοῦ, τόμ. II, σ. 462).



Σχ. 1355.

Ἐκ τοῦ σημείου Ε, ὑποτιθεμένου ἐσωτερικοῦ τῆς περιφερείας (Γ), φέρομεν κάθετον ΕΡ ἐπὶ τὴν πλευράν, ἧς ζητοῦμεν τὴν περιβάλλουσαν. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΕΡΜ παραμένει πάντοτε ὅμοιον ἑαυτῷ, τὸ σημεῖον Ρ γράφει περιφέρειαν (§ 1355)· ἐπομένως, ἡ περιβάλλουσα τῆς δευτέρας πλευρᾶς ΡΜ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΕΡΜ εἶναι ἔλλειψις (§ 127), μὲ μέγαν ἄξονα ΑΕΕ'Α'.

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ τόπου τῶν σημείων Ρ, κατασκευάζομεν πάλιν τὸ τρίγωνον ΕΓΟ ὅμοιον τοῦ ΕΡΜ. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΕΡ, ΓΕΜ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{OP}{\Gamma M = \rho} = \frac{OE}{\Gamma E} \quad \text{ἢ} \quad OP = \rho \cdot \frac{OE}{\Gamma E} = \rho\,\eta\mu\,\alpha$$

ὅπου ρ ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας. Ο εἶναι τὸ κέντρον καὶ ΟΑ = ρ ημ α ἡ ἀκτὶς τοῦ πρωτεύοντος κύκλου τῆς ἐλλείψεως.

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ ἔλλειψις εἶναι δισεφαπτομένη τῆς δοθείσης περιφερείας ΜΜ'Ν (§ 2176).

2) ***Ὅταν τὸ σημεῖον Ε εἶναι ἐξωτερικὸν τῆς περιφερείας, ἡ περιβάλλουσα εἶναι ὑπερβολή.***

Τόπος 930—II

2178. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ὅταν ἡ γωνία α μεταβάλλεται αἱ ἀντίστοιχοι περιβάλλουσαι εἶναι ἐλλείψεις ὅμοιαι.

Ἔστωσαν α, β οἱ ἡμιάξονες τῆς τυχούσης ἐκ τῶν ἐλείψεων αὐτῶν καὶ γ τὸ ἥμισυ τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως. Θὰ ἔχωμεν

$$\alpha = \rho\,\eta\mu\,\alpha,\quad \gamma = \Gamma E\,\eta\mu\,\alpha,\quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \eta\mu\,\alpha\sqrt{\rho^2 - \Gamma E^2}.$$

Ἐπομένως,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \frac{\Gamma E^2}{\rho^2}} = \text{σταθερὸς ἀριθμός.}$$

Τόπος 930—III

2179. Ὁ τόπος τῆς δευτέρας ἑστίας Ε΄, ὅταν ἡ γωνία α μεταβάλλεται, εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος τῆς (Γ).

Ἐπειδὴ $\Gamma E' = \Gamma E.$

Τόπος 930—IV

2180. 1) Ἡ περιβάλλουσα πασῶν τῶν προηγουμένων ἐλλείψεων εἶναι ἡ περιφέρεια (Γ).

Πράγματι, ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι δισεφαπτομένη ἑκάστης τῶν ἐν λόγῳ ἐλλείψεων.

2) Ἐὰν ἡ περιφέρεια (Γ) ἀντικατασταθῇ δι' εὐθείας, ἑκάστη τῶν περιβαλλουσῶν εἶναι παραβολή.

Θεώρημα 930—V

2181. Ἐὰν ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΜΝΛ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΜΝ εἶναι χορδὴ δοθείσης περιφερείας καὶ ἡ μία πλευρά του ΑΜ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου, μεταβάλλεται εἰς τρόπον ὥστε νὰ παραμένῃ πάντοτε ὅμοιον ἑαυτῷ,

1) Ἡ τρίτη πλευρὰ αὐτοῦ ΝΛ διέρχεται ἐπίσης διὰ σταθεροῦ σημείου Ε΄.

2) Ἡ περιβάλουσα τῆς βάσεώς του εἶναι ἔλλειψις δισεφαπτομένη τῆς δοθείσης περιφερείας ([137]).

Πόρισμα 176 τοῦ Εὐκλείδου, ἐκ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰ *σημεῖα τοῦ Brocard* (*J. M. E.*, 1890, σ. 35, 83, 151. G. Tarry, E. Vigarié, Lauvernay. Ἐπίσης, *Mathesis*, 1890, σ. 115).

Τόπος 930—VI

2181 α. Αἱ κορυφαὶ Α καὶ Β τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σταθεραί, ὁ δὲ πούς Δ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Γ γράφει δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΜΝ. Εὕρετε τὸν τόπον τῆς κορυφῆς Γ.

---

137. Σημ. μετ. Πρόκειται περὶ ἄλλης διατυπώσεως τῶν προηγουμένων θεωρημάτων.

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΕ, ΓΗ καθέτους ἐπὶ τὴν ΜΝ. Θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{ΓΗ}{ΒΕ}=\frac{ΔΓ}{ΔΒ}=\frac{ΓΑ}{ΒΑ}.$$

ἢ $$\frac{ΓΗ}{ΒΕ}=λ, \text{ σταθερὸς ἀριθμός.}$$

Ἐπομένως: *Ὁ τόπος τοῦ σημείου Γ εἶναι κωνικὴ τομή, ἔχουσα ἑστίαν τὸ σημεῖον Α, διευθετοῦσαν τὴν εὐθεῖαν ΜΝ καὶ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Β.*

Σημείωσις. N. Cor. τοῦ Catalan, τόμ. I, 1874 - 75, σ. 185, λύσις ὑπὸ J. Neuberg.

Πρόβλημα 931

2182. Ἐὰν ἓν μεταβλητὸν σχῆμα μένῃ πάντοτε ὅμοιον ἑαυτῷ, μία τῶν εὐθειῶν του ΜΕ διέρχεται πάντοτε διὰ σταθεροῦ σημείου Ε, ἐνῷ τὸ σημεῖον Μ γράφει περιφέρειαν, τότε πᾶν ἄλλο σημεῖον τοῦ σχήματος γράφει ἐπίσης περιφέρειαν καὶ πᾶσα εὐθεῖα αὐτοῦ μὴ διερχομένη διὰ τοῦ Ε περιβάλλει κωνικὴν τομήν.

1) Ἔστω Ν τυχὸν τοῦ σχήματος σημεῖον. Τὸ τρίγωνον ΕΜΝ μένει ὅμοιον ἑαυτῷ καὶ τὸ σημεῖον Ν γράφει ἐπομένως περιφέρειαν (§ 1355).

2) Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΜΝ σχηματίζει σταθερὰν γωνίαν πρὸς τὴν ΜΕ, ἐνῷ τὸ Μ γράφει περιφέρειαν, ἡ περιβάλλουσα τὴν ΜΝ θὰ εἶναι κωνικὴ τομὴ ἔχουσα κέντρον (§ 2177).

3) Ὁμοίως διὰ τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΒ, τέμνουσαν τὴν ΜΕ εἰς ἓν σημεῖον Β λ. χ. Τὸ σημεῖον Β γράφει περιφέρειαν, ὁμόκεντρον τῆς γραφομένης ὑπὸ τοῦ Μ, ἡ δὲ ΑΒΕ παραμένει ἀμετάβλητος· περιβάλλει ἄρα καὶ ἡ ΑΒ κων. τομὴν ἔχουσαν κέντρον.

Πρόβλημα 932

2183. Δίδονται δύο ὀρθογώνιαι εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΥ καὶ ... ῥοῦμεν τὰς ἐλλείψεις δεδομένου ἐμβαδοῦ, τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες κεῖνται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν. Ποία ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐλλείψεων τούτων;

Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης ἐλλείψεως εἶναι

$$παβ=α\,.\,ΟΑ\,.\,ΟΒ$$

καὶ ἐπομένως $$ΟΑ\,.\,ΟΒ=σταθ.=2k^2.$$

Ἔστω τώρα αλβ ὁ πρωτεύων κύκλος τῆς τυχούσης (Ε) ἐκ τῶν ἐλλείψεων τούτων (σχ.1357) καὶ μλν ἐφαπτομένη αὐτοῦ, δι' ἣν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς λ εἶναι τὸ μέσον τοῦ μεταξὺ τῶν οα, οβ τμήματος αὐτῆς, ἢ $\widehat{αολ}=\widehat{λοβ}=45^\circ$. Θὰ εἶναι

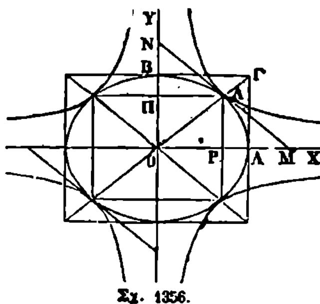
$$(ορλπ)=\frac{1}{2}(οαγβ) \quad \text{ἢ τρ. } (ομν)=\text{τετράγων. }(οαγβ),$$

καὶ ἡ σχέσις αὐτὴ τῶν ἐμβαδῶν θὰ διατηρηθῇ καὶ κατὰ τὴν προβολὴν τῆς περιφερείας εἰς ἔλλειψιν. Ἐπομένως:

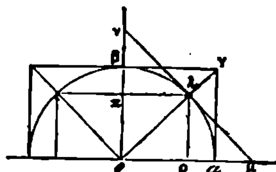
Ἐὰν θεωρήσωμεν ἐφαπτομένην ΜΛΝ τῆς (Ε), διχοτομουμένην εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Λ, τὸ τρίγωνον ΟΜΝ θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΟΑΓΒ

$$ΟΜ\,.\,ΟΝ=2\,ΟΑ\,.\,ΟΒ=4k^2.$$

'Αλλὰ τότε (§§ 78, 118), ἡ εὐθεῖα ΜΝ θὰ περιβάλλῃ ὑπερβολὴν καὶ τῆς ὁποίας θὰ ἐφάπτεται, εἰς ἑκάστην θέσιν αὐτῆς, κατὰ τὸ μέσον Λ τοῦ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ΟΧ, ΟΥ τῆς καμπύλης τμήματος αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΜΛΝ ἐφάπτεται καὶ τῆς ἐλλείψεως (Ε) καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Λ, συμπεραίνομεν:



Σχ. 1356.



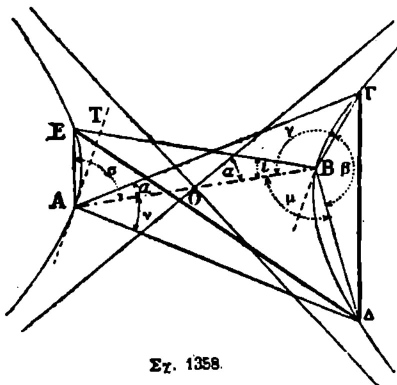
Σχ. 1357

Ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐλλείψεων (Ε) ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν, ἐχουσῶν ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας ΟΧ, ΟΥ καὶ τὴν αὐτὴν δύναμιν k^2.

Σημείωσις. *N. A.*, 1869, σ. 95, C. Harkema. Ὁ G. Fouret ὑποδεικνύει εἰς τὸ ἴδιον τεῦχος, σ. 323, ὅτι τὸ πρόβλημα λύεται ἐπίσης, ὡς ἀνωτέρω, εὐκόλως, ὅταν αἱ ἐλλείψεις σταθεροῦ ἐμβαδοῦ ἔχουν κοινὸν ἓν ζεῦγος συζυγῶν διευθύνσεων.

Θεώρημα 932—Ι

2183 α. Εἰς πᾶσαν ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν, τυχοῦσα χορδὴ αὐτῆς φαίνεται ἐκ τῶν ἄκρων μιᾶς διαμέτρου ὑπὸ γωνίας ἴσας ἢ παραπληρωματικάς.



Σχ. 1358.

Αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι ὅταν ἡ χορδὴ τέμνῃ τὴν διάμετρον· ἄλλως εἶναι παραπληρωματικαί.

1) Ἔστωσαν ΑΒ ἡ διάμετρος καὶ ΓΔ ἡ χορδή. Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\widehat{\Gamma A \Delta} + \widehat{\Gamma B \Delta} = 180^\circ.$$

Πράγματι (§ 2131 α):

$$\mu - \nu = 2\alpha,$$

$$\gamma - \alpha = 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ - 2\alpha.$$

Διὰ προσθέσεως, λαμβάνομεν

$$\gamma + \mu - (\alpha + \nu) = 180^\circ.$$

ἀλλ' εἶναι $\gamma + \mu = 360^\circ - \beta\cdot$

ἄρα $(\alpha + \nu) + \beta = 180^\circ$

ἢ $\widehat{\Gamma A \Delta} + \widehat{\Gamma B \Delta} = 180^\circ.$

2) Διὰ τὴν χορδὴν ΕΔ, ἔχομεν

$$\mu - \nu = 2\alpha \quad (1)$$

$$\sigma - \iota = 2\alpha \quad (2)$$

καὶ ἀφαιροῦντες ἐκ τῆς (2) τὴν (1)

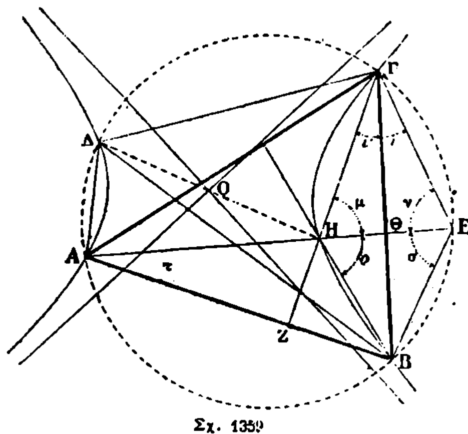
$$\mu + \iota = \sigma + \nu$$

ἢ $\widehat{E A \Delta} = \widehat{E B \Delta}.$

Θεώρημα τῶν Brianchon καὶ Poncelet 932—II

2183β. Εἰς πᾶν τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν, τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ κεῖται ἐπὶ τῆς καμπύλης.

Ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τέμνει τὴν



Σχ. 1359

ὑπερβολὴν εἰς ἓν τέταρτον σημεῖον Δ· δι' αὐτοῦ φέρομεν τὴν διάμετρον τῆς καμπύλης ΔΟΗ.

Θὰ ἔχωμεν (§ 2183 α):

$$\widehat{B \Delta \Gamma} + \widehat{B H \Gamma} = 180^\circ$$

καὶ ἐπειδὴ $\widehat{B \Delta \Gamma} = \widehat{B A \Gamma}$,

$$\widehat{B A \Gamma} + \widehat{B H \Gamma}\ 180^\circ.$$

Ὁμοίως, $\widehat{ΑΔΓ} = \widehat{ΑΗΓ}$ (§ 2183 α)

καὶ $μ = ν$, ὡς συμπληρώματα ἴσων γωνιῶν. Καὶ ἐπειδὴ

$$\widehat{ΓΗΒ} = \widehat{ΓΕΒ},$$

ἕπεται $ρ = σ$ καὶ τὰ τρίγωνα ΗΕΓ, ΗΕΒ εἶναι ἰσοσκελῆ, ἡ ΓΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΗΘΕ καὶ $ι = ι' = τ$.

Εἶναι κατὰ συνέπειαν κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας αἱ ΓΖ καὶ ΑΒ καὶ τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Η, τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, κεῖται ἐπὶ τῆς καμπύλης.

Παρατήρησις. Τὸ ἄκρον Η' τῆς διαμέτρου ΑΟΗ' τῆς ὑπερβολῆς εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΒΔΓ καὶ κοινὸν σημεῖον τῆς ὑπερβολῆς καὶ τοῦ κ. τόξου (Β, Γ, $\grave{Η}$).

2183 γ. **Ὁ κύκλος τῶν ἐννέα σημείων τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς ὑπερβολὴν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς καμπύλης.**

Ἔστωσαν Μ, Ν, R τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΓΔ, ΒΓ, ΒΔ τοῦ τριγώνου ΓΒΔ. Θὰ πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΜΝRΟ εἶναι ἐγγράψιμον.

Πράγματι,

$\widehat{ΜΟΡ} = \widehat{ΓΗΒ}$, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευράς των παραλλήλους

καὶ $\widehat{ΜΝR} = \widehat{ΓΔΒ}$, ὡς ἀπέναντι γωνίαι παραλληλογράμμου.

Ἄρα $\widehat{ΜΟR} + \widehat{ΜΝR} = \widehat{ΓΗΒ} + \widehat{ΓΔΒ} = 180^\circ$.

Παρατήρησις. Ἡ περιφέρεια (Μ, ΟΜ) διέρχεται διὰ τῶν κοινῶν σημείων τῆς ΔΓ καὶ τῶν ἀσυμπτώτων. (*Μέθοδοι*, § 174).

2183 δ. Σημειώσεις. 1) Τὸ *θεώρημα τῶν Brianchon καὶ Poncelet* εὑρίσκεται εἰς τὰς *Applications d'Analyse et de Géométrie* τοῦ Poncelet, τόμ. II, σ. 504. Ἐπίσης, *A. d. G.*, τόμ. XI, 1820 - 21.

Ἡ ἀπόδειξις ἐπανευρίσκεται εἰς τὸ *Traité de Géométrie* τῶν Rouché καὶ Comberousse, 7η ἔκδοσις, τόμ. II, n° 1193, σ. 465. Βλ. ἐπίσης καὶ *N. A.*, 1864, σ. 541 καὶ 1865, σ. 32 - 39, ὅπου ὁ J. Mention δίδει διάφορα ἐνδιαφέροντα θεωρήματα ἐπὶ τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς.

Καὶ σήμερον ἀκόμη προσπορίζεταί τις μεγάλην ὠφέλειαν ἐκ τῆς ἀναγνώσεως, μελέτης καὶ ἀφομοιώσεως τοῦ *Traité des propriétés projectives des figures* καὶ τῶν *Applications d'Analyse et de Géométrie* τοῦ Poncelet.

Διὰ τὴν ἐκτίμησιν τοῦ ἔργου τῶν γεωμετρῶν τοῦ XIX αἰῶνος, κατάλληλον βιβλίον εἶναι ἡ *Étude sur le développement des méthodes géométriques* τοῦ Gaston Darboux (1904, Gautier-Villars). Ἡ ὡραία αὐτὴ μελέτη ἀναδημοσιεύεται εἰς τὸ τέλος τῆς *Histoire des Mathématiques* τοῦ Rouse - Ball.

2) Ἡ τετρὰς τῶν τεσσάρων σημείων Α, Β, Γ, Η, ὠνομάσθη *ὀρθοκεντρικὴ ὁμὰς* ὑπὸ τοῦ Longchamps. (*J. M. S.*, 1891, **τόμ. 15**,

σ. 151). Ἕκαστον τῶν τεσσάρων τούτων σημείων εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τῶν τριῶν ἄλλων.

Εἰς τὸ ἴδιον σχῆμα δίδεται ἐπίσης καὶ τὸ ὄνομα *ὀρθοκεντροειδὲς quadrangle* (138).

Τόπος 932—III

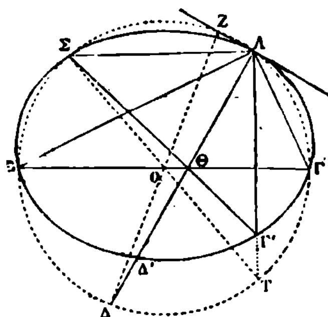
2183ε. Ἐὰν ἡ μία τῶν κορυφῶν παραλληλογράμμου περιγεγραμμένου εἰς ἔλλειψιν γράφῃ τὴν μίαν τῶν διευθετουσῶν αὐτῆς, ἡ ἀπέναντι ταύτης γράφει τὴν ἑτέραν διευθετοῦσαν καὶ αἱ ἄλλαι δύο κορυφαὶ τὸν πρωτεύοντα τῆς ἐλλείψεως κύκλον. (*N. A.*, 1860, σ. 228, 229, ὑπὸ Lescaze ἢ Lascases, μαθητοῦ Gérono).

Ἐπειδὴ αἱ ἐκ σημείου τῆς διευθετούσης ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι συναντοῦν τὸν πρωτεύοντα κύκλον εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου αὐτοῦ.

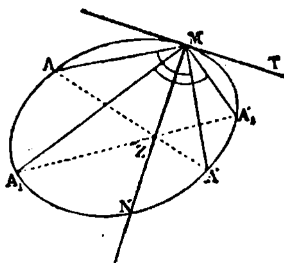
Θεώρημα τοῦ Frégier 932—IV

2183ζ. Ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΓ στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν του Α καὶ μένει πάντοτε ἐγγεγραμμένον εἰς δοθεῖσαν κωνικὴν τομήν. Δείξατε ὅτι ἡ χορδὴ ΒΓ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

Ἡ περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον ΒΑΓ περιφέρεια τέμνει τὴν κωνικὴν τομὴν εἰς ἓν τέταρτον σημεῖον Σ (σχ. 1359α), καὶ ἡ διάμετρος ΣΤ ὁρίζει τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΣΑΤ. Ἡ δὲ ἐφαπτομένη τῆς



Σχ. 1359 α



Σχ. 1359 β

κων. τομῆς εἰς Α καὶ ἡ εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον κάθετος ἐπ' αὐτὴν ΑΔ συναντοῦν τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Ζ, Δ ἐπὶ διαμέτρου κείμενα.

Ἐὰν ἐκ τοῦ Α προβάλωμεν ἐπὶ τῆς κων. τομῆς τὰ σημεῖα Β, Γ, Σ, Τ, Ζ καὶ Δ κατὰ τὰ Β, Γ, Σ, Γ', Α καὶ Δ', αἱ διάμετροι ΒΓ, ΣΤ, ΖΔ γίνονται αἱ χορδαὶ ΒΓ, ΣΓ', ΑΔ' τῆς καμπύλης. Καὶ ἐπειδὴ αἱ διάμετροι ΒΓ, ΣΤ, ΖΔ τῆς περιφερείας διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς Ο, ἕπεται (139) ὅτι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι χορδαὶ θὰ διέρ-

138. Σημ. μετ. Τετράγωνον;

139. Σημ. μετ. Κατὰ προτάσεις τῆς Προβολικῆς Γεωμετρίας (πρβλ. Exercices de Géométrie moderne, ὑπὸ G. Papelier, τεύχη ὄγδοον καὶ ἔνατον.

χωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Θ. Τοῦτο δὲ θὰ εἶναι σταθερὸν σημεῖον, ὡς τομὴ τῆς καθέτου ΑΔ' εἰς τὸ Α καὶ τυχούσης ἐκ τῶν θεωρουμένων χορδῶν.

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ ἀπόδειξις ἰσχύει διὰ πᾶσαν κων. τομήν.

2) Τῇ βοηθείᾳ τῆς *ἐνελίξεως*, ἡ ἀπόδειξις εἶναι πολὺ ἁπλῆ (σχ. 1359 β):

Διὰ τῆς στροφῆς τῆς γωνίας ΑΜΑ' περὶ τὸ σημεῖον Μ, αἱ πλευραὶ αὐτῆς ΜΑ, ΜΑ' παράγουν τὰς ὁμολόγους ἀκτῖνας δύο *ἐνελικτικῶν δεσμῶν*, ἐχουσῶν ὁμολόγους ἀκτῖνας τὴν ἐφαπτομένην ΜΤ καὶ τὴν κάθετον ΜΝ. Ἑπομένως, αἱ χορδαὶ ΑΑ', A_1A_1' κλπ. τέμνονται εἰς σταθερὸν σημεῖον Ζ, κείμενον ἐπὶ μιᾶς τῶν χορδῶν τούτων, τῆς καθέτου ΜΝ.

3) Τὸ *θεώρημα τοῦ Frégier* προκύπτει διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἀντιστρόφων πολικῶν ἐκ τῆς στοιχειώδους ἰδιότητος τῆς παραβολῆς: *Ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τῶν περιγεγραμμένων εἰς παραβολὴν ὀρθῶν γωνιῶν εἶναι εὐθεῖα: ἡ διευθετοῦσα τῆς παραβολῆς.* (*N. A.*, 1894, σ. 322, Cazamian).

Τὸ *σημεῖον τοῦ Frégier* ἔχει πλείστας ἰδιότητας· βλ. σχετικῶς ὡραῖον ἄρθρον τοῦ Gérard εἰς *Mathesis*, 1899, σ. 136.

Σημείωσις. Τοῦ Frégier, ἀποφοίτου τῆς *École Polytechnique*, εὑρίσκονται ὡραῖαι σχετικαὶ ἐργασίαι εἰς τὸν VI τόμον τῶν *A.d.G.*, 1815-16, σ. 229 καὶ 242: *Théorèmes nouveaux sur les lignes et surfaces du second ordre.*

Περιβάλλουσα 932—V

2183η. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν χορδῶν τῶν συνδεουσῶν τὰ ἄκρα τῶν ζευγῶν συζυγῶν διαμέτρων ἐλλείψεως (α, β).

2) Ὁμοίως, τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διὰ τῶν ἄκρων τριῶν συζυγῶν διαμέτρων ἐλλειψοειδοῦς (α, β, γ).

1) Ἀναγόμενοι εἰς τὸν πρωτεύοντα κύκλον τῆς ἐλλείψεως, ἀναγνωρίζομεν ἀμέσως ὅτι ἡ ζητουμένη περιβάλλουσα εἶναι ἡ ἔλλειψις, καθ' ἣν προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς δοθείσης ἐλλείψεως, ἡ περιφέρεια - περιβάλλουσα τῶν χορδῶν, αἵτινες ἑνοῦσιν τὰ πέρατα ζευγῶν καθέτων διαμέτρων τοῦ κύκλου τούτου.

Εἶναι ἑπομένως ἡ ζητουμένη περιβάλλουσα ἔλλειψις ὁμόκεντρος καὶ ὁμοία τῆς δοθείσης καὶ μὲ ἄξονας $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ καὶ $\frac{\beta\sqrt{2}}{2}$.

2) Ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶναι ἐλλειψοειδὲς ὁμόκεντρον καὶ ὅμοιον τοῦ δοθέντος καὶ μὲ ἄξονας

$$\frac{\alpha\sqrt{2}}{2},\ \frac{\beta\sqrt{2}}{2} \text{ καὶ } \frac{\gamma\sqrt{2}}{2}$$ (140).

Περιβάλλουσα 932—VI

2183θ. **Ποία ἡ περιβάλλουσα τῶν ὑποτεινουσῶν τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι τὸ κέντρον κων. τομῆς καὶ αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ κεῖνται ἐπὶ τῆς καμπύλης;**

---

140. Σημ. μετ. Καθ' ὁμοίαν ἀπόδειξιν· ἐπειδὴ τὸ δοθὲν ἐλλειψοειδὲς δύναται νὰ θεωρηθῇ «προβολὴ» σφαίρας. (Βλ. Ἀναλ. Γεωμ. Ν. Σακελλαρίου, ΙΙ τόμος: *Ἐπιφάνειαι Β' βαθμοῦ*).

Διὰ τὴν ἔλλειψιν, εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος αὐτῆς καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς $\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Διὰ τὴν ὑπερβολήν, ἡ ἀκτὶς εἶναι $\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}$, ὅπου α ὁ πρωτεύων τῆς καμπύλης ἄξων· διὰ τὴν πραγματικότητα τῆς περιφερείας ταύτης, θὰ πρέπει $\alpha \leqslant \beta$.

Διὰ τὸ ἐλλειψοειδές, ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιπέδων, τῶν ὁριζομένων διὰ τῶν ἄκρων ἑνὸς τρισορθογωνίου συστήματος ἡμιδιαμέτρων αὐτοῦ, εἶναι σφαῖρα ὁμόκεντρος τῆς ἐπιφανείας καὶ ἀκτῖνος $\rho = \frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$.

Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, διὰ κωνικὴν τομὴν ἔχουσαν κέντρον, προετάθη εἰς τὰ *A. d. G.* (τόμ. XV, 1824-25, σ. 76) καὶ ἐλύθη εἰς τὸν ἴδιον τόμον, σ. 197 ὑπὸ τοῦ Querret, κατὰ συνήθη εἰς αὐτόν, ἁπλοῦν καὶ εὐφυῆ τρόπον. Μεταβαίνει ἀπὸ τῆς ἐλλείψεως εἰς τὴν ὑπερβολὴν διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ β διὰ τοῦ $\beta\sqrt{-1}$.

Εἰς τὴν σελ. 199-204 εἷς ἀνώνυμος συνδρομητὴς ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα ἀναλυτικῶς καὶ τὸ ἐπεκτείνει δι' ἐπιφανείας τετάρτου βαθμοῦ ἐχούσας κέντρον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ἔλλειψις καὶ ὑπερβολή

Πρόβλημα 933

2184. **Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐλλείψεως εὑρίσκεται χορδὴ αὐτῆς παράλληλος πρὸς τὸν μέγαν ἄξονα καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτοῦ;**

Εἰς ἀπόστασιν $\frac{\beta}{2}\sqrt{3}$ (§ 50).

Πρόβλημα 934

2185. **Δίδεται ἔλλειψις διὰ τῶν ἑστιῶν της καὶ τοῦ μήκους 2α τοῦ μεγάλου ἄξονος. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς καμπύλης ταύτης καὶ περιφερείας ἐχούσης κέντρον κείμενον ἐπὶ τοῦ μικροῦ ἄξονος.**

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 116).

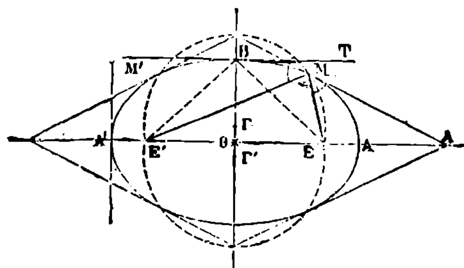
Πρόβλημα 935

2186. **Δοθείσης ἐλλείψεως, νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη αὐτῆς σχηματίζουσα γωνίαν φ μετὰ τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.**

Ἔστω $\widehat{EM\Lambda} = \varphi$. Ἐπειδὴ ἡ ἐφαπτομένη εἶναι ἴσον κεκλιμένη πρὸς τὰς ἑστιακὰς ἀκτῖνας, ἡ γωνία Ε'ΜΕ θὰ εἶναι ἴση πρὸς $180^\circ - 2\varphi$ καὶ τὰ ζητούμενα σημεῖα Μ θὰ εἶναι κοινὰ τῆς δοθείσης ἐλλείψεως καὶ τῶν δύο συμμετρικῶν κυκλικῶν τόξων (Ε, Ε', $180^\circ - 2\varphi$).

Αἱ τέσσαρες ἐφαπτόμεναι ἀποτελοῦν ἕνα περιγεγραμμένον εἰς τὴν ἔλλειψιν ρόμβον.

Ὁριακὰ μεγέθη. Τὰ ἀνω- ...ω ἴσα κυκλ. τόξα δέχονται τόσον



Σχ. 1360.

μεγαλυτέραν γωνίαν, ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ ἀκτίς των. Εἰς τὰς κορυφὰς Β ἢ Β' ἑπομένως λαμβάνομεν τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν ΕΒΕ' καὶ εἰς τὰς κορυφὰς Α ἢ Α' τὴν μικροτέραν.

Πράγματ:, διὰ τὴν ἐφαπτομένην εἰς Α, ἡ γωνία τῶν ἑστιακῶν ἀκτίνων εἶναι μηδέν.

Πρόβλημα 936

2187. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως, θεωρουμένης τῆς καμπύλης ταύτης ὡς προβολῆς περιφερείας ἐπὶ ἐπίπεδον.

Ἔστω α ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας.

Ἡ διάμετρος αὐτῆς, ἡ παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων, προβάλλεται κατὰ τὸ ἀληθὲς αὐτῆς μέγεθος καὶ δίδει τὸν μέγαν ἄξονα 2α τῆς ἐλλείψεως· ἡ δὲ διάμετρος τῆς περιφερείας, ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν προηγουμένην, προβάλλεται κατὰ μῆκος 2β ἴσον πρὸς τὸν μικρὸν ἄξονα τῆς καμπύλης. Ἡ γωνία ω τῆς δευτέρας διαμέτρου μετὰ τῆς προβολῆς της εἶναι ἡ γωνία τῶν ἐπιπέδων τῆς περιφερείας καὶ τῆς ἐλλείψεως:

$$\text{συν}\,\omega = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ προβολὴ μιᾶς ἐπιπέδου ἐπιφανείας ἐπὶ ἐπίπεδον ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς προβαλλομένης ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας τῶν δύο ἐπιπέδων, θὰ εἶναι

$$\text{ἐμβ. ἐλλείψεως} = \text{ἐμβ. περιφερείας} \times \text{συν}\,\omega = \pi\alpha^2 . \frac{\beta}{\alpha} = \pi\alpha\beta.$$

Πρόβλημα 937

***2188*. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη α, β τῶν ἡμιαξόνων ἐλλείψεως συναρτήσει τῶν μηκῶν α', β' δύο συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων αὐτῆς καὶ τῆς γωνίας αὐτῶν.**

Ἐκ τῶν δύο σχέσεων §§ 2073 καὶ 2075):

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{καὶ} \quad 2\alpha\beta = 2\alpha'\beta'\ \text{ημ}\,V,$$

εὑρίσκομεν

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + 2\alpha'\beta' \text{ ημ } V$$

καὶ

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha'\beta' \text{ ημ } V.$$

Ἑπομένως:

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + 2\alpha'\beta' \text{ ημ } V} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha'\beta' \text{ ημ } V}.$$

$$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + 2\alpha'\beta' \text{ ημ } V} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 - 2\alpha'\beta' \text{ ημ } V}.$$

Πρόβλημα 938

2189. **Νὰ κατασκευασθοῦν γεωμετρικῶς οἱ ἄξονες *ἐλλείψεως*, ὅταν δίδωνται θέσει αἱ δύο ἴσαι συζυγεῖς διάμετροι αὐτῆς.**

Ἔστω ΟΔ = ΟΔ'. Ὁ μέγας ἄξων κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΟΧ τῆς γωνίας ΔΟΔ' καὶ ὁ μικρὸς εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτόν.

Φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΧΟΥ· ἡ τεταγμένη ΔΡ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ μῆκος ΟΕ τῆς ἀκτῖνος τοῦ πρωτεύοντος κύκλου τῆς ἐλλείψεως, ἡ δὲ τετμημένη δίδει ΟΙ = β. (G., n° 635).

Σχ. 1361.

Παρατήρησις. Ἡ περίπτωσις καθ' ἣν γνωρίζομεν τὰς δύο ἴσας συζυγεῖς διαμέτρους ἐλλείψεως καὶ τὴν γωνίαν αὐτῶν, ἐμφανίζεται συχνὰ εἰς τὰς ἐφαρμογάς, ὡς λ. χ. εἰς τοὺς *ἀνακουφιστικοὺς θόλους* voûtes en décharge) εἰς τὴν Ἀρχιτεκτονικήν, εἰς τοὺς *κυματόμους* τῶν λοξῶν πολυτόξων γεφυρῶν κλπ. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως εἶναι

$$\pi \,.\, \text{ΔΟ}^2 \text{ ημ ΔΟΔ}' = \pi\alpha'^2 \text{ ημ } \varphi. \qquad (\varphi = \widehat{\text{ΔΟΔ}'}).$$

Ἐπειδὴ δὲ

$$\text{ΟΡ} = \text{ΟΔ} \,.\, \text{συν ΔΟΡ} = \alpha' \text{ συν } \frac{\varphi}{2}$$

καὶ

$$\text{ΟΕ} = \alpha = \text{ΟΡ}\sqrt{2},$$

ἕπεται

$$\alpha' = \alpha'\sqrt{2} \text{ συν } \frac{\varphi}{2}.$$

Ὁμοίως, $\text{ΟV} = \alpha' \text{ ημ } \frac{\varphi}{2}$, καὶ $\beta = \alpha'\sqrt{2} \text{ ημ } \frac{\varphi}{2}$.

2189 α. Σημείωσις. Εἰς τὴν πρᾶξιν καὶ ἰδιαιτέρως εἰς τοὺς θόλους τῶν γεφυρῶν, ἡ ἔλλειψις ἀντικαθίσταται ὑπὸ τῆς *ᾠοειδοῦς*

(ἀκριβέστερον, ὑπὸ τοῦ ἡμίσεος τῆς καμπύλης ταύτης) ἢ ὑπὸ τῆς *λαβῆς κανίστρου*, μὲ τρία ἢ πέντε κέντρα (§§ 1759 - 1763).

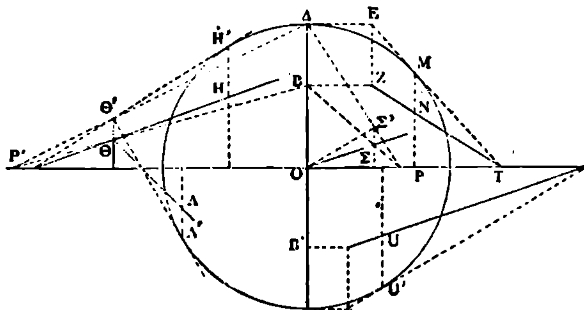
Πρόβλημα 939

2190. Θεωροῦντες τὴν ἔλλειψιν ὡς προβολὴν περιφερείας καὶ ἄνευ κατασκευῆς τῆς καμπύλης, νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην αὐτῆς:

1) Εἰς δοθὲν σημεῖον τῆς καμπύλης.
2) Ἐκ σημείου ἐκτὸς τῆς καμπύλης κειμένου.
3) Παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

1) Ἔστω Ν τὸ δοθὲν σημεῖον. Ἡ τεταγμένη ΡΝΜ δίδει τὸ σημεῖον Μ τῆς περιφερείας, τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς ΜΤ καὶ τὴν ζητουμένην ΝΤ.

2) Ἔστω Θ τὸ δοθὲν σημεῖον. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΘΡ′ καὶ ἐκ τοῦ Ρ′ ἐφαπτομένην Ρ′Θ′Η′ τῆς περιφερείας.



Σχ. 1362.

Τὸ Θ′ εἶναι τὸ ἀντίστοιχον τοῦ Θ′ σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς περιφερείας.

Αἱ ἐκ τοῦ Θ′ ἐφαπτόμεναι Θ′Η′, Θ′Λ′, μᾶς ὁδηγοῦν ἀμέσως καὶ εἰς τὰς ἐφαπτομένας ΘΗ, ΘΛ τῆς ἐλλείψεως.

3) Ἔστω ΟΣ ἡ δοθεῖσα διεύθυνσις. Εὑρίσκομεν τὴν ἀντίστοιχον ταύτης διεύθυνσιν ΟΣ′ εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας καὶ φέρομεν ἐφαπτομένην U′ παράλληλον πρὸς τὴν ΟΣ′. Ἐκ τῆς ἐφαπτομένης ταύτης, κατασκευάζομεν κατὰ τὰ προηγούμενα καὶ τὴν ζητουμένην ἐφαπτομένην U τῆς ἐλλείψεως, παράλληλον πρὸς τὴν ΟΣ.

Πρόβλημα 939—Ι

2191. Μὲ τὰ ἴδια δεδομένα, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ἔλλειψιν:

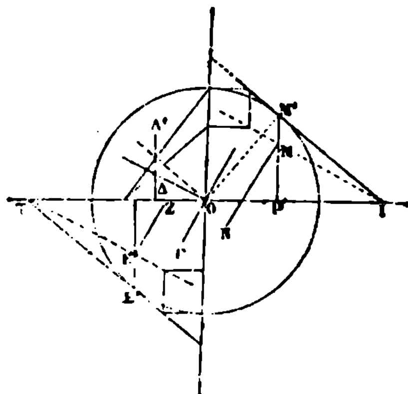
1) Εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς.
2) Παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

1) Ἔστω Μ τὸ δοθὲν σημεῖον. Εὑρίσκομεν, κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον, τὴν ἐφαπτομένην ΜΙ τῆς ἐλλείψεως καὶ φέρομεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν ΜΝ.

Παρατήρησις. Ἡ κάθετος ΜΝ δὲν εἶναι προβολὴ τῆς καθέτου Μ′Ο ἐπὶ τὴν περιφέρειαν· διὰ τοῦτο εἶναι ἀναγκαία ἡ κατασκευὴ τῆς ἐφαπτομένης ΜΙ.

2) Ἔστω ΟΓ ἡ δοθεῖσα διεύθυνσις καὶ ΟΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΓ.

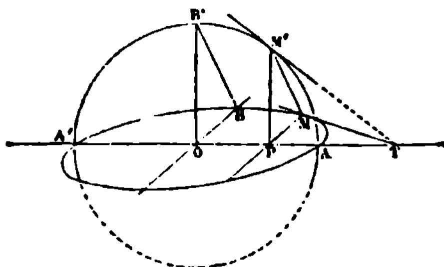
Εὑρίσκομεν τὴν ἐφαπτομένην ΤΕ΄ τῆς περιφερείας, τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ἀντίστοιχον τῆς ΟΔ διεύθυνσιν ΟΔ΄. Ἐκ ταύτης



Σχ. 1363.

ἀναγόμεθα εἰς τὴν ἐφαπτομένην ΤΕ τῆς ἐλλείψεως καὶ τὴν κάθετον ΕΖ.

2191 α. Σημείωσις. Ἀνάλογοι κατασκευαὶ παρέχουν τὰς λύσεις τῶν αὐτῶν προβλημάτων, ὅταν γνωρίζωμεν δύο συζυγεῖς διαμέτρους τῆς ἐλλείψεως καὶ τὴν γωνίαν αὐτῶν. Βασίζονται ὅμως



Σχ. 1364.

αὗται ἐπὶ μερικῶν θεωρημάτων μὴ ἀποδεικνυομένων εἰς τὰ *Cours de Géométrie* ἡμῶν καὶ τὰ ὁποῖα περιοριζόμεθα ἐνταῦθα νὰ ἀναφέρωμεν μόνον:

Ἐὰν κλίνωμεν κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὰς τεταγμένας ἐλλείψεως, λαμβάνομεν ἔλλειψιν πάλιν, ἀναφερομένην εἰς δύο συζυγεῖς διαμέτρους αὐτῆς.

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν περιφέρειαν, διὰ κλίσεως κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν τῶν τεταγμένων της καὶ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν ἐπὶ τὸν αὐτὸν

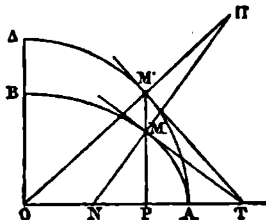
ἀριθμὸν (Σχ. 1364). Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς ἀντίστοιχα σημεῖα Μ, Μ′ *συναντοῦν τὴν* ΑΑ′ *εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

Διὰ τὰ θεωρήματα ταῦτα καὶ τὰς ἐκ τούτων κατασκευάς, παραπέμπομεν εἰς τὸ *Appendice aux Exercices de Géométrie* ἡμῶν.

Αἱ ἀνωτέρω κατασκευαὶ εὑρίσκονται ἐπίσης καὶ εἰς τὴν 3ην ἔκδοσιν τῶν *Ex. de Géom. Descriptive* (nos 91 καὶ ἑπόμενα).

Θεώρημα 939—II

2192. Εἰς τὴν ἔλλειψιν, ὁ λόγος τῆς τετμημένης ἑνὸς σημείου αὐτῆς πρὸς τὴν ὑποκάθετον τῆς καμπύλης εἰς αὐτὸ εἶναι ἴσος πρὸς $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$.



Σχ. 1365.

Πράγματι, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΜ′Τ καὶ ΝΜΤ εὑρίσκομεν

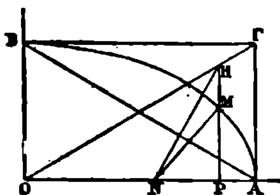
$$PM'^2 = PO \cdot PT,$$
$$PM^2 = PN \cdot PT.$$

Ἑπομένως:

$$\frac{OP}{NP} = \frac{PM'^2}{PM^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

Θεώρημα 939—III

2192 α. Ἔστω Μ σημεῖον ἐλλείψεως, ΜΝ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν καμπύλην καὶ ΟΑΓΒ τὸ ἐπὶ τῶν ἡμιαξόνων ὀρθογώνιον. Δείξατε ὅτι ἡ τεταγμένη ΜΡ τοῦ Μ καὶ ἡ ἐκ τοῦ Ν κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ τέμνονται ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΟΓ τοῦ ὀρθογωνίου.



Σχ. 1366.

Τὰ τρίγωνα ΗΡΝ καὶ ΟΑΒ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς των καθέτους (σχ. 1366). Ἑπομένως:

$$\frac{PH}{PN} = \frac{\alpha}{\beta}$$

καὶ διαιροῦντες τὴν ἰσότητα ταύτην διὰ τῆς προηγουμένης (§ 2192), εὑρίσκομεν τὴν

$$\frac{PH}{OP} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{A\Gamma}{AO},$$

ἥτις ἀποδεικνύει ὅτι τὸ σημεῖον Η εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΟΓ.

1η Ἐφαρμογή. Νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Ἐκ τῆς τομῆς Η τῆς ΟΓ καὶ τῆς τεταγμένης ΡΜ φέρομεν κάθετον ΗΝ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἡ ΜΝ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

2α Ἐφαρμογή. Νὰ ἀχθοῦν αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν ἔλλειψιν ἐκ σημείου Ν *τοῦ μεγάλου αὐτῆς ἄξονος.*

Ἐκ τοῦ Ν φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, τέμνουσαν εἰς Η τὴν ΟΓ. Οἱ πόδες τῶν ζητουμένων καθέτων εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ Η καθέτου ἐπὶ τὴν ΟΑ.

Θεώρημα 939—IV

2192β. **Ἐὰν ἡ ἐκ τοῦ Γ (σχ. 1367) κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ τέμνῃ τὴν ΟΑ εἰς Ι, ἡ δὲ ἡμιδιάμετρος ΟΜ τέμνῃ τὴν ΑΓ εἰς Λ, ἡ κάθετος ΜΝ ἐπὶ τὴν καμπύλην εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΛΙ.**

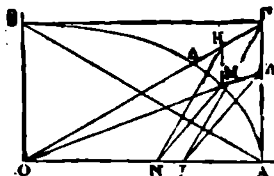
Ἔστω ΗΜΝ τὸ τρίγωνον τοῦ προηγουμένου σχήματος· ἐπειδὴ αἱ ΗΝ καὶ ΓΙ εἶναι παράλληλοι, ὡς καὶ αἱ ΜΝ καὶ ΓΛ, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{ΟΙ}{ΟΝ} = \frac{ΟΓ}{ΟΗ} = \frac{ΟΛ}{ΟΜ}.$$

Εἶναι δηλ. ΛΙ παράλληλος τῆς ΜΝ.

3η Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Μ *ἐλλείψεως, εἰς ὃ ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἔχει δοθεῖσαν διεύθυνσιν.*

Προσδιορίζομεν πρῶτον τὸ σημεῖον Ι διὰ τῆς καθέτου ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐκ τοῦ Ι φέρομεν παράλληλον ΙΛ πρὸς τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν. Τὸ ζητούμενον σημεῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΟΛ.



Σχ. 1367.

4η Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ *ἐλλείψεως, εἰς ὃ ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν σχηματίζει δοθεῖσαν γωνίαν* φ *μετὰ τῆς ἡμιδιαμέτρου* ΟΜ. *Μέγιστον τῆς γωνίας ταύτης.*

Προσδιορίζομεν πάλιν τὸ σημεῖον Ι καὶ γράφομεν κυκλ. τόξον (Τ) διὰ τῶν Ο, Ι, δεχόμενον γωνίαν φ. Ἡ τομὴ Λ αὐτοῦ καὶ τῆς ΑΓ ὁρίζει τὴν ἡμιδιάμετρον ΟΛ, ἐφ' ἧς κεῖται τὸ σημεῖον Μ.

Ἡ μεγίστη γωνία φ λαμβάνεται διὰ τόξον (Τ) ἐφαπτόμενον τῆς ΑΓ. Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς θὰ εἶναι τότε τὸ Γ. Πράγματι τὰ τρίγωνα ΙΓΑ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια (ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς των καθέτους) καὶ ἑπομένως:

$$\frac{ΑΙ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{ΑΓ}{ΑΟ},$$

ἢ

$$ΑΓ^2 = ΑΟ \,.\, ΑΙ.$$

Εἶναι, κατὰ συνέπειαν, ἡ μεγίστη γωνία φ ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ΟΓΙ.

2192γ. ***Σημείωσις.*** Τὰ θεωρήματα 2192 καὶ αἱ ἐφαρμογαὶ των μᾶς ἀνεκοινώθησαν ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ εἰς τὴν *École des ponts et chaussées* Maurice d'Ocagne καὶ ἐδημοσιεύθησαν ταυτοχρόνως εἰς τὸ *J. d. M. Él.* τοῦ Vuibert (1η Δεκεμβρίου 1898).

Ἡ κατασκευὴ τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον Μ (πρώτη ἐφαρμογή), ἐδόθη ὑπὸ τοῦ σοφοῦ καθηγητοῦ διὰ τὴν εὐκολωτέραν χάραξιν τῶν ἁρμῶν εἰς τοὺς ἐλλειπτικοὺς θόλους καὶ εἶχεν ἤδη ἀνακοινωθῆ εἰς τὰ *Annales des ponts et chaussées* τὸ 1886, 2α ἑξαμηνία, σ. 403).

Πρόβλημα 940

2193. **Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα δοθεῖσα εὐθεῖα συναντᾷ ὑπερβολήν, διδομένην διὰ τῶν ἑστιῶν καὶ τοῦ μήκους τοῦ πρωτεύοντος ἄξονος αὐτῆς.**

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 113 β).

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰ σημεῖα, κατὰ τὰ ὁποῖα δοθεῖσα εὐθεῖα *συναντᾷ* ὑπερβολήν, διδομένην διὰ τῶν ἀσυμπτώτων της καὶ ἑνὸς αὐτῆς σημείου. (Βλ. *Ex. d. Géom. Descr.*, 4η ἔκδ., Σημ. n^os 1311 καὶ ἑξῆς).

Πρόβλημα 941

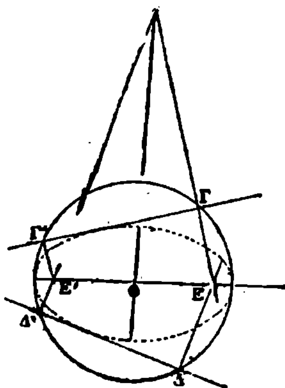
2194. Δίδεται ἰσοσκελὴς ὑπερβολὴ διὰ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς δυνάμεως k^2 αὐτῆς. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων τμῆμα αὐτῆς νὰ ἔχῃ μῆκος δοθέν.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 118).

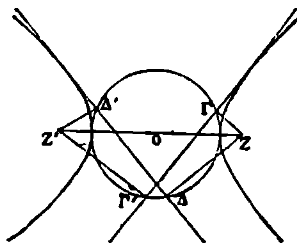
Πρόβλημα 942

2195. Νὰ κατασκευασθῇ [141] ἔλλειψις ἢ ὑπερβολή, τῶν ὁποίων δίδονται τὸ κέντρον, τὸ μῆκος 2α τοῦ πρωτεύοντος ἄξονος καὶ δύο ἐφαπτόμεναι.

Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τὸν πρωτεύοντα



Σχ. 1368.



Σχ. 1369.

κύκλον καὶ εἰς τὰ σημεῖα Γ, Γ', Δ, Δ', καθ' ἃ τέμνει οὗτος τὰς δοθείσας ἐφαπτομένας, φέρομεν καθέτους ἐπ' αὐτάς.

Αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται ἀνὰ δύο εἰς τὰς ἑστίας. Ἐὰν αἱ ἑστίαι εἶναι ἐσωτερικαὶ τοῦ πρωτεύοντος κύκλου (σχ. 1368), τὰ δοθέντα στοιχεῖα ἀνήκουν εἰς ἔλλειψιν· ἄλλως, εἰς ὑπερβολὴν (σχ. 1369).

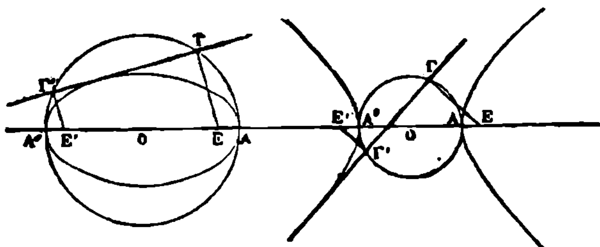
Ὑπάρχουν ἐν γένει δύο λύσεις· ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἑστίας καὶ τὰς τομὰς ε, ε' τῶν καθέτων εἰς τὰ Γ, Δ' καὶ Γ', Δ. Ἡ εε' θὰ εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις μιᾶς ὑπερβολῆς, κλπ.

141. Σημ. μετ. Νὰ εὑρεθοῦν δηλ. σημεῖα ὁσαδήποτε τῶν καμπύλων αὐτῶν, ἢ ἀπ' εὐθείας ἐκ τῶν δεδομένων ἢ διὰ προσδιορισμοῦ τῶν κυρίων στοιχείων τῶν καμπύλων.

Πρόβλημα 942—I

2196. Ὁμοίως, ἐὰν δίδωνται ὁ πρωτεύων ἄξων (θέσει καὶ μεγέθει) καὶ μία ἐφαπτομένη.

Γράφομεν τὸν πρωτεύοντα κύκλον ἐπὶ τοῦ μεγάλου ἡμιαξονος ΑΑ΄ καὶ φέρομεν καθέτους εἰς τὰ κοινὰ σημεῖα Γ, Γ΄ αὐτοῦ καὶ



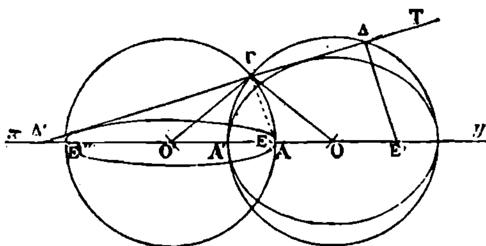
Σχ. 1370. Σχ. 1371.

τῆς δοθείσης ἐφαπτομένης. Θὰ ἔχωμεν ἔλλειψιν, ἐὰν ἡ ἐφαπτομένη τέμνῃ τὸν μέγαν ἄξονα ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΑ΄ αὐτοῦ καὶ ὑπερβολὴν εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν (σχ. 1370 καὶ 1371).

Πρόβλημα 942—II

2197. Ὁμοίως, ἐὰν δίδωνται μία τῶν ἑστιῶν, μία ἐφαπτομένη, ἡ διεύθυνσις τοῦ πρωτεύοντος ἄξονος καὶ τὸ μῆκος του 2α.

Ἐκ τῆς ἑστίας Ε φέρομεν κάθετον ΕΓ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην Τ



Σχ. 1372.

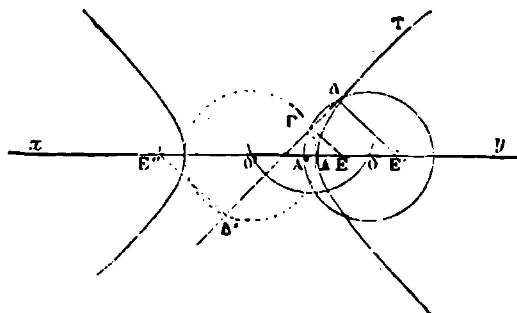
καὶ μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν εὐθεῖαν xy εἰς Ο καὶ Ο΄. Μὲ κέντρον Ο ἓν τῶν σημείων τούτων καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν περιφέρειαν (πρωτεύοντα κύκλον) καὶ εἰς τὸ σημεῖον Δ, καθ᾽ ὃ αὕτη τέμνει τὴν ἐφαπτομένην Τ, φέρομεν κάθετον ΔΕ΄ ἐπὶ τὴν Τ μέχρι τοῦ ἄξονος xy. Τὸ σημεῖον Ε΄ εἶναι ἡ δευτέρα ἑστία.

Ἡ περιφέρεια (Ο΄, α) δίδει δευτέραν λύσιν.

Ἐὰν αἱ ἑστίαι εὑρίσκωνται ἐντὸς τοῦ πρωτεύοντος κύκλου

(σχ. 1372), ἡ καμπύλη εἶναι ἔλλειψις· ὑπερβολὴ δὲ ἐὰν εὑρίσκωνται ἐκτὸς αὐτοῦ (σχ. 1373).

Τὸ πρῶτον σχῆμα δίδει ἐλλείψεις, τὸ δεύτερον μίαν ὑπερβολὴν



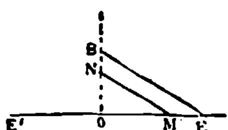
Σχ. 1373.

καὶ μίαν ἔλλειψιν. Θὰ εἴχομεν δύο ὑπερβολάς, ἐὰν ἡ εὐθεῖα xy διέτεμνε τὸ τμῆμα ΑΑ'.

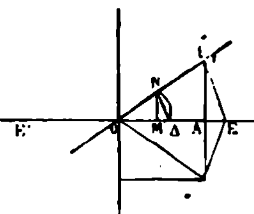
Πρόβλημα 942—III

2198. Ὁμοίως, ἐὰν δίδωνται αἱ δύο ἑστίαι καὶ ὁ λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τῶν ἀξόνων.

1) Διὰ τὴν ἔλλειψιν, ὁ λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος.



Σχ. 1374.



Σχ. 1375.

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν ἀξόνων μήκη ΟΜ, ΟΝ τοιαῦτα, ὥστε: $\frac{NM}{NO} = \frac{\alpha}{\beta}$ (σχ. 1374) καὶ διὰ τοῦ σημείου Ε φέρομεν παράλληλον ΕΒ πρὸς ΝΜ. Θὰ ἔχωμεν

$$\frac{BE}{BO} = \frac{\alpha}{\beta} \text{ καὶ ἑπομένως } BE = \alpha,\ OB = \beta.$$

2) Διὰ τὴν ὑπερβολὴν (σχ. 1375), ὑψοῦμεν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἑστιακοῦ ἄξονος κάθετον ΜΝ τοιαύτην, ὥστε $\frac{MO}{MN} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Μὲ κέντρον O καὶ ἀκτῖνα ON γράφομεν τόξον NΔ καὶ ἐκ τοῦ E φέρομεν παράλληλον ZI πρὸς τὴν NΔ.

Ἐπειδὴ $\frac{OA}{AI} = \frac{OM}{MN} = \frac{\alpha}{\beta}$,

θὰ εἶναι $OA = \alpha, \ AI = \beta,$

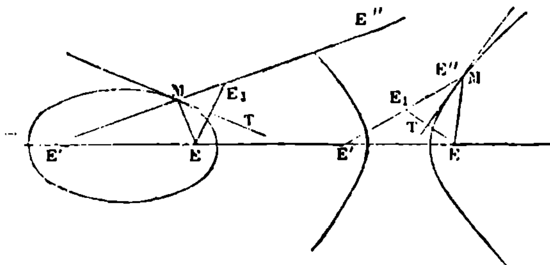
ἀφοῦ $AO^2 + AI^2 = OI^2 = OE^2 = \gamma^2$

Ἡ εὐθεῖα OI εἶναι ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης (G., nº 663).

Πρόβλημα 942—IV

2199. **Ὁμοίως, ἐὰν δίδωνται μία ἑστία E, ἓν σημεῖον M τῆς καμπύλης, ἡ ἐφαπτομένη εἰς αὐτὸ καὶ τὸ μῆκος 2α ἢ 2γ.**

Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον E_1, συμμετρικὸν τοῦ E πρὸς τὴν ἐφα-



Σχ. 1376. Σχ. 1377.

πτομένην T καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας E_1M λαμβάνομεν μῆκος E_1E' ἢ E_1E'' ἴσον πρὸς 2α.

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

1) $2\alpha > ME$ (σχ. 1376). Εὑρίσκομεν μίαν ἔλλειψιν καὶ μίαν ὑπερβολήν.

2) $2\alpha = ME$. Ἡ ἔλλειψις εἶναι εὐθεῖα γραμμή, ἡ ME.

3) $2\alpha < ME$ (σχ. 1377). Εὑρίσκομεν δύο ὑπερβολάς. Αὗται συμπίπτουν πρὸς τὴν ἐφαπτομένην MT διὰ $2\alpha = 0$.

Ἐὰν δοθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις 2γ, ἡ ἄλλη ἑστία E' (ἢ E'') εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ME_1 καὶ τῆς περιφερείας (E, 2γ).

Διὰ $2\gamma > EE_1 > ME$, ἔλλειψις καὶ ὑπερβολή.

Διὰ $2\gamma = EE_1 > ME$, ἡ ὑπερβολὴ ἀνάγεται εἰς τὴν ἐφαπτομένην MT.

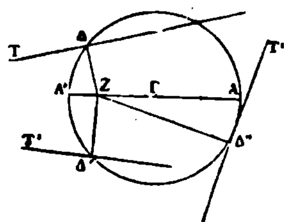
Διὰ $2\gamma = EE_1 = ME$, αἱ δύο λύσεις εἶναι εὐθεῖα MT (ὑπερβολὴ) καὶ ἡ εὐθεῖα ME (ἔλλειψις).

Διὰ $ME > 2\gamma > EE_1$, λαμβάνομεν δύο ὑπερβολάς.

Τὸ ἐλάχιστον τοῦ μήκους 2γ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ E ἀπὸ τῆς εὐθείας ME_1. Εἰς τοῦτο ἀντιστοιχεῖ μία μόνον ὑπερβολή.

Πρόβλημα 942—V

2200. Ὁμοίως, ἐὰν δίδωνται μία ἑστία Ζ καὶ τρεῖς ἐφαπτόμεναι.



Σχ. 1378.

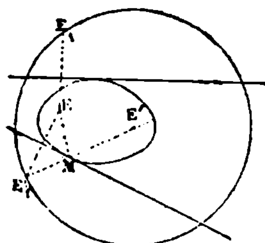
Προβάλλομεν τὴν ἑστίαν ἐπὶ τὰς τρεῖς ἐφαπτομένας εἰς Δ, Δ', Δ'' καὶ γράφομεν τὸν πρωτεύοντα κύκλον (ΔΔ'Δ''). Ἡ εὐθεῖα ΖΓ ὁρίζει τὸν μέγαν ἄξονα κλπ.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Ζ εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας, ἡ κων. τομὴ εἶναι ἔλλειψις (σχ. 1378)· ἄλλως εἶναι ὑπερβολή.

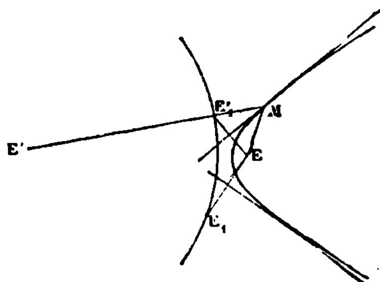
Πρόβλημα 942—VI

2201. Ὁμοίως, ἐὰν δίδωνται μία ἑστία, δύο ἐφαπτόμεναι καὶ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν.

Ἔστωσαν E_1, E'_1 τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τῆς δοθείσης ἑστίας πρὸς τὰς ἐφαπτομένας. Ὁ διευθύνων κύκλος Γ (Ε', 2α) θὰ διέρ-



Σχ. 1379.



Σχ. 1380.

χεται διὰ τῶν E_1, E'_1 καὶ θὰ ἔχῃ τὸ κέντρον του Ε' ἐπὶ τῆς E'_1M. Εὑρίσκεται, ἑπομένως, ἡ δευτέρα ἑστία Ε' διὰ τῆς τομῆς τῆς E'_1M καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς $E_1E'_1$. Ἡ καμπύλη εἶναι ἔλλειψις ἐὰν τὸ σημεῖον Ε εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ Γ (σχ. 1379). Ἄλλως, εἶναι ὑπερβολή (σχ. 1380).

Πρόβλημα 943

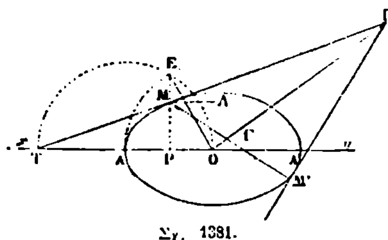
2202. Νὰ κατασκευασθῇ ἔλλειψις ἐκ δύο ἐφαπτομένων, τῶν σημείων ἐπαφῆς καὶ τῆς εὐθείας ἐφ' ἧς κεῖται ὁ μέγας αὐτῆς ἄξων.

Ἔστωσαν ΒΜ, ΒΜ' αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ xy ἡ εὐθεῖα ἐφ' ἧς ὁ μέγας ἄξων. Ἡ εὐθεῖα ΒΓΟ, ἡ συνδέουσα τὸ Β μετὰ τοῦ μέσου Γ τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς καμπύλης (§ 2081)· ἀφ' ἑτέρου (§ 2077):

$$\alpha^2 = OP \cdot OT.$$

Θὰ πρέπει λοιπὸν νὰ γράψωμεν περιφέρειαν ἐπὶ διαμέτρου ΟΤ καὶ νὰ τάμωμεν αὐτὴν εἰς Ε διὰ τῆς τεταγμένης ΡΜ. Θὰ ἔχωμεν

$OE^2 = OP \cdot OT = \alpha^2$ καὶ ἡ περιφέρεια μὲ κέντρον O καὶ ἀκτῖνα OE θὰ εἶναι ὁ πρωτεύων τῆς ἐλλείψεως κύκλος, κλπ.



Σχ. 1381.

Ἡ εὐθεῖα ΜΛ, παράλληλος τῆς xy, τέμνει τὴν ΟΕ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Ο ἴσην πρὸς τὸ μῆκος τοῦ μικροῦ ἄξονος (G., nº 635).

Πρόβλημα 943—I

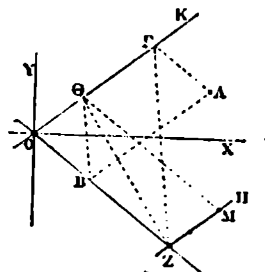
2202α. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα καθ' ἃ δοθεῖσα εὐθεῖα τέμνει ὑπερβολήν, διδομένην διὰ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ ἑνὸς σημείου αὐτῆς.

Θὰ σπουδάσωμεν διαδοχικῶς τὰς διαφόρους δυνατὰς περιπτώσεις.

1η Περίπτωσις. Ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν τῶν ἀσυμπτώτων.

Ἔστωσαν ΟΖ, ΟΚ αἱ ἀσύμπτωτοι, Α τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ΖΗ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα.

Πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος πρὸς μίαν τῶν ἀσυμπτώτων ὑπερβολῆς τέμνει αὐτὴν εἰς ἓν μόνον σημεῖον εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν (§§ 258 καὶ 2124).



Σχ. 1381 (α).

Ἔστω Μ τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ ἐκ τῶν Α, Μ ἃς φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις ὑπερβολῆς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους αὐτῆς εἶναι

$$xy = k^2. \qquad \text{(G., n° 678)}$$

Ἑπομένως

$$OB \cdot O\Gamma = k^2, \quad O\Theta \cdot OZ = k^2$$

ἢ

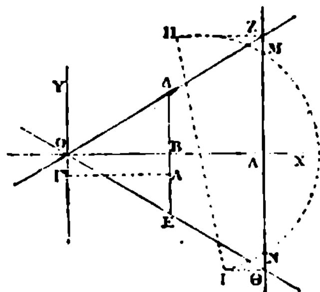
$$\frac{O\Theta}{OB} = \frac{O\Gamma}{OZ}.$$

Ἐπειδὴ τὰ μήκη ΟΒ, ΟΓ, ΟΖ εἶναι γνωστά, τὸ $O\Theta = ZM$ ὁρίζεται ὡς τετάρτη αὐτῶν ἀνάλογος καὶ αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς ἀσυμπτώτους ἐκ τῶν Θ καὶ Ζ τέμνονται εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ.

2202β. — ***2α Περίπτωσις.*** *Ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα τῶν ἀξόνων τῆς καμπύλης* (σχ. 1381 δ).

1) Ὑποθέσωμεν πρῶτον ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΘ εἶναι παράλληλος πρὸς

τὸν δευτερεύοντα ἄξονα ΟΥ τῆς καμπύλης. Προβάλλομεν τὸ δοθὲν σημεῖον Α ἐπὶ τῶν ἀξόνων εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ προεκτείνομεν τὴν τεταγμένην ΑΒ μέχρι τῶν τομῶν της Δ, Ε μετὰ τῶν ἀσυμπτώτων ΟΘ, ΟΖ.



Σχ. 1381 (β).

Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης πρὸς τοὺς ἄξονας ΟΧ, ΟΥ εἶναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Ἐπειδή, ὡς γνωστόν,

$$\frac{ΒΔ}{ΟΒ} = \frac{\beta}{\alpha},$$

$$ΒΔ = ΟΒ \,.\, \frac{\beta}{\alpha},$$

θὰ εἶναι $ΑΔ = ΟΒ \,.\, \frac{\beta}{\alpha} + ΑΒ, \quad ΑΕ = ΟΒ.\frac{\beta}{\alpha} - ΑΒ$

καὶ $ΑΔ \,.\, ΑΕ = ΟΒ^2 \,.\, \frac{\beta^2}{\alpha^2} - ΑΒ^2,$

ἢ $\frac{ΑΔ \,.\, ΑΕ}{\beta^2} = \frac{ΟΒ^2}{\alpha^2} - \frac{ΑΒ^2}{\beta^2} = 1,$

ἀφοῦ ΟΒ καὶ ΒΑ εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Β. Ἐπομένως

$$ΑΔ \,.\, ΑΕ = \beta^2.$$

Οἱουδήποτε ὄντος, ὥστε, τοῦ σημείου Α τῆς ὑπερβολῆς, τὰ μήκη ΑΔ, ΑΕ ἔχουν γινόμενον σταθερόν.

Κατὰ συνέπειαν, ὁρίζονται τὰ κοινὰ σημεῖα Μ, Ν τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς εὐθείας ΖΘ διὰ τῆς εὑρέσεως τῶν πλευρῶν ΜΘ, ΜΖ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, ἔχοντος ἄθροισμα προσκειμένων πλευρῶν $ΜΘ + ΜΖ = ΖΘ =$ γνωστὸν μῆκος καὶ ἐμβαδὸν $ΜΘ \,.\, ΜΖ = ΑΔ \,.\, ΑΕ = \beta^2$.

Ἡ λύσις τοῦ γνωστοῦ αὐτοῦ προβλήματος εἶναι πολὺ ἁπλῆ (§ 297). Ἐπὶ τῆς ΖΘ ὑψοῦμεν καθέτους ΖΗ, ΘΙ, ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰ μήκη ΑΔ, ΑΕ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν μὲ διάμετρον ΗΙ. Τὰ κοινὰ σημεῖα (ὅταν ὑπάρχουν) ταύτης καὶ τῆς εὐθείας ΖΘ ὁρίζουν τὰ σημεῖα Μ, Ν.

Ὑπάρχουν δύο λύσεις, μία ἢ καμμία λύσις.

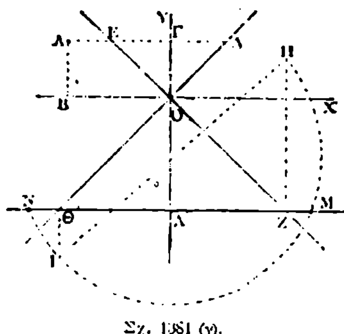
2202 γ. Ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν πρωτεύοντα τῆς ὑπερβολῆς ἄξονα, τέμνουσα εἰς Ζ καὶ Θ τὰς ἀσυμπτώτους. (Σχ. 1381 γ). Ἐὰν Α τὸ δοθὲν σημεῖον, ἀποδεικνύομεν, καθ' ὅμοιον τοῦ προηγουμένου τρόπον, ὅτι

$$ΜΖ \,.\, ΜΘ = ΑΔ \,.\, ΑΕ = \alpha^2$$

καὶ τὰ σημεῖα Μ, Ν, τομαὶ τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τῆς ὑπερ-

βολῆς, εὑρίσκονται κατὰ τὸν εἰς τὸ σχῆμα ὑποδηλούμενον τρόπον καὶ τὰ ἐν § 299 ἐκτεθέντα.

Εὑρίσκονται δύο σημεῖα τομῆς πάντοτε Μ, Ν.


Σχ. 1381 (γ).

2202 δ. 3η Περίπτωσις. Ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἔχει τυχοῦσαν θέσιν.

Ἡ περίπτωσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην δευτέραν διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν συζυγῶν διαμέτρων (§ 2126). Θεωροῦντες πράγματι τὴν εὐθεῖαν ΟΒΧ, διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου Ο τῆς καμπύλης καὶ τοῦ μέσου Λ τῆς ΖΘ (μέσον, ὡς γνωστόν, καὶ τῆς χορδῆς ΜΝ), ὡς καὶ τὴν παράλληλον ΟΥ τῆς ΖΘ, λαμβάνομεν δύο συζυγεῖς διευθύνσεις τῆς ὑπερβολῆς καὶ ὡς πρὸς τὰς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης παραμένει πάλιν ἡ

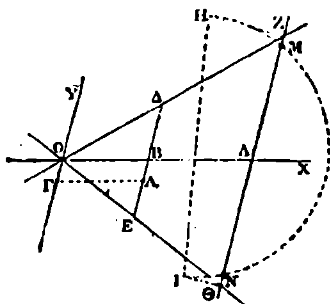
$$\frac{x^2}{\alpha'^2} - \frac{y^2}{\beta'^2} = 1,$$

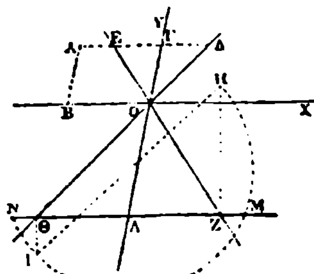
ὅπου α', β' αἱ ἀντίστοιχοι συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι.

Εὑρίσκομεν καὶ πάλιν

$$MZ \cdot M\Theta = A\Delta \cdot AE$$

καὶ ἡ κατασκευὴ τῶν σημείων Μ, Ν εἶναι πανομοιότυπος τῶν προηγουμένων (σχ. 1381 β καὶ ε).


Σχ. 1381 (β).


Σχ. 1381 (ε).

Παρατήρησις. Χρήσιμος θὰ ἦτο ἡ σύγκρισις τῆς ἀνωτέρω γεωμετρικῆς μεθόδου πρὸς τὴν τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας (*Ex. d. G. Descr.*, n[os] 123, 124), ὅπου χρησιμοποιεῖται εἷς βοηθητικὸς κῶνος.

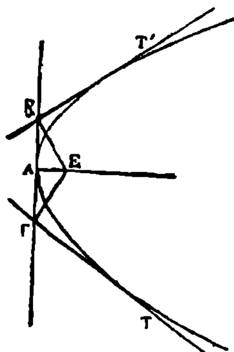
Παραβολή

Πρόβλημα 944

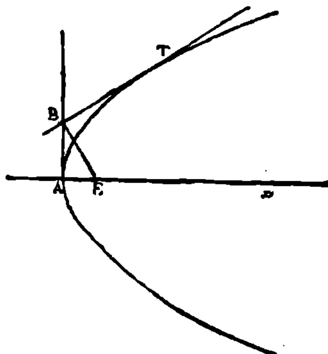
2203. Νὰ κατασκευασθῇ παραβολὴ ἐκ τῶν ἀκολούθων δεδομένων:

Τῆς ἑστίας καὶ δύο ἐφαπτομένων αὐτῆς.

Ἡ εὐθεῖα ΒΓ (Σχ. 1382), τῶν προβολῶν τῆς ἑστίας ἐπὶ τὰς



Σχ. 1382.



Σχ. 1383.

ἐφαπτομένας, εἶναι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὴν κορυφὴν καὶ ἡ ἐκ τῆς ἑστίας κάθετος ΕΑ ἐπὶ τὴν ΒΓ ὁ ἄξων τῆς καμπύλης.

Πρόβλημα 944—I

2204. Ἐκ τῆς ἑστίας, τοῦ ἄξονος καὶ μιᾶς ἐφαπτομένης.

Προβάλλομεν τὴν ἑστίαν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην (σχ. 1383) καὶ ἐκ τῆς προβολῆς Β φέρομεν κάθετον ΒΑ ἐπὶ τὸν ἄξονα. Τὸ σημεῖον Α εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς παραβολῆς.

Πρόβλημα 944—II

2205. Ἐκ τῆς διευθετούσης, ἑνὸς σημείου καὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς αὐτό.

Προβάλλομεν τὸ σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς διευθετούσης (σχ. 1384) εἰς Β καὶ λαμβάνομεν τὸ συμμετρικὸν Ε τοῦ Β πρὸς τὴν ἐφαπτομένην. Τὸ σημεῖον Ε εἶναι ἡ ἑστία τῆς παραβολῆς.

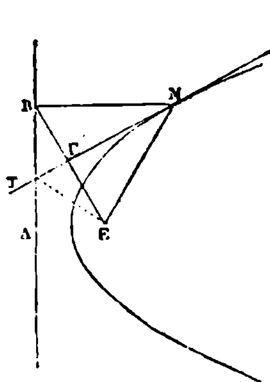
Πρόβλημα 944—III

2206. Ἐκ τῆς διευθετούσης ἢ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφὴν καὶ δύο ἐφαπτομένων.

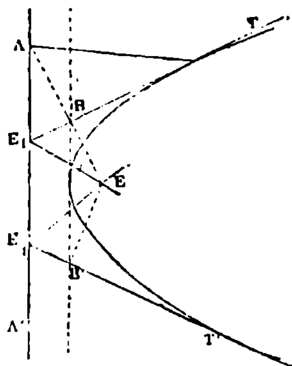
Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν (σχ. 1385), ἔστωσαν $Ε_1$ καὶ $Ε_1'$ αἱ τομαὶ τῶν δοθεισῶν ἐφαπτομένων καὶ τῆς διευθετούσης. Αἱ συμμετρικαὶ τῶν εὐθειῶν $Ε_1Λ$ καὶ $Ε_1'Λ'$ πρὸς τὰς εὐθείας Τ καὶ Τ',

ἀντιστοίχως, τέμνονται εἰς τὴν ἑστίαν Ε τῆς καμπύλης. Ἐπειδή, ὡς γνωστόν,

$$\text{γων. } TE_1Λ = TE_1E \quad \text{καὶ γων. } T'E_1'Λ' = T'E_1'E.$$



Σχ. 1384.



Σχ. 1385.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα Β, Β′ — κοινὰ τῶν δοθεισῶν ἐφαπτομένων καὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν κορυφὴν — τέμνονται εἰς τὴν ἑστίαν πάλιν τῆς παραβολῆς.

Πρόβλημα 944—IV

2207. Ἐκ τῆς ἑστίας ἢ τῆς διευθετούσης, καὶ δύο σημείων.

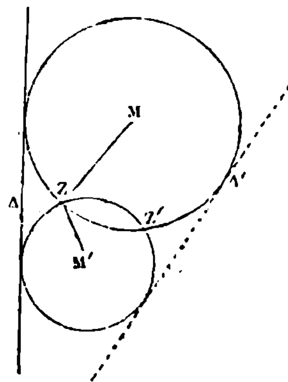
Ἐὰν δίδεται ἡ ἑστία Ζ (σχ. 1386), καθὼς καὶ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′, θὰ πρέπει νὰ φέρωμεν κοινὴν ἐφαπτομένην Δ ἢ Δ′ εἰς τὰς περιφερείας (Μ, ΜΖ) καὶ (Μ′, Μ′Ζ). Ὑπάρχουν δύο λύσεις, ἀντίστοιχοι τῶν διευθετουσῶν Δ ἢ Δ′.

Ἐὰν δίδεται ἡ διευθετοῦσα Δ, θὰ πρέπει νὰ γράψωμεν τὰς περιφερείας μὲ κέντρα τὰ Μ καὶ Μ′ καὶ ἐφαπτομένας τῆς Δ. Εὑρίσκομεν δύο λύσεις Ζ, Ζ′ μίαν ἢ καμμίαν, κατὰ τὸ πλῆθος τῶν κοινῶν σημείων τῶν δύο τούτων περιφερειῶν.

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἐπίσης καὶ τὰ ἀκόλουθα δεδομένα καὶ νὰ ἀχθῶμεν εἰς ἁπλᾶς λύσεις τῶν ἀντιστοίχων προβλημάτων:

Τὴν ἑστίαν, ἢ διευθετοῦσαν, ἓν σημεῖον καὶ μίαν ἐφαπτομένην.

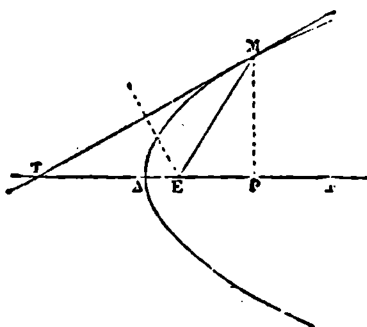
Τὴν ἑστίαν, ἓν σημεῖον καὶ τὴν κάθετον εἰς αὐτό.



Σχ. 1386.

Πρόβλημα 944—V

2208. Ἐκ τοῦ ἄξονος, ἑνὸς σημείου καὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς αὐτό.



Σχ. 1387.

Ἡ εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΜΤ (σχ. 1387) κάθετος ἐπ' αὐτὸ τέμνει τὸν ἄξονα εἰς τὴν ἑστίαν Ε (G., n° 694).

Τὸ δὲ μέσον Α τοῦ τμήματος ΤΕ εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς παραβολῆς (G., n° 699).

Ὁμοίως, ἐκ τῶν:

α) *Ἄξονος, μιᾶς καθέτου καὶ τῆς παραμέτρου.*

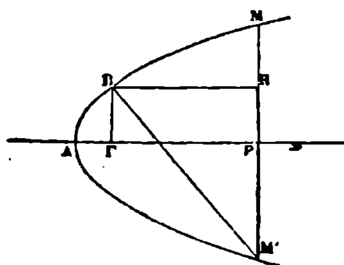
β) *Ἄξονος, ἑνὸς σημείου καὶ τοῦ μήκους τῆς εἰς αὐτὸ ὑφαπτομένης.*

γ) *Μιᾶς ἐφαπτομένης, τοῦ σημείου ἐπαφῆς, τοῦ μήκους τῆς εἰς αὐτὸ ὑφαπτομένης καὶ τῆς παραμέτρου.*

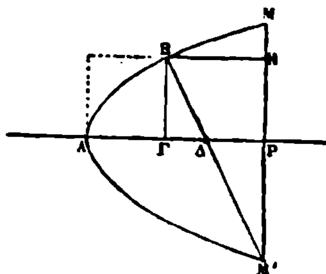
Πρόβλημα 944—VI

2209. Ἐκ τοῦ ἄξονος καὶ δύο σημείων.

Ἔστωσαν Αx, Μ καὶ Β ὁ ἄξων καὶ τὰ σημεῖα (σχ. 1388).



Σχ. 1388.



Σχ. 1389.

Ἐὰν Α εἶναι ἡ κορυφή, θὰ ἔχωμεν (ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς καμπύλης) τὴν ἀναλογίαν:

$$\frac{MP^2}{AP} = 2p = \frac{B\Gamma^2}{A\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{MP^2}{B\Gamma^2} = \frac{AP}{A\Gamma},$$

ἐξ ἧς

$$\frac{MP^2 - B\Gamma^2}{B\Gamma^2} = \frac{AP - A\Gamma = \Gamma P}{A\Gamma}.$$

Ἄρα

$$A\Gamma = \frac{\Gamma P \,.\, B\Gamma^2}{(MP + B\Gamma)(MP - B\Gamma)} = \frac{\Gamma P \,.\, B\Gamma^2}{HM' \,.\, HM}$$

μῆκος γνωστὸν καὶ εὐκόλως κατασκευάσιμον. Τὸ σημεῖον Μ' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὸν ἄξονα.

Παρατήρησις. Φθάνομεν εἰς τὴν λύσιν ταχύτερον ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι (§ 2143):

$$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΡ}} = \frac{\text{ΗΡ}}{\text{ΗΜ}} \quad \text{καὶ} \quad \text{ΑΔ} = \frac{\text{ΔΡ}\,.\,\text{ΗΡ}}{\text{ΗΜ}} \cdot$$

τετάρτη ἀνάλογος γνωστῶν μηκῶν.

Πρόβλημα 944—VII

2210. **'Εκ δύο σημείων καὶ τῶν εἰς αὐτὰ ἐφαπτομένων.**

"Εστωσαν Μ καὶ Μ' τὰ σημεῖα ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων ΜΡ καὶ Μ'Ρ (σχ. 1390). 'Η εὐθεῖα ΡΘ, ἡ συνδέουσα τὸ σημεῖον Ρ μετὰ

Σχ. 1390.

τοῦ μέσου τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα (G., n° 705).

Προβάλλομεν τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' εἰς Ε καὶ Η ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης, ἔστωσαν δὲ Β, Γ τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΡΕ καὶ ΡΗ. 'Η τομὴ τῶν εὐθειῶν ΜΒ καὶ Μ'Γ εἶναι ἡ κορυφὴ Α τῆς παραβολῆς.

Πράγματι, θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ σχήματος

$$\text{ΑΤ} = \text{ΑΟ}, \quad \text{ΑV} = \text{ΑΙ}$$

καὶ αἱ ὑφαπτόμεναι ΤΟ, VΙ θὰ διαιροῦνται εἰς δύο ἴσα μέρη ἑκάστη ὑπὸ τοῦ σημείου Α. Εἶναι, ἑπομένως, τοῦτο ἡ κορυφὴ τῆς παραβολῆς (G., n° 699).

'Εὰν δὲ φέρωμεν καὶ τὴν κάθετον Μ'Ν καὶ λάβωμεν ἑκατέρωθεν τοῦ Α τμήματα $\text{ΑΖ} = \text{ΑΔ} = \frac{\text{ΙΝ}}{2}$, τὸ σημεῖον Ζ θὰ εἶναι ἡ ἑστία τῆς παραβολῆς (G., n° 699, 2) καὶ ἡ κάθετος εἰς τὸ Δ ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ διευθετοῦσα αὐτῆς.

Πρόβλημα 945

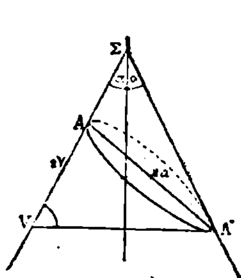
2211. Παραβολικὸν τμῆμα ΑΒΓ ἔχει ὡς βάσιν χορδὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς καμπύλης. Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη ΖΕΘ τοιαύτη, ὥστε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε νὰ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΖΘ, τοῦ περατουμένου εἰς τὴν χορδὴν ΒΓ καὶ εἰς τὴν ἐκ τοῦ Γ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῆς καμπύλης.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 318).

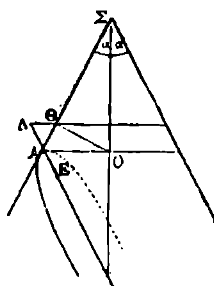
Πρόβλημα 946

2212. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον κῶνον ἐκ περιστροφῆς κατὰ δοθεῖσαν ἔλλειψιν ἢ παραβολὴν ἢ ὑπερβολήν.

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Dandelin (G., n° 843), τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὰς ἐπιπέδους τομὰς κώνου ἐκ περιστροφῆς, γνωρίζομεν ὅτι



Σχ. 1391.



Σχ. 1392.

πᾶσα ἐπίπεδος τομὴ ἑνὸς τοιούτου κώνου εἶναι *ἔλλειψις, παραβολὴ* ἢ *ὑπερβολή*.

Ἐπὶ τοῦ προκειμένου, θὰ πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν καμπύλην.

Κατὰ τὰς περιπτώσεις, δίδονται οἱ ἄξονες 2α, 2β ἢ ἡ παράμετρος p. Ἔστω 2α ἡ γωνία εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου.

1) *Ἔλλειψις* (σχ. 1391).

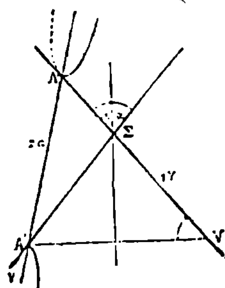
Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν τριγώνου ΑVΑ', τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς $AA' = 2\alpha$, $AV = 2\gamma = 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ (G., n° 846, n° 2) καὶ τὴν γωνίαν $V = 90^\circ - \alpha$ εἰς μοίρας.

Ὑπάρχει πάντοτε λύσις καὶ μία μόνον, ἀφοῦ $AO < AA'$ καὶ $V < 90^\circ$. Ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου τούτου ὁρίζει καὶ τὰ μήκη ΑΣ, Α'Σ ἐπὶ δύο διαμετρικῶν τοῦ κώνου γενετειρῶν, ἄρα καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, κάθετον διὰ τῆς ΑΑ' ἐπὶ τὸ ΑΣΑ'.

2) *Παραβολὴ* (σχ. 1392). Θὰ πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΘΟ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν $O = \alpha$ καὶ τὴν πλευρὰν $A\Theta = \frac{p}{2}$ (G., n° 848, 2). Τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε λύσιν καὶ μίαν μόνην.

2213. 3) *Ὑπερβολή* (σχ. 1393). Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου ΑVΑ', εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι γνωστὰ ἡ πλευρὰ ΑΑ' = 2α, ἡ ΑV $= 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2\gamma$ καὶ ἡ γωνία V $= 90^{\circ} - \alpha$ (G., nº 851, 2). Ἐπειδὴ ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας V πλευρὰ ΑΑ' = 2α εἶναι μικροτέρα τῆς ΑV = 2γ, θὰ ὑπάρχουν δύο λύσεις, μία ἢ καμμία. Θὰ πρέπει ἡ γωνία 2α νὰ εἶναι τοὐλάχιστον ἴση πρὸς τὴν γωνίαν 2φ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς δοθείσης ὑπερβολῆς (§ 2124 γ), ἐὰν δὲ ἡ γωνία αὕτη εἶναι ἴση πρὸς 2α ἡ ΑΑ' θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κώνου καὶ VΑ' = 2β.

Ἐὰν ἡ γωνία 2α εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας 2φ, θὰ ἔχωμεν πάντοτε δύο λύσεις.


Σχ. 1393.

2214. Παρατηρήσεις. 1) Δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ὁρίσωμεν τομὴν ἑνὸς κυλίνδρου διαμέτρου 2β κατὰ ἔλλειψιν μὲ ἄξονας 2α καὶ 2β < 2α.

Ὁμοίως, ἐπὶ δοθέντος κώνου δυνάμεθα πάντοτε νὰ τοποθετήσωμεν δοθεῖσαν ἔλλειψιν ἢ παραβολήν, καθὼς καὶ ὑπερβολήν, ἀλλὰ τῆς ὁποίας ἡ γωνία τῶν ἀσυμπτώτων νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν γωνίαν εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου.

Ὁ τυχὼν κῶνος περιέχει πάσας τὰς δυνατὰς ἐλλείψεις ἢ παραβολάς.

2) Διὰ τὴν σπουδὴν τῶν καμπύλων 2ου βαθμοῦ, δυνάμεθα πάντοτε νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἔλλειψις ἀνήκει εἰς κύλινδρον ἢ εἰς κῶνον ἐκ περιστροφῆς καὶ ὅτι ἡ παραβολὴ ἢ ἡ ὑπερβολὴ εἰς κῶνον ἐκ περιστροφῆς.

2214α. Σημείωσις. Ἡ *μέθοδος τοῦ Dandelin* (G., nº 843 κ. ἑ.) διὰ τὴν σπουδὴν τῶν κωνικῶν τομῶν, ὁδηγεῖ εἰς τὴν θεώρησιν τῶν *ἑστιακῶν κύκλων* ὡς πρὸς τὸν πρωτεύοντα ἄξονα τῶν καμπύλων αὐτῶν.

Διὰ τὴν ἔλλειψιν λ. χ. ἡ τομὴ (Γ) τοῦ ἐπιπέδου της ὑπὸ σφαίρας ἐφαπτομένης τοῦ κώνου καὶ ἡ ἀντίστοιχος εἰς τὴν σφαῖραν ταύτην διευθετοῦσα (τομὴ τοῦ ἐπιπέδου ἐπαφῆς τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἐλλείψεως), ἔχει τὴν ἀκόλουθον ἰδιότητα:

Ἡ ἐκ παντὸς σημείου τῆς ἐλλείψεως ἀγομένη ἐφαπτομένη πρὸς τὸν κύκλον (Γ) ἔχει λόγον σταθερὸν πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῆς διευθετούσης.

Ἀνάλογος πρότασις καὶ διὰ τὰς ἄλλας δύο κωνικὰς τομάς. Ἐὰν ἡ σφαῖρα ἐφάπτεται τοῦ ἐπιπέδου τομῆς, ὁ ἑστιακὸς κύκλος περιορίζεται φυσικὰ εἰς τὴν ἑστίαν τῆς ἐλλείψεως.

Οἱ *ἑστιακοὶ κύκλοι* τῆς ἐλλείψεως, οἱ ἀναφερόμενοι εἰς τὸν μέγαν αὐτῆς ἄξονα, εἶναι συμμετρικοί, ἀνὰ δύο, πρὸς τὸν μικρὸν ἄξονα. Ὁρίζονται δὲ ἐπίσης καὶ ἑστιακοὶ κύκλοι τῆς ἐλλείψεως ἀναφορικῶς πρὸς τὸν μικρὸν αὐτῆς ἄξονα.

Βλέπε σχετικῶς: *Notions complémentaires sur les courbes usuelles*, ὑπὸ P. Barbarin, σ. 44.

Δύο αἰῶνας πρὶν τῶν Quetelet καὶ Dandelin, εἷς ἄλλος γεωμέτρης βέλγος, ὁ Gregoire de Saint-Vincent, εἶχεν ἀποδείξει ὅτι ἡ τομὴ ἑνὸς κυκλικοῦ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου τέμνοντος τὰς δύο

αὐτοῦ χώνας εἶναι ὑπερβολὴ (§ 2124 δ)· ὁ μαρκήσιος De l'Hôpital ἠπλοποίησεν τὴν ἀπόδειξιν ταύτην. (*Mathesis*, 1904, σ. 129, ἄρθρον τοῦ A. Aubry ἐπὶ *Deux Théorèmes de Gregoire de Saint - Vincent*).

Τόπος 946—I

2214 β. Εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς τομῆς κώνου ἐκ περιστροφῆς καὶ ἐπιπέδου φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὸν κῶνον· ποῖος ὁ τόπος τῶν δευτέρων τομῶν τῶν καθέτων τούτων καὶ τοῦ κώνου;

Εἶναι κωνικὴ τομή, ἀνάλογος τῆς δοθείσης. Ὁμοίως, καὶ ἐὰν ἐθεωρῶμεν εὐθείας ἰσοκλινεῖς ἀντὶ καθέτων.

Κατὰ τὸν Terquem, ἡ ἐπιφάνεια τῶν καθέτων τούτων εἶναι ἕκτου βαθμοῦ.

Τόπος 946—II

2214 γ. Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δοθέντος σημείου καὶ ἀπὸ δοθείσης εὐθείας εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς λ, εἶναι κωνικὴ τομή.

Ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι ἔλλειψις ἢ ὑπερβολὴ ἢ παραβολὴ ἐὰν $\lambda < 1$ ἢ $\lambda > 1$ ἢ $\lambda = 1$, ἀντιστοίχως.

Θεωρήματα. Ἡ ἔλλειψις καὶ ὑπερβολὴ ἔχουν δύο διευθετούσας ἑκάστη, καθέτους ἐπὶ τὸν ἑστιακὸν ἄξονα καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν καμπύλων κειμένας.

Σχετικῶς, δύναταί τις νὰ συμβουλευθῇ τὰ ἀκόλουθα συγγράμματα:

Cours de Géométrie élémentaire, ὑπὸ F. G. - M., nos 988 - 991 καὶ 1068 - 1071.

Éléments de Géométrie, ὑπὸ A. Amiot, ἀναθεωρηθέντα ὑπὸ F. Vintejoux, 1897, σ. 447 - 450 καὶ 467 - 469.

Traité de Géométrie, ὑπὸ Rouché καὶ Comberousse, 7η ἔκδοσις, nos 1079 - 1088.

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ *θεώρημα τοῦ* Dandelin ἄγει εὐκόλως εἰς τὴν σπουδὴν τῶν *διευθετουσῶν* τῶν κωνικῶν τομῶν.

2) Θεωρῶν τὴν ἔλλειψιν ὡς ὀρθογώνιον προβολὴν κύκλου, ὁ de Courcelles καθορίζει τὰς ἑστίας τῆς καμπύλης· ἀναλόγως εἰργάσθη καὶ ὁ Juhel-Rénoy διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν διευθετουσῶν (*N. A.*, 1905, σ. 543).

Ἕλιξ

Πρόβλημα 947

2215. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου κυκλικῆς ἕλικος συναρτήσει τῆς ὁριζοντίας προβολῆς αὐτοῦ [τοῦ ἀντιστοίχου τόξου τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐφ' οὗ κεῖται] καὶ

1) Τῆς διαφορᾶς τῶν τεταγμένων τῶν ἄκρων αὐτοῦ.

2) Τοῦ βήματος τῆς ἕλικος.

3) Τῆς σταθερᾶς γωνίας τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης μετὰ τῶν γενετειρῶν τοῦ κυλίνδρου.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ τὸ ἑπόμενον λύομεν εὐκόλως, θεωροῦντες τὴν ἐπίπεδον γωνίαν τῆς ὁποίας ἡ *πτύξις* ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου παράγει τὴν ἕλικα.

1) Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς καμπύλης, τοξ. VP = υρ, τοξ. NM = νμ, κ.λ.π. Καὶ ἐπειδὴ

$$\nu\mu = \sqrt{(\nu\gamma)^2 + ((\rho\mu) - (\nu\upsilon))^2},$$

ἕπεται $$\widehat{NM} = \sqrt{\widehat{\text{ΥP}}^2 + (\text{MP} - \text{NΥ})^2}.$$

2) Τὸ βῆμα AB ἢ α'β τῆς ἕλικος παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ h (σχ. 1395). Ἔχομεν

$$\frac{(\mu\gamma)}{h} = \frac{(\upsilon\rho)}{(\alpha\alpha')}.$$

(μγ) εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν τεταγμένων τῶν σημείων M καὶ N, $\alpha\alpha' = 2\pi R$. Ἄρα

$$(\mu\gamma)^2 = \frac{h^2 . (\upsilon\rho)^2}{(2\pi R)^2}$$

Σχ. 1394.

καὶ $$\widehat{MN} = \sqrt{\widehat{\text{ΥP}}^2 + \frac{h^2 . (\widehat{\text{ΥP}})^2}{4\pi^2 R^2}}$$

ἢ $$\widehat{MN} = \widehat{\text{ΥP}} \sqrt{1 + \frac{h^2}{4\pi^2 R^2}}.$$

3) Ἔστω Φ ἡ σταθερὰ γωνία βαα'. Εἶναι

Σχ. 1395.

$$\frac{(\nu\gamma)}{(\nu\mu)} = \text{συν}\,\varphi, \quad (\nu\mu) = \frac{(\nu\gamma)}{\text{συν}\,\varphi}$$

Ἄρα: $$\widehat{NM} = \frac{\widehat{\text{ΥP}}}{\text{συν}\,\varphi}.$$

Πρόβλημα 948

2216. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης:

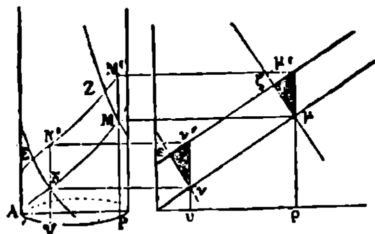
1) Μεταξὺ ἑνὸς τόξου τῆς ἕλικος, τῶν τεταγμένων τῶν ἄκρων αὐτοῦ καὶ τῆς ὁριζοντίας προβολῆς του.

2) Μεταξὺ δύο γενετειρῶν τοῦ κυλίνδρου καὶ τῶν τόξων ΝΜ, Ν′Μ′ δύο ἑλίκων τοῦ αὐτοῦ βήματος.

3) Μεταξὺ τῶν τόξων τῶν δύο προηγουμένων ἑλίκων τοῦ αὐτοῦ βήματος καὶ τῶν τόξων ΝΕ, ΜΖ δύο ἄλλων ἑλίκων καθέτων ἐπὶ τὰς πρώτας (Σχ. 1396).

1) $$\text{Ἐμβαδὸν } \mu\rho\upsilon\nu = \frac{(\rho\mu)+(\upsilon\nu)}{2}\,.\,(\upsilon\rho)\cdot \text{ ἄρα:}$$

$$\text{ἐμβαδὸν } \mathrm{MPNY} = \frac{\mathrm{PM}+\mathrm{YN}}{2}\,.\,\overset{\frown}{\mathrm{YP}}$$



Σχ. 1396.

2) Αἱ ἕλικες τοῦ αὐτοῦ βήματος εἶναι παράλληλοι καὶ παράγονται ἐκ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν νμ, ν′μ′. Εἶναι δὲ

$$(\nu\nu'\mu\mu') = (\upsilon\rho)\,.\,(\mu\mu')\cdot$$

$$\text{ἄρα } (\mathrm{NN'MM'}) = \overset{\frown}{\mathrm{YP}}\,.\,\mathrm{MM}$$

3) Αἱ ἕλικες, αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς δύο πρώτας, παράγονται ἐξ' εὐθειῶν εν, ζμ καθέτων ἐπὶ τὰς νμ καὶ ν′μ′.

Εἶναι δὲ

$$(\varepsilon\nu\mu\zeta) = (\mu\nu)\,.\,(\zeta\mu) = (\nu\nu'\mu\mu') = (\upsilon\rho)\,.\,(\mu\mu')\cdot$$

$$\text{ἄρα} \qquad (\mathrm{ENZM}) = \overset{\frown}{\mathrm{YP}}\,.\,\mathrm{MM'}.$$

2216 α. Σημείωσις. Εἰς τὸ *Appendice aux Exercices de Géométrie* (1877) περιέχονται διάφοροι ἀσκήσεις σχετικαὶ πρὸς τὴν ἕλικα (nos 868 καὶ 876).

Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ μιᾶς κυλινδρικῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας, ὀρθῆς τομῆς τοῦ κυλίνδρου καὶ ἑνὸς ἑλικοειδοῦς καθέτου [μὲ γενετείρας καθέτους] ἐπὶ τὸν ἄξονα, εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀντιστοίχου κυλινδρικοῦ τομέως [142].

Ἡ ἐξίσωσις τῆς προβολῆς ἕλικος, βήματος λ, ἐπὶ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου εἶναι

$$y = \eta\mu\left(x\,.\,\frac{2\pi}{\lambda}\right)\cdot$$

Διὰ $\lambda = 2\pi$, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς συνήθους ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης.

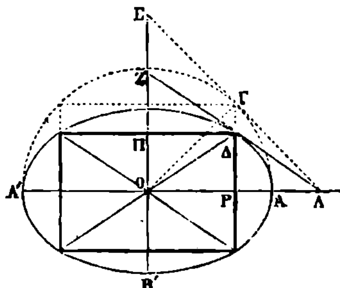
---

142. Σημ. μετ. Μὲ βάσιν τὸν τομέα ΑΟΒ τῆς τομῆς (Τ), τὸν ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς τομῆς ΟΑ τοῦ ἑλικοειδοῦς καὶ τῆς (Τ) καὶ τῆς προβολῆς ΟΒ τῆς τελευταίας γενετείρας ΟΓ τοῦ ἑλικοειδοῦς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Τ), καὶ ὕψος τὴν ἀπόστασιν τῆς ΟΓ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου (Τ).

Μέγιστα καὶ Ἐλάχιστα

Πρόβλημα 949

2217. Ποῖον τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ἐγγραφομένων εἰς ἔλλειψιν ὀρθογωνίων;



Σχ. 1397.

Ἡ θεώρησις τοῦ πρωτεύοντος κύκλου δεικνύει ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ἔχον διαγωνίους τὰς ἴσας συζυγεῖς διαμέτρους τῆς ἐλλείψεως.

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι, διὰ τὴν κατασκευὴν αὐτοῦ, θὰ πρέπει νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην ΛΔΖ τῆς ἐλλείψεως τοιαύτην ὥστε ΔΖ = ΔΛ. Ἀναγόμενοι εἰς τὸν πρωτ. κύκλον εὑρίσκομεν ὅτι θὰ εἶναι

$$ΓΛ = ΓΕ = ΟΓ = α$$

καὶ

$$ΟΛ = α . \sqrt{2}, \quad ΟΖ = β\sqrt{2}.$$

Πρόβλημα 950

2218. Δοθείσης ἐλλείψεως, νὰ ἀχθοῦν δύο παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν διάμετρον, ἴσον ἀπέχουσαι αὐτῆς καὶ τοιαῦται, ὥστε τὸ εἰς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦν ἐγγεγραμμένον παραλληλόγραμμον νὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην περίμετρον.

(βλ. *Μέθοδοι*, § 339).

Πρόβλημα 951

2219. Ποῖον τὸ μέγιστον καὶ ποῖον τὸ ἐλάχιστον ἐκ τῶν περιγραφομένων εἰς ἔλλειψιν ὀρθογωνίων;

Ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν, τῶν περιγεγραμμένων εἰ[illegible]ν, εἶναι ὁ *κύκλος τοῦ* Monge, ὁμόκεντρος τῆς ἐλλείψεω[illegible] ἀκτῖνος $\sqrt{α^2 + β^2}$ (§ 2094). Ἑπομένως:

1[illegible] ὁ εἰς τὸν κύκλον τοῦτον μέγιστον ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον [illegible]ναι τὸ τετράγωνον. Τὸ περιγεγραμμένον κατὰ συνέπειαν εἰς τὴν [illegible]λειψιν τετράγωνον εἶναι τὸ μέγιστον τῶν περιγραφομένων εἰς αὐτὴν ὀρθογωνίων.

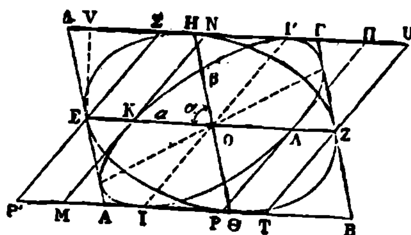
Αἱ κορυφαὶ τοῦ τετραγώνου τούτου κεῖνται ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ἀξόνων, τὸ ἥμισυ δὲ τῆς διαγωνίου του εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα $ρ = \sqrt{α^2 + β^2}$. Ἡ ἐπιφάνειά του ἄρα εἶναι $2.(α^2 + β^2)$.

2) Ἐκ τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸν κύκλον τοῦ Monge ὀρθογωνίων, ἐκεῖνο εἶναι τὸ μικρότερον, διὰ τὸ ὁποῖον αἱ προσκείμεναι πλευραί του διαφέρουν περισσότερον ἀπ' ἀλλήλων· ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αὐτῶν εἶναι σταθερόν. Εἶναι κατ' ἀκολουθίαν τὸ ζητούμενον ἐλάχιστον ὀρθογώνιον τὸ ἐπὶ τῶν ἀξόνων τῆς ἐλλείψεως κατασκευαζόμενον, μὲ ἐπιφάνειαν $2α . 2β = 4αβ$.

Πρόβλημα 952

2220. **Εἰς δοθὲν παραλληλόγραμμον νὰ ἐγγραφῇ ἡ μεγίστη ἔλλειψις.**

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ παραλληλόγραμον, ΕΖ, ΘΗ αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του εὐθεῖαι. Ἂν ΙΚΙ'Λ εἶναι μία τυχοῦσα ἔλλειψις ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ παραλληλόγραμμον, ἡ χορδὴ τῶν ἐπαφῶν ΙΙ' διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο τῆς καμπύλης καὶ εἶναι διάμετρος αὐτῆς.



Σχ. 1338.

Ἔστωσαν Κ, Λ τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς εὐθείας ΕΖ. Ἡ εὐθεῖα ΚΟΛ εἶναι ἡ συζυγὴς διάμετρος τῆς ΙΙ', ἐπειδὴ αἱ ἐφαπτόμεναι ΜΝ, ΡΠ, αἱ ἀγόμεναι παραλλήλως τῆς ΙΙ', θὰ πρέπει νὰ διαιρῶνται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τῆς χορδῆς τῶν ἐπαφῶν (§ 2071)· ἡ δὲ εὐθεῖα ΕΖ—τόπος τῶν μέσων ὅλων τῶν τεμνουσῶν, αἵτινες περατοῦνται εἰς τὰς παραλλήλους ΑΒ καὶ ΓΔ — θὰ περιέχῃ τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως ταύτης εἶναι π.ΟΚ.ΟΙ'.ημ φ, ὅπου φ ἡ γωνία τῶν συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων ΟΚ καὶ ΟΙ', ἐνῶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιγεγραμμένου παραλληλογράμμου, τοῦ ἔχοντος πλευρὰς παραλλήλους πρὸς τὰς διαμέτρους ταύτας, εἶναι 4ΟΚ.ΟΙ'.ημ φ. Εἶναι λοιπὸν ὁ λόγος τῆς ἐλλειπτικῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν τοῦ παραλληλογράμμου σταθερὸς καὶ ἴσος πρὸς $\frac{\pi}{4}$ καὶ

Ἑπομένως:

Ἡ μεγίστη ἔλλειψις εἶναι ἐκείνη διὰ τὴν ὁποίαν αἱ ΕΖ *καὶ* ΘΗ *εἶναι συζυγεῖς διάμετροι.*

Πράγματι:

$$\text{Ἐμβ. ἐλλείψεως } (ΕΖ,\ ΗΘ) = \frac{\pi}{4}\,(ΑΒΓΔ) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\,(ΤΥΣΡ') > \frac{\pi}{4}\,(ΡΠΝΜ) = \text{Ἐμβ. ἐλλείψεως } (ΙΙ',\ ΚΛ).$$

Παρατήρησις. Ὡς εἴδομεν, ἡ μεγίστη ἔλλειψις εἶναι ἐφαπτομένη τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου εἰς τὰ μέσα αὐτῶν. Ἂν 2α, 2β εἶναι τὰ μήκη αὐτῶν, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψως ταύτης εἶναι

$$\pi\alpha\beta \;\eta\mu\, \alpha = \pi\alpha \,.\, ΕV,$$

ὅπου ΕV τὸ ἥμισυ τοῦ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἢ ΓΔ ὕψους τοῦ παραλληλογράμμου.

Πρόβλημα 953

2221. **Διὰ δοθέντος σημείου Α ἐπὶ τῶν ἀξόνων ἐλλείψεως ἢ τῶν προεκτάσεων αὐτῶν, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΑΒΓ τῆς καμπύλης εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τρίγωνον ΟΒΓ νὰ εἶναι τὸ μέγιστον [διὰ τὰς ἐκ τοῦ Α τεμνούσας].**

Ἀρκεῖ νὰ ἀναφερθῶμεν εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 1696. Ἡ προ-

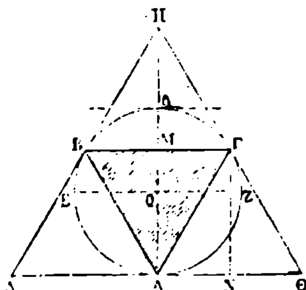
βολὴ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐλλείψεως τοῦ μεγίστου τριγώνου Β'ΟΓ' διὰ τὸν πρωτεύοντα αὐτῆς κύκλον δίδει τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΒΟΓ.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον Β'ΟΓ' εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Ο, αἱ πλευραὶ ΟΒ, ΟΓ τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὸ τριγώνου ΒΟΓ εἶναι συζυγεῖς ἡμιδιάμετροι.

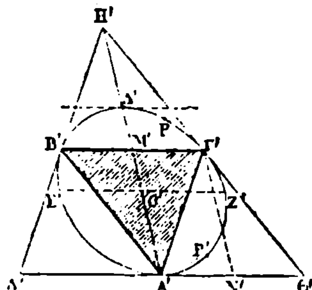
Πρόβλημα 954

2222. 1) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθεῖσαν ἔλλειψιν τὸ μέγιστον τρίγωνον, ἐκ τῶν ἐχόντων μίαν κορυφὴν δοθὲν σημεῖον τῆς καμπύλης.

2) Ποῖος ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν βάσεων τῶν ἐγγεγραμμένων τριγώνων καὶ ἰσοδυνάμων πρὸς τὸ προηγούμενον μέγιστον τρίγωνον;



Σχ. 1399



Σχ. 1400.

1) Ἐπειδὴ ὁ λόγος δύο ἀντιστοίχων τριγώνων εἰς τὰ ἐπίπεδα τοῦ πρωτεύοντος κύκλου καὶ τῆς ἐλλείψεως εἶναι σταθερὸς $\frac{\beta}{\alpha}$, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου τριγώνου ἐκ τῶν ἐγγραφομένων εἰς ἔλλειψιν εἶναι γινόμενον τοῦ λόγου $\frac{\beta}{\alpha}$ ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου τριγώνου ἐκ τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸν κύκλον. Ἑπομένως:

$$\text{Μέγιστον τρίγωνον εἰς τὴν ἔλλειψιν} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\alpha\beta\sqrt{3}}{4}$$

ἀφοῦ τὸ μέγιστον εἰς τὸν κύκλον τρίγωνον εἶναι, ὡς γνωστόν, τὸ ἰσόπλευρον.

Ἡ σύγκρισις τῶν σχημάτων 1399 (εἰς τὸν κύκλον) καὶ 1400 (εἰς τὴν ἔλλειψιν) ἀρκεῖ διὰ νὰ ὁδηγηθῶμεν εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ζητουμένου μεγίστου τριγώνου εἰς τὴν ἔλλειψιν, τοῦ ἔχοντος κορυφὴν Α' (ἀντίστοιχον τοῦ Α εἰς τὸν κύκλον).

Διὰ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ κ.λ.π. εἰς τὸν κύκλον, ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΛΘ, ΟΜ = ΜΔ, ΗΓ = ΓΘ. Διὰ τὴν κατασκευὴν ἑπομένως τοῦ ζητουμένου μεγίστου τριγώνου Α'Β'Γ', φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην Λ'Α'Θ' εἰς τὸ σημεῖον Α' τῆς ἐλλείψεως, τὴν διάμετρον Α'ΟΔ' αὐτῆς καὶ διὰ τοῦ μέσου Μ' τῆς ἡμιδιαμέτρου Ο'Δ' παράλληλον χορδὴν Β'Γ' πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς Α'.

Θὰ ἠδυνάμεθα ἐπίσης νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ἀφοῦ ἡ ἐφαπτο-

μένη Η'Γ'Θ' διχοτομεῖται εἰς τὸ Γ', τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' κατ' ἀνάγκην θὰ εἶναι τὸ μέγιστον. Ἐπειδὴ εἶναι αὐτὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον Α'Ν'Γ'Μ' καὶ τοῦτο τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ἐχόντων μίαν κορυφὴν ἐπὶ τῆς καμπύλης καὶ τὰς πλευρὰς του παραλλήλους πρὸς τὰς Α'Θ' καὶ Α'Η' (§§ 359, 360).

2) Ἐπειδὴ τὸ μέσον Μ' τῆς πλευρᾶς Β'Γ' τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' εἶναι καὶ μέσον τῆς ἡμιδιαμέτρου Ο'Δ', τὴν ἰδιότητα δὲ ταύτην ἔχουν προφανῶς καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου, εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων Μ' εἶναι ἔλλειψις ὁμοιόθετος τῆς δοθείσης καὶ ὁμόκεντρος αὐτῆς.

2223. *Ἄλλαι παρατηρήσεις.* 1) Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον Θ'Η'Λ' εἶναι τὸ ἐλάχιστον ἐκ τῶν περιγραφομένων εἰς τὴν δοθεῖσαν ἔλλειψιν (§ 369)· καὶ ἐπειδὴ

$$ΑΟ = \frac{1}{3}ΑΗ, \quad ΔΗ = ΔΟ \quad (σχ. 1399)$$

καὶ

$$Δ'Η' = Δ'Ο' \quad (σχ. 1400)$$

ἕπεται ὅτι ὁ τόπος τῶν κορυφῶν Η' τῶν περιγεγραμμένων τριγώνων ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ εἶναι ἔλλειψις, ὁμόκεντρος καὶ ὁμοιόθετος, ὡς καὶ ἡ προηγουμένη, τῆς δοθείσης.

2) Θεωροῦντες τὴν ἔλλειψιν ὡς προβολὴν κύκλου, ἐπιλύομεν εὐκόλως προβλήματα μεγίστου ἢ ἐλαχίστου, ἀναφερόμενα εἰς ἐμβαδὰ ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων σχημάτων εἰς τὴν ἔλλειψιν. Ἀντικαθιστῶμεν δύο διαμέτρους ὀρθογωνίους εἰς τὸν κύκλον διὰ ζεύγους συζυγῶν διαμέτρων εἰς τὴν ἔλλειψιν, διάμετρον καὶ κάθετον ἐπ' αὐτὴν χορδὴν εἰς τὸν κύκλον διὰ διαμέτρου καὶ χορδῆς παραλλήλου πρὸς τὴν συζυγῆ τῆς πρώτης διαμέτρου, κ.λ.π.

3) Ὁ κυκλικὸς τομεὺς ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐλλειπτικὸν τομέα καὶ τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγραφόμενον ὀρθογώνιον εἰς παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ ἐλλειπτικοῦ τομέως, ἐνῶ αἱ ἄλλαι δύο παράλληλοι πρὸς τὴν συζυγῆ διεύθυνσιν τῆς χορδῆς ταύτης, δηλ. πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τὸ κέντρον τῆς ἐλλείψεως μετὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς εὐθεῖαν.

2223 α. **Σημείωσις.** Ἐπανερχόμενοι καὶ πάλιν εἰς τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς ἔλλειψιν τρίγωνα ΑΒΓ μεγίστου ἐμβαδοῦ, δυνάμεθα νὰ ἀχθῶμεν εἰς τὰ ἑπόμενα συμπεράσματα (κατὰ τὸν E. Malo, *I.d.M.*, 1911, σ. 44).

Τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν τὸ αὐτὸ κ. βάρους G μετὰ τῆς ἐλλείψεως.

Τὸ ὀρθόκεντρον Η ἑκάστου αὐτῶν εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν εἰς τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, καθέτων τῆς ἐλλείψεως. Τοῦτο εἶναι φανερόν, ἀφοῦ ἡ πλευρὰ ΒΓ λ.χ. εἶναι συζυγὴς κατὰ διεύθυνσιν, ὡς εἴδομεν, τῆς ἡμιδιαμέτρου ΟΑ, ἄρα παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς Α· κατὰ συνέπειαν, τὸ ἐκ τοῦ Α ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ἐπὶ τὴν ἔλλειψιν.

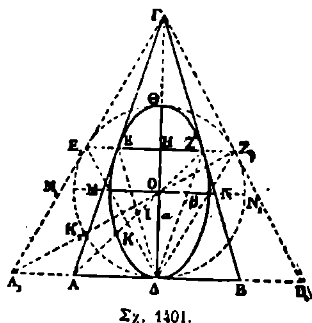
Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὸ κέντρον βάρους G αὐτοῦ διαιρεῖ κατὰ λόγον 1 : 2 τὸ τμῆμα τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ ὀρθοκέντρου Η καὶ τοῦ κέντρου Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

Τέλος, τὸ ὀρθόκεντρον Η εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας διὰ τὴν ὁποίαν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι αὐτοπολικόν· τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος ταύτης εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς δυνάμεως τοῦ ὀρθοκέντρου Η πρὸς τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν (Ο) εἰς τὸ τρίγωνον.

Πρόβλημα 955

2224. Εἰς δοθὲν τυχὸν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ἡ μεγίστη ἔλλειψις.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀντιστρόφου προβλήματος: *Νὰ περιγραφῇ τὸ ἐλάχιστον τρίγωνον εἰς δοθεῖσαν ἔλλειψιν*, θὰ συναγάγωμεν σχέσεις μεταξὺ τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ζητουμένης ἐλλείψεως τοῦ πρώτου προβλήματος.



Σχ. 1401.

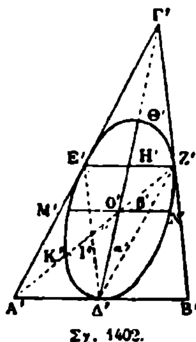
1) Διὰ τὴν περιφέρειαν $ΔE_1Z_1$ (σχ. 1401), τὸ ἐλάχιστον περιγεγραμμένον τρίγωνον εἶναι τὸ ἰσόπλευρον $ΓA_1B_1$. Ἐὰν λοιπὸν ζητῶμεν τὸ ἐλάχιστον περιγεγραμμένον εἰς τὴν ἔλλειψιν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἕνα τῶν ἀξόνων, λ. χ. τὸν μέγαν ἄξονα, τοῦτο θὰ εἶναι τὸ ἰσοσκελὲς ΑΒΓ. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν λόγον τῶν ἐμβαδῶν τοῦ κύκλου καὶ τοῦ τριγώνου $ΓA_1B_1$ (§ 200). Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐλάχιστον περιγεγραμμένον εἰς τὴν ἔλλειψιν τρίγωνον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὴν καὶ ἀφ' ἑτέρου γνωρίζομεν ὅτι (§ 2222):

$$OH = HΘ, \quad ΔH = HΓ,$$

θὰ ἔχωμεν, συναρτήσει τῆς $OΔ = α$:

$$ΔH = \frac{3α}{2}, \quad ΔΓ = 3α, \quad ΓΘ = ΘO = α.$$

2) Αἱ αὐταὶ σχέσεις [μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν καὶ μηκῶν (§ 200)] ὑφίσταται ἐὰν μετασχηματίσωμεν τὸ σχῆμα 1401, κλίνοντες πάσας τὰς τεταγμένας αὐτοῦ κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν (σχ. 1402). Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ συναγάγωμεν τὰ ἀκόλουθα συμπεράσματα:



Σχ. 1402.

Διὰ τὸ τυχὸν τρίγωνον Α'Β'Γ', ἡ μεγίστη ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτὸ ἔλλειψις ἔχει μίαν τῶν διαμέτρων της Δ'Θ' ἴσην πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου Γ'Δ' τοῦ τριγώνου καὶ κειμένην ἐπ' αὐτῆς. Ἡ εὐθεῖα Ε'Ζ', τῶν μέσων τῶν πλευρῶν Γ'Α', Γ'Β' εἶναι χορδὴ ἐπαφῶν καὶ συζυγὴς κατὰ διεύθυνσιν, τῆς διαμέτρου Δ'Θ', τὸ δὲ κέντρον Ο' τῆς ἐλλείψεως εἶναι τὸ κ. βάρους τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

Ὁμοίως, ἡ Κ'Ζ' εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου Α'Ζ' καὶ διάμετρος τῆς ἐλλείψεως.

Ἀφ' ἑτέρου, εἰς τὸν κύκλον ἔχομεν (Σχ. 1401):

$$E_1Z_1 = α\sqrt{3} = OM_1\sqrt{3},$$

καὶ ἑπομένως διὰ τὴν ἔλλειψιν τοῦ ἰδίου σχήματος

$$EZ = OM\sqrt{3} = \beta\sqrt{3}, \quad \beta = \frac{EZ}{\sqrt{3}},$$

καὶ ὁρίζεται οὕτω τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου ΜΝ, συζυγοῦς τῆς ΔΘ.

Αἱ αὗται σχέσεις ἰσχύουν διὰ τὰ ἀντίστοιχα μεγέθη εἰς τὸ σχῆμα 1402. Θὰ ἔχωμεν:

$$M'O' = \beta' = \frac{E'Z'}{\sqrt{3}}.$$

Ἡ γωνία τῶν συζυγῶν διαμέτρων εἶναι ἡ γωνία τῆς διαμέσου Γ'Δ' μετὰ τῆς βάσεως Α'Β' τοῦ τριγώνου.

2224 α. *Παρατήρησις.* Δι' ἐπαλήθευσιν, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ περιγεγραμμένου τριγώνου καὶ νὰ συγκρίνωμεν αὐτὰ πρὸς τὰ ἐμβαδὰ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ περὶ αὐτὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Οἱ ἀντίστοιχοι λόγοι θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴσοι.

1) (Σχ. 1401). Ἐπειδὴ

$$\Gamma = \text{Ἐμ. κύκλου} = \pi\alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad E = (\Gamma A_1 B_1) = \frac{9\alpha^2}{\sqrt{3}}$$

ἕπεται

$$\frac{\Gamma}{E} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2) (Σχ. 1402). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως εἶναι

$$\Gamma' = \pi\alpha'\beta' \;\text{ημ}\,\varphi, \qquad [\,\varphi = (\widehat{A'B', \Delta'\Gamma'})\,]$$

τοῦ δὲ τριγώνου τὸ ἐμβαδόν, συναρτήσει τῆς πλευρᾶς Α'Β' καὶ τῆς ἐπ' αὐτὴν διαμέσου Γ'Δ', εἶναι

$$E' = \frac{1}{2}\,A'B'\,.\,\Delta'\Gamma'\,.\,\text{ημ}\,\varphi$$

ἀφοῦ $\upsilon_{\Gamma'} = \Delta'\Gamma'\,.\,\text{ημ}\,\varphi$. Ἀλλ' εἶναι ἐκ τοῦ σχήματος:

$$A'B' = 2.\ E'Z' = 2\beta'\sqrt{3},$$

$$\Gamma'\Delta' = 3\alpha'.$$

Ἐπομένως:

$$\frac{\Gamma'}{E'} = \frac{\pi\alpha'\beta'\;\text{ημ}\,\varphi}{\frac{1}{2}\cdot 2\beta'\sqrt{3}.3\alpha'} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} = \frac{\Gamma}{E}.$$

Πρόβλημα 955—I

***2224 β.* Ποία ἡ περιβάλλουσα τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους Θ καὶ ἐγγεγραμμένων εἰς δοθεῖσαν ἔλλειψιν;**

Θεωροῦντες τὸν πρωτεύοντα κύκλον τῆς ἐλλείψεως καὶ τὸ ἀντίστοιχον τοῦ Θ σημεῖον Θ', ἀναγνωρίζομεν ὅτι ὑπάρχει ἀπειρία τριγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον τοῦτον καὶ ἐχόντων τὸ

αὐτὸ κέντρον βάρους Θ' (§ 2185 β). Αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων τούτων ἐφάπτονται μιᾶς ἐλλείψεως, ἥτις εἶναι ἐκείνη τῆς § 130, 3 Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν προφανῶς καὶ τὸ αὐτὸ ὀρθόκεντρον Η (§ 1119).

Ἐπανερχόμενοι εἰς τὴν ἔλλειψιν, διαπιστοῦμεν ἀμέσως ὅτι ἡ ζητουμένη περιβάλλουσα εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ἐλλείψεως ταύτης ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς δοθείσης ἐλλείψεως.

Θεώρημα 955—II

2224 γ. **Ὑπάρχει ἀπειρία τριγώνων ἐγγεγραμμένων εἰς δοθεῖσαν ἔλλειψιν (Ε) καὶ ἐχόντων ὀρθόκεντρον μίαν ἑστίαν Ε τῆς καμπύλης. Ἡ περιβάλλουσα τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι ἄλλη ἔλλειψις (Θ), ἔχουσα τὴν αὐτὴν ἑστίαν Ε καὶ τὰς αὐτὰς διευθύνσεις πρωτευόντων ἀξόνων μετὰ τῆς δοθείσης.**

Θεωρήσωμεν κῶνον (Κ) ἐκ περιστροφῆς περιγεγραμμένον εἰς τρισορθογώνιον τρίεδρον στερεὰν γωνίαν. Οὗτος δύναται νὰ τμηθῇ κατὰ ἔλλειψιν (Ε) ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν (§ 2212), ὁπότε ἡ μία τῶν ἑστιῶν αὐτῆς Ε θὰ εἶναι προβολὴ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) τῆς τομῆς τῆς κορυφῆς Σ τοῦ κώνου. (G., n° 855).

Ἔστωσαν Α, Β, Γ αἱ τομαὶ τῶν ἀκμῶν τῆς τριέδρου καὶ τῆς ἐλλείψεως. Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ προβολαὶ τῶν ἀκμῶν ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) τῆς τομῆς θὰ εἶναι τὰ ὕψη τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν τριγώνου ΑΒΓ καὶ θὰ τέμνωνται εἰς τὴν ἑστίαν αὐτῆς Ε καὶ προβολὴν τῆς κορυφῆς Σ. Ἐὰν δὲ στρέφωμεν τὸ τρίεδρον Σ περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κώνου, εἰς ἑκάστην θέσιν αὐτοῦ αἱ προβολαὶ τῶν ἀκμῶν του ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) θὰ εἶναι πάντοτε ὕψη τῶν λαμβανομένων ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν ἔλλειψιν τριγώνων καὶ θὰ τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ε.

Ἔστω τώρα (Ι) ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίεδρον κῶνος ἐκ περιστροφῆς (ὁμοαξονικὸς τοῦ (Κ)· ὁ κοινός των ἄξων εἶναι ἡ διαγώνιος κύβου μὲ μίαν στερεὰν γωνίαν τὴν Σ).

Ἡ τομὴ τοῦ κώνου τούτου μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (Π) θὰ εἶναι μία σταθερὰ ἔλλειψις (Θ), ἐφαπτομένη τῶν πλευρῶν τῶν διαφόρων τριγώνων ΑΒΓ, τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὴν ἔλλειψιν (Ε) καὶ τῶν ὁποίων τὰ ὕψη εἶναι προβολαὶ τῶν ἀκμῶν τοῦ περιστρεφομένου τριέδρου περὶ τὸν κοινὸν ἄξονα τῶν δύο κώνων.

Ἐπειδὴ εἰς ἑκάστην θέσιν τοῦ κινητοῦ τριέδρου, τοῦτο παραμένει πάντοτε περιγεγραμμενον εἰς τὸν (Ι) καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν (Κ) κῶνον.

Αἱ δύο ἐλλείψεις (Ε) καὶ (Θ) ἔχουν βεβαίως τὸν αὐτὸν πρωτεύοντα ἄξονα, ὡς τομαὶ δύο ὁμοαξονικῶν κώνων ἐκ περιστροφῆς ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Π)· ἔχουν δὲ καὶ τὴν αὐτὴν ἑστίαν Ε, ὡς ἐκ τοῦ προμνησθέντος θεωρήματος ἐν G., n° 855. Ἐπίσης καὶ θεώρημα § 287.

Πρόβλημα 956

2225. **Νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον εἰς δοθὲν παραβολικὸν τμῆμα· τὸ τετράπλευρον πρέπει νὰ ἔχῃ δύο κορυφὰς ἐπὶ τῆς καμπύλης καὶ τὰς δύο ἄλλας ἐπὶ τῆς χορδῆς τοῦ τμήματος.**

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τμῆμα· ἡ ἐφαπτομένη, ἡ ἀγομένη παραλλήλως

τῆς χορδῆς, ὁρίζει τὴν διάμετρον ΑΔ, διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς χορδῆς τῆς παραβολῆς — ἥτις, ἄλλωστε, εἶναι ἡ ἑνοῦσα τὸ μέσον Θ τυχούσης χορδῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ μετὰ τοῦ μέσου Δ.

Σχ. 1403.

Τὸ μέγιστον παραλληλόγραμμον ΕΙΚΖ, ἄρα καὶ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον ΜΝΕΖ, λαμβάνεται, κατὰ τὰ ἐν § 360, δι' ἀγωγῆς ἐφαπτομένης ΗΕΛ διχοτομουμένης εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε. Καὶ ἐπειδὴ θὰ εἶναι τότε

$$\text{ΑΗ} = \text{ΑΘ} \ (\S\ 318) \quad \text{καὶ} \quad \text{ΘΗ} = \text{ΘΔ},$$

ἀφοῦ ΕΗ = ΕΛ, ἔπεται ὅτι θὰ ἔχωμεν

$$\text{ΑΘ} = \frac{1}{3}\text{ΑΔ}.$$

Εὑρίσκεται κατὰ συνέπειαν τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον, ἐὰν εἰς τὸ τρίτον τὸ τμήματος ΑΔ φέρωμεν παράλληλον ΕΘΖ πρὸς τὴν χορδὴν ΒΓ τοῦ τμήματος.

Παρατήρησις. Ἔχομεν:

$$\text{παραβ. τμῆμα ΑΒΓ} = \frac{2}{3}\text{ΑΔ}\,.\,\text{ΒΓ}\,.\,\text{ημ}\,\alpha \qquad (\S\ 2145)$$

καὶ

$$\text{ΑΘ} = \frac{1}{3}\text{ΑΔ}, \quad \frac{\text{ΕΘ}^2}{\text{ΒΔ}^2} = \frac{\text{ΑΘ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{1}{3}.$$

Ἄρα

$$\text{ΕΘ}^2 = \text{ΙΔ}^2 = \frac{\text{ΔΒ}^2}{3}, \quad \text{ΙΚ} = 2\,.\,\text{ΙΔ} = \frac{\text{ΒΓ}}{\sqrt{3}},$$

καὶ τὸ μέγιστον παραλληλόγραμμον ἢ ὀρθογώνιον θὰ ἔχῃ ὡς ἐμβαδὸν

$$\text{ΘΔ ημ}\,\alpha\,.\,\text{ΙΚ} = \frac{2}{3}\text{ΑΔ ημ}\,\alpha\,.\,\frac{\text{ΒΓ}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{3}\text{ΑΔ}\,.\,\text{ΒΓ}\,.\,\text{ημ}\,\alpha\,.\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{παρ. τμ. ΑΒΓ}}{\sqrt{3}}.$$

Σχ. 1404.

Πρόβλημα 957

2226. **Δίδονται παραβολὴ καὶ δύο ἐφαπτόμεναι αὐτῆς. Νὰ ἀχθῇ τρίτη ἐφαπτομένη εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τρίγωνον τῶν τριῶν εὐθειῶν νὰ εἶναι τὸ μέγιστον.**

1) Τὸ μέγιστον τρίγωνον δίδεται διὰ τῆς ἐφαπτομένης ΔΕ, τῆς διαιρουμένης εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Η. Ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα Ε καὶ Δ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἐφαπτομένων.

Πράγματι, πᾶσα ἐφαπτομένη ΖΘ διαιρεῖται εἰς δύο μέρη ἴσα ὑπὸ τῆς

ἐφαπτομένης ΔΕ, παραλλήλου πρὸς τὴν χορδὴν τῶν ἐπαφῶν· τὸ δὲ τρίγωνον ΑΔΕ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΔΕ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Δ΄ τῆς ΖΘ, εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΑΖΘ. Εἶναι δηλ. τὸ τρίγωνον ΑΔΕ τὸ ζητούμενον μέγιστον τρίγωνον.

2) Ἐκ μιᾶς γνωστῆς προτάσεως (§ 369), δυνάμεθα ἀμέσως νὰ συναγάγωμεν ὅτι τὸ μέγιστον τρίγωνον εἶναι ἐκεῖνο διὰ τὸ ὁποῖον ἡ ἐφαπτομένη ΔΗΕ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Η.

Πρόβλημα 958

2227. Εἰς παραβολικὸν τμῆμα ΒΑΓ, μὲ χορδὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς καμπύλης, νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον τραπέζιον ἐκ τῶν ἐχόντων τὴν χορδὴν ΒΓ ὡς μεγαλυτέραν βάσιν.

Ἔστω ΒΕΔΓ τοῦτο καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΚΕΗΓ· κατὰ τὰ ἐν § 318, ἡ ἐφαπτομένη ΖΕΘ θὰ διαιρῆται εἰς δύο μέρη ἴσα διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Ε.

Ἐὰν θέσωμεν ΑΜ=α, ΒΜ=β, εὑρίσκομεν

$$ΛΕ=\frac{β}{3},\quad ΑΛ=\frac{α}{9},$$

$$ΛΜ=α-\frac{α}{9}=\frac{8α}{9},$$

$$ΚΓ=β+\frac{β}{3}=\frac{4β}{3}.$$

Σχ. 1405

Ἐπομένως

$$(ΒΕΔΓ)=(ΚΕΗΓ)=\frac{8α}{9}\cdot\frac{4β}{3}=\frac{32}{27}αβ.$$

Ἐπειδὴ δέ:

$$\text{παρ/λικὸν τμ. } ΑΒΓ=\frac{2}{3}ΒΓ\,.\,ΑΜ=\frac{4}{3}β\,.\,α,$$

ἕπεται ὅτι τὸ μέγιστον τραπέζιον εἶναι τὰ $\frac{8}{9}$ τοῦ παραβολικοῦ τμήματος.

Παρατήρησις. Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ γωνία φ τῆς χορδῆς ΒΓ πρὸς τὴν διάμετρον ΑΜ, ἡ λύσις τοῦ προβλήματος παραμένει ἡ ἰδία (§ 318, 2). Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου τραπεζίου εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι $\frac{32}{27}αβ\,ημ\,φ$.

Πρόβλημα 959

2228. Νὰ τμηθῇ ὀρθὸς κῶνος ΑΣΒ ὑπὸ ἐπιπέδου κατὰ τὸ μέγιστον παραβολικὸν τμῆμα.

$$Ε=\text{παρ. τμ. } ΜΑΝ=\frac{4}{3}ΛΡ\,.\,ΜΡ=\frac{2}{3}ΜΝ\,.\,ΛΡ.$$

Ἂς ἐκφράσωμεν τὸ μῆκος ΛΡ συναρτήσει τῶν ἐπὶ τοῦ κύκλου τῆς βάσεως μηκῶν. Ἔχομεν, ἂν ΣΒ = λ:

$$\frac{\Lambda P}{AP} = \frac{\Sigma B}{2\rho} = \frac{\lambda}{2\rho}, \quad \Lambda P = \frac{AP\,.\,\lambda}{2\rho} \quad (1)$$

καὶ

$$E = \frac{2\lambda}{3\rho}\cdot\frac{AP\,.\,MN}{2} = \frac{2\lambda}{3\rho}(AMN).$$

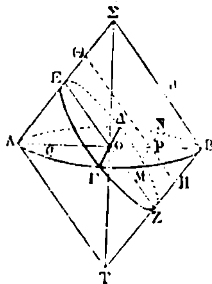
Σχ. 1406.

Γίνεται ἐπομένως μέγιστον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραβολικοῦ τμήματος ὅταν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου AMN γίνῃ μέγιστον, δηλ. ὅταν τὸ τρίγωνον τοῦτο καταστῇ ἰσόπλευρον. Ὥστε:

$$E\ \max. = \frac{2\lambda}{3\rho}\cdot\frac{3\rho^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\lambda\rho\sqrt{3}}{2}.$$

Πρόβλημα 960

2230. Ἓν στερεὸν ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἴσων κώνων ἐχόντων κοινὴν βάσιν. Ζητεῖται νὰ τμηθῇ τοῦτο ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς γενετείρας ΣΒ, ΑΤ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ἡ μεγίστη.


Σχ. 1407.

Ἔστω ΜΘΝΗ μία τυχοῦσα ἐκ τῶν ὡς ἄνω τομῶν· ἐπειδὴ διὰ τὰ παραβολικὰ τμήματα ΜΘΝ, ΜΗΝ θὰ εἶναι, κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν:

$$\frac{(M\Theta N)}{\text{Τρ. } MAN} = \frac{(MHN)}{\text{Τρ. } (MBN)} = \frac{2\lambda}{3\rho},$$

ἕπεται ὅτι

$$\frac{(M\Theta N) + (MHN)}{\text{Τρ. } (MAN) + \text{Τρ. } (MBN)} = \frac{\text{Τομὴ } (MHN\Theta)}{\text{Τετράπλ. } (AMBN)} = \frac{2\lambda}{3\rho}.$$

Γίνεται ἐπομένως μεγίστη ἡ τομὴ ὅταν τὸ τετράπλευρον ΑΜΒΝ καταστῇ μέγιστον, δηλ. ὅταν εἶναι τοῦτο τετράγωνον. Ὥστε:

2231.

$$(E\Gamma Z\Theta) = (MHN\Theta)\ \max. = \frac{2\lambda}{3\rho}\,.\,2\rho^2 = \frac{4}{3}\lambda\rho.$$

2232. Παρατηρήσεις. 1) Φθάνομεν ταχύτερον εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀνωτέρω ἀποτελέσματος παρατηροῦντες ὅτι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν δύο παραβολικῶν χωρίων εἶναι $\frac{2}{3}\Theta H\,.\,MN$, τὸ δὲ μῆκος

$$\Theta H = \Sigma B = \lambda$$

εἶναι σταθερόν, τὸ γινόμενον τοῦτο γίνεται μέγιστον ὅταν καὶ ἡ χορδὴ ΜΝ ἀποβῇ μεγίστη. Δηλ. διὰ ΜΝ = 2ρ, ὡς καὶ προηγουμένως.

2) Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἐσπουδάζομεν ἀναλόγως καὶ τὰς μεταβολὰς τῶν διαφόρων τομῶν ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταέδρου ὑπὸ ἐπι-

πέδων παραλλήλων πρὸς δύο ἀπέναντι ἕδρας αὐτοῦ, ἢ καὶ παντὸς ὀκταέδρου μὲ διαγωνίους ΑΒ, ΓΔ, ΣΤ ἀλληλοδιχοτομουμένας.

Πρόβλημα 961

2233. Δίδονται σφαῖρα, εἷς μέγιστος κύκλος αὐτῆς ΑΟΒ καὶ ἐπίπεδον ΝΤ. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον (Π) παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΝΤ καὶ τοιοῦτον, ὥστε ὁ κύλινδρος, ὁ προβάλλων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίστου κύκλου τὴν τομὴν τοῦ (Π) καὶ τῆς σφαίρας, νὰ ἔχῃ τὸν μέγιστον ὄγκον.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 400 α).

Πρόβλημα 962

2234 Εἰς τμῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς μὲ μίαν βάσιν νὰ ἐγγραφῇ ὁ μέγιστος κύλινδρος.

(Βλ. *Μέθοδοι*, § 395).

Ὁ κύλινδρος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραβολοειδοῦς.

Πρόβλημα 963

2235. Νὰ περιγραφῇ εἰς τμῆμα παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ὁ ἐλάχιστος κῶνος.

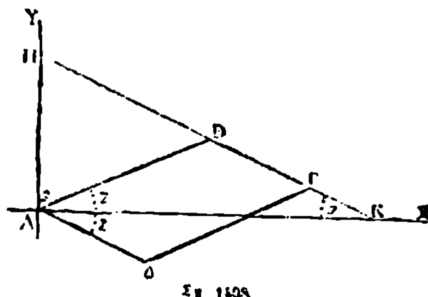
(Βλ. *Μέθοδοι*, § 396, 2).

Ὁ κῶνος εἶναι τὰ $\frac{9}{8}$ τοῦ τμήματος τοῦ παραβολοειδοῦς.

Διάφορα ζητήματα

Θεώρημα τοῦ Mannheim 964

2236. Ἔστω ΑΒΓΔ ἀρθρωτὸν παραλληλόγραμμον. Ἡ κορυφὴ Α αὐτοῦ παραμένει σταθερά, ἐνῷ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΔ στρέφονται περὶ τὸ Α κατὰ γωνίας ἴσας καὶ ἀντιθέτων φορῶν.



Δείξατε ὅτι ἡ κορυφὴ Γ γράφει ἔλλειψιν. (*Mathesis*, 1892, σ. 235).

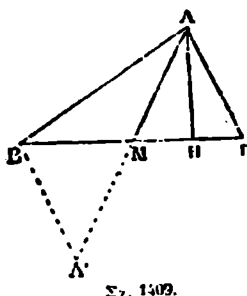
Ἔστωσαν Κ καὶ Η τὰ σημεῖα καθ' ἃ ἡ ΒΓ συναντᾷ τὰς ΑΧ καὶ ΑΥ, διχοτόμους τῆς γωνίας ΒΑΓ καὶ τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῆς, ἀντιστοίχως. Τὰ τρίγωνα ΑΒΚ, ΑΒΗ εἶναι ἰσοσκελῆ, ΗΒ = ΒΑ = ΒΚ καὶ

ΗΚ = 2 ΑΒ = σταθερὸν μῆκος.

Γράφει ἐπομένως τὸ σημεῖον Γ ἔλλειψιν, ἀφοῦ τὰ ἄκρα τοῦ σταθεροῦ μήκους εὐθυγράμμου τμήματος ΗΚ ὀλισθαίνουν ἐπὶ δύο ὀρθογωνίων εὐθειῶν.

Πρόβλημα 965

2237. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐκ τοῦ ὕψους ΑΗ τῆς διαμέσου ΑΜ καὶ τοῦ λόγου



Σχ. 1409.

$$\frac{ΑΒ - ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{μ}{ν}.$$

Κατασκευάζομεν πρῶτον τὸ τρίγωνον ΑΗΜ.

Ἐκ τῶν σχέσεων

$$\frac{γ - β}{α} = \frac{μ}{ν},$$

$$γ^2 - β^2 = ΒΗ^2 - ΗΓ^2 =$$

$$= (ΒΗ + ΗΓ)(ΒΗ - ΗΓ) = α \,.\, ΗΜ$$

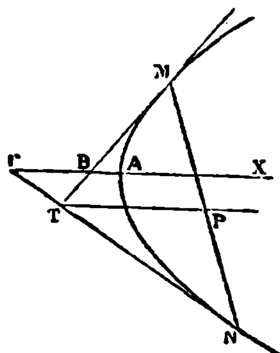
ποριζόμεθα καὶ τὴν

$$β + γ = \frac{ν}{μ} ΗΜ = \text{γνωστὸν μῆκος } λ.$$

Ἐὰν τώρα προεκτείνωμεν τὴν ΑΜ κατὰ ἴσον μῆκος ΜΑ', παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι τὸ σημεῖον Β ὁρίζεται εὐκόλως διὰ τῆς λύσεως τοῦ γνωστοῦ προβλήματος: Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ΜΗ σημεῖον Β τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Α' νὰ εἶναι δοθὲν μῆκος λ. (*Mathesis*, 1885, σ. 19· Van den Broeck).

Πρόβλημα 966

2238. Δίδονται παραβολὴ καὶ δύο ἐφαπτόμεναι αὐτῆς ΤΜ, ΤΝ (Σχ. 1410), τεμνόμεναι ὑπὸ τοῦ ἄξονος τῆς καμπύλης εἰς Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Δείξατε τὴν σχέσιν



Σχ. 1410.

$$\frac{ΤΜ}{ΤΝ} = \frac{ΤΒ}{ΤΓ}.$$

Πράγματι, ὁ ἄξων ΑΧ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμετρον ΤΡ ἢ διάμεσον ἐκ τοῦ Τ τοῦ τριγώνου ΜΤΝ. Γνωρίζομεν δὲ (§ 1135, β) ὅτι, ἡ παράλληλος ΑΒΓ πρὸς διάμεσον ΤΡ τοῦ τριγώνου ΜΤΝ, ὁρίζει ἐπὶ τῶν ἐκ τοῦ Τ πλευρῶν τμήματα ΤΒ, ΤΓ ἀνάλογα τῶν πλευρῶν αὐτῶν. (G. de Longchamps, *J. M. E.*, 1892, σ. 22).

Θεώρημα 967

2239. Αἱ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Μ' τῆς *ἐλλείψεως τοῦ Steiner* τριγώνου ΑΒΓ, ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέσους τοῦ τριγώνου συναντοῦν τὰς ἀντιστοίχους αὐτῶν

πλευρὰς εἰς τρία σημεῖα Α', Β', Γ' κείμενα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. (E. Cesaro, *Mathesis*, 1893, σ. 70).

Ἡ *ἔλλειψις τοῦ Steiner* ἑνὸς τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἡ προβολὴ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, οὗτινος ὀρθὴ προβολὴ εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπειδὴ δέ, αἱ ἐκ τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας ταύτης παράλληλοι πρὸς τὰς διαμέσους τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους αὐτῶν πλευράς, οἱ πόδες αὐτῶν κατὰ τὸ *θεώρημα τοῦ Simson* θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (ε), τῆς εὐθείας τοῦ *Simson* τῆς σχετικῆς πρὸς τὸ σημεῖον Μ.

Κεῖνται ἑπομένως τὰ τρία σημεῖα Α', Β', Γ' εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπ' εὐθείας γραμμῆς (ε'), τῆς προβολῆς, τῆς εὐθείας (ε) τοῦ Simson διὰ τὸ σημεῖον Μ, ἀντιστοίχου τοῦ Μ', ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου.

Σημείωσις. Τὸ θεώρημα εἶναι τοῦ Cesaro· εἰς τὸ δεύτερον αὐτοῦ μέρος ἐζήτει τὴν περιβάλλουσαν τῶν εὐθειῶν (ε'). Ἡ λύσις εἶναι τοῦ Droz-Farny. Ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν (ε) τοῦ Simson ἑνὸς τριγώνου (τῶν ἀντιστοίχων τῶν σημείων τῆς περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ περιφερείας) εἶναι μία *ὑποκυκλοειδὴς μὲ τρία σημεῖα ἀνακάμψεως*.

Ἡ καμπύλη αὕτη ἔχει μελετηθεῖ ὑπὸ διαφόρων καὶ ἰδιαιτέρως ὑπὸ τῶν L. Painvin (*N. A.*, 1870, σ. 211 καὶ 258) καὶ Longchamps (*J. M. S.*, 1884, σ. 169). Ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν (ε') τοῦ *θεωρήματος τοῦ* Cesaro εἶναι ἡ ὀρθογώνιος προβολὴ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου τῆς ἐν λόγῳ ὑποκυκλοειδοῦς διὰ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον.

Θεώρημα 968

2240. Ἐὰν δύο ὁμοιόθετα τρίγωνα ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους G, τὰ ἓξ σημεῖα τομῆς τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἀνήκουν εἰς ἔλλειψιν, ὁμοίαν τῶν ἐλλείψεων τοῦ Steiner ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων.

Τὸ σχῆμα τῶν τριγώνων αὐτῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὀρθὴ προβολὴ δύο ὁμοιοθέτων ἰσοπλεύρων τριγώνων ἐχόντων τὸ αὐτὸ κέντρον Θ'. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὰ τρίγωνα ταῦτα, τὰ ἓξ σημεῖα τομῆς τῶν πλευρῶν των ἀνήκουν εἰς περιφέρειαν (Κ) ὁμόκεντρον τῶν περιγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς αὐτά, κατὰ τὴν προβολὴν ἡ περιρεια (Κ) μετασχηματίζεται εἰς ἔλλειψιν ὁμοιόθετον ἐκείνων τοῦ Steiner τῶν δύο τριγώνων καὶ ἔχουσα τὸ αὐτὸ κέντρον Θ μετ' αὐτῶν.

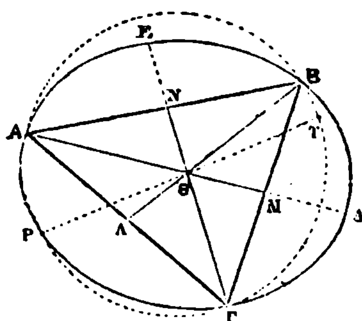
Θεώρημα 969

2241. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως Ε τοῦ Steiner ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἴσον πρὸς $4\pi : 3\sqrt{3}$.

Ἐπειδὴ ἡ ἔλλειψις αὕτη καὶ τὸ τρίγωνον εἶναι προβολαὶ περιφερείας Ε' καὶ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν ἰσοπλεύρου τριγώνου Α'Β'Γ', θὰ ἔχωμεν

$$\frac{(E)}{(AB\Gamma)} = \frac{(E')}{(A'B'\Gamma')}$$

'Αλλ' εἶναι $(E') = \pi R^2$ καὶ $(A'B'\Gamma') = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$, ὅπως R ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας E'. 'Επομένως



Σχ. 1411.

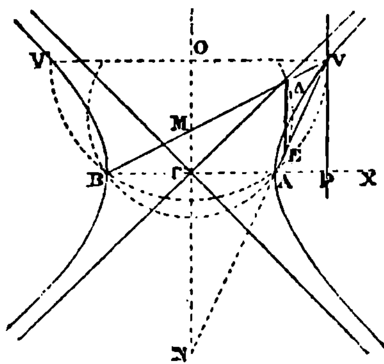
$$\frac{(E)}{(AB\Gamma)} = \frac{\pi R^2}{\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2241 α. Σημείωσις. 'Η περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον ἔλλειψις συναντᾷ τὴν περιγεγραμμένην εἰς αὐτὸ περιφέρειαν καὶ εἰς ἓν τέταρτον σημεῖον P. Τὸ σημεῖον τοῦτο ὠνομάσθη *σημεῖον τοῦ Steiner*, ἐπειδὴ ὁ σοφὸς οὗτος ἀνεῦρε διαφόρους ἰδιότητας αὐτοῦ· ἐμελετήθη δὲ ὕστερον καὶ ὑπὸ τοῦ Tarry, ὅστις ἐσπούδασεν ἐπίσης καὶ τὰς ἰδιότητας τοῦ διαμετρικοῦ τοῦ P σημείου T — καλουμένου σήμερον *σημείου τοῦ Tarry* (*).

Διὰ τὸ τελευταῖον τοῦτο σημεῖον, δύναταί τις νὰ συμβουλευθῇ τὴν ὡραίαν ἀναλυτικὴν σπουδὴν τοῦ I. Neuberg (*J. d. M. S.*, 1886, σ. 6 καὶ ἑπμ.), ὡς καὶ τὴν κατασκευήν, ἣν ὑπέδειξε ὁ Longchamps (αὐτ., 1886, σ. 129, καὶ 1888, σ. 242, nº 69).

Τὰ σημεῖα τῶν Steiner καὶ Tarry, καθὼς καὶ ἡ *ὑπερβολὴ τοῦ Kiepert*, ὑπῆρξαν ἀντικείμενον πολυαρίθμων μελετῶν. Βλ. σχετικῶς *N. A.*, 1887, σ. 215, Cesaro.

Θεώρημα τοῦ Steiner 970



Σχ. 1412.

2242. 'Ο τόπος τῶν σημείων, ἐκ τῶν ὁποίων δοθεῖσα περιφέρεια (Γ) προβάλλεται, διὰ κεντρικῆς προβολῆς, ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ τῆς Γ κατὰ περιφέρειαν ἐπίσης (Γ'), εἶναι ἰσόπλευρον ἐκ περιστροφῆς μονόχωνον ὑπερβολοειδὲς ἔχον ὡς λαιμὸν τὴν περιφέρειαν (Γ).

"Εστω V ἓν τῶν κέντρων προβολῆς, κείμενον ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς (Γ) καὶ ἀγόμενον διὰ διαμέτρου αὐτῆς AB. 'Αρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π), ὁ τόπος τῶν σημείων V εἶναι ἰσόπλευρος ὑπερβολὴ μὲ πρωτεύοντα ἄξονα τὴν εὐθεῖαν AB.

(*) Σημ. μετ. Εἰς τὸ σχῆμα 1411 τὸ σημεῖον Θ συνέπεσε πρὸς τὸ κέντρον O τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

Θεωρήσωμεν τὸν κυκλικὸν κῶνον μὲ κορυφὴν V καὶ βάσιν τὴν περιφέρειαν (Γ) διαμέτρου ΑΒ. Ἐπειδὴ ὁ κῶνος οὗτος θὰ τέμνεται ὑπὸ παντὸς ἐπιπέδου (Ρ) καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ κατὰ κυκλικὴν τομήν, αἱ τομαὶ αὗται θὰ εἶναι *ἀντιπαράλληλοι* τομαὶ αὐτοῦ. Ἑπομένως, ἡ τομὴ ΜΝ, τοῦ ἐπιπέδου (Π) καὶ τοῦ διὰ τοῦ μέσου τῆς ΑΒ ἀγομένου ἐπιπέδου (Ρ), θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην VΡ τῆς περιφερείας ΑVΒ (§ 1953) — ἤ, ὡς ἀμέσως ἐκ τῆς ἐποπτείας τοῦ σχήματος φαίνεται, ἡ περιφέρεια μὲ διάμετρον VV′ (ὅπου V′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ V πρὸ τὴν ΜΝ) θὰ διέρχεται διὰ τῶν Α καὶ Β σημείων.

Θὰ ἔχωμεν κατὰ ταῦτα:

$$ΟV = ΟΑ = \sqrt{ΟΓ^2 + ΑΓ^2} = \sqrt{VΡ^2 + ΑΓ^2},$$

ἤ, ἂν τεθῇ $ΟV = ΓΡ = x,\ \ ΡV = y,$

$$x = \sqrt{y^2 + \alpha^2}$$

καὶ

$$x^2 - y^2 = \alpha^2.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς μὲ πρωτεύοντα ἄξονα ΑΒ ([143]).

Σημείωμα ἐπὶ τῶν σφαιρικῶν κωνικῶν τομῶν.

2243. *Ἱστορικόν.* Εἰς τὴν σπουδὴν τοῦ τόπου (Τ) τῆς κορυφῆς ἑνὸς μεταβλητοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ὡρισμένη, θέσει καὶ μεγέθει, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἄλλων πλευρῶν σταθερόν, ὁ Nicolas Fuss ἐκάλεσε τὴν καμπύλην διπλῆς καμπυλότητος, ἣν εὗρε ὡς τόπον τῶν ἐν λόγῳ σημείων, *σφαιρικὴν ἔλλειψιν*· ταύτης ειδικὴ περίπτωσις εἶναι ἡ περιφέρεια ΔΓΔ′ τοῦ σχ. 96 τῆς § 149. Ἀργότερον (1825), ὁ Magnus (Βερολῖνον) ἐδημοσίευσε εἰς τὰ *Annales de Gergonne* (τομ. XVI, 1825 - 26, σ. 33) μίαν ἀξιοσημείωτον μελέτην ἐπὶ τῆς καμπύλης καθ' ἣν τέμνονται σφαῖρα καὶ κῶνος δευτέρου βαθμοῦ, ἔχων τὴν κορυφήν του εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἀπέδειξε τὰς κυριωτέρας ἰδιότητας τῆς *σφαιρικῆς ἐλλείψεως* καὶ ἐταύτισε αὐτὴν πρὸς τὴν *σφαιρικὴν ὑπερβολήν*.

Τὸ 1829 - 30, εἰς τὰ *Annales de Gergonne* (τόμ. XX, σ. 129) ἐδημοσιεύθη, ὑπογεγραμμένον διὰ τῶν ἀρχικῶν *M. G. P.*, ἓν πολὺ ἐνδιαφέρον ἄρθρον ἐπὶ τοῦ ἰδίου θέματος.

Τὰ *Nouvelles Annales Mathématiques* (1858 - 59) ἐδημοσίευσαν ἐπίσης μίαν πληρεστάτην τριγωνομετρικὴν σπουδὴν τῆς *σφαιρικῆς κωνικῆς τομῆς*. Εἰς τὴν ἐνδιαφέρουσαν ταύτην ἐργασίαν τοῦ Vannson, καθηγητοῦ τότε εἰς τὸ Λύκειον τῶν Βερσαλλιῶν, γίνεται λόγος περὶ τῆς *σφαιρικῆς παραβολῆς* καὶ διὰ τὴν ὁποίαν τίποτε δὲν ἀναφέρετο εἰς τὰ προηγούμενα ἄρθρα τῶν *Annales de Gergonne*.

Εἰς τὰ ἑπόμενα, θὰ συνοψίσωμεν τὰς σχετικὰς μελέτας ἐπὶ τοῦ θέματος, συμπληροῦντες αὐτὰς διὰ μιᾶς νέας, πιθανόν, *παρατηρήσεως*.

Κῶνος δευτέρου βαθμοῦ. Δὲν ὑπάρχει παρὰ εἷς μόνον κῶνος δευτέρου βαθμοῦ, οἱανδήποτε ὁδηγὸν αὐτοῦ καὶ ἂν λάβωμεν, ἔλλειψιν, ὑπερβολὴν ἢ παραβολήν· τοῦτο προκύπτει ἄλλωστε καὶ ἐκ

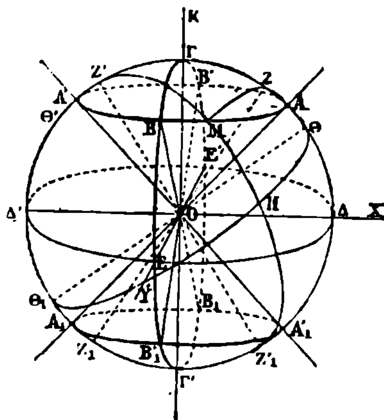
143. Σημ. μετ. Ἐτροποποιήσαμεν ἐλαφρῶς τὴν ἐν τῷ κειμένῳ ἀπόδειξιν ἐπὶ τὸ καθ' ἡμᾶς σαφέστερον.

τοῦ ὅτι αἱ τρεῖς αὗται κωνικαὶ τομαὶ δύνανται, ὡς ἀπεδείξαμεν ἤδη, νὰ ληφθοῦν ὡς τομαὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου.

Θεωροῦντες τρεῖς εὐθείας ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ καθέτους ἐπ' ἀλλήλας ὡς ἄξονας συντεταγμένων, τοποθετοῦντες τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου εἰς τὴν ἀρχὴν Ο καὶ ἐκλέγοντες τὰ ἐπίπεδα ΧΟΖ, ΥΟΖ διὰ πρωτεύοντα ἐπίπεδα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, λαμβάνομεν ὡς ἐξίσωσιν ταύτης τὴν

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0. \qquad (1)$$

Ἔστω $\alpha > \beta$. Πᾶσα τομὴ τῆς ἐπιφανείας παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΥ εἶναι ἔλλειψις μὲ κέντρον ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΖ καὶ τῆς ὁποίας ὁ πρωτεύων ἄξων εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα ΟΧ



Σχ. 1413.

καὶ ὁ δευτερεύων πρὸς τὸν ΟΥ. Ἔστω 2α ἡ γωνία τῶν γενετειρῶν ΟΑ, ΟΑ' ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΖ καὶ 2β ἡ γωνία τῶν γενετειρῶν ΟΒ, ΟΒ' ἐπὶ τοῦ ΥΟΖ. Ἡ γωνία 2α εἶναι ἡ μεγαλυτέρα καὶ ἡ 2β ἡ μικροτέρα ἐκ τῶν γωνιῶν δύο διαμετρικῶν γενετειρῶν τῆς ἐπιφανείας.

Ἑστιακαὶ εὐθεῖαι. Ὁ κῶνος δευτέρου βαθμοῦ Ο, ΑΒΑ'Β' ἔχει δύο ἑστιακὰς εὐθείας ΟΖ, ΟΖ' εἰς τὸ πρωτεῦον ἐπίπεδον ΑΟΑ'.

Τὸ θεώρημα τοῦ *Magnus* διατυποῦται ὡς ἑξῆς: Αἱ γωνίαι μιᾶς τυχούσης γενετείρας ΟΜ ἑνὸς κώνου δευτέρου βαθμοῦ μετὰ τῶν εὐθειῶν ΟΖ, ΟΖ' ἔχουν ἄθροισμα σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὴν γωνίαν ΑΟΑ' $= 2\alpha$ τῶν ἄκρων γενετειρῶν.

Ὁ ὑπὸ τὰ ἀρχικὰ M. G. P. συγγραφεὺς τοῦ δευτέρου ἄρθρου τῶν *A. d. G.*, (τομ. XX, σ. 129), ζητεῖ τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν εὐθειῶν ΟΜ, διὰ τὰς ὁποίας τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν μετὰ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ΟΖ, ΟΖ' εἶναι σταθερὸν καὶ εὑρίσκει κῶνον δευτέρου βαθμοῦ Ο, ΑΒΑ'Β' — κατ' ἐπαλήθευσιν τοῦ *θεωρήματος τοῦ Magnus*.

Σφαιρικὴ κωνικὴ τομή. Ἡ καμπύλη αὐτὴ εἶναι τομὴ σφαίρας καὶ

κώνου δευτέρου βαθμοῦ, ἔχοντος κορυφὴν τὸ κέντρον Ο τῆς σφαίρας. Ἀποτελεῖται ἐκ δύο συμμετρικῶν πρὸς τὸ σημεῖον Ο μερῶν $ABA'B'$, $A_1B_1A'_1B'_1$ καὶ ἔχει τρία ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ ἓξ κέντρα ἢ τρεῖς κεντρικὰς διαμέτρους, κειμένας ἐπὶ τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων. Πᾶς μέγιστος κύκλος διὰ μιᾶς τῶν διαμέτρων αὐτῶν, ΓΓ′ ἢ ΔΔ′, διαιρεῖ τὴν καμπύλην εἰς δύο μέρη ἴσα.

Ἡ πλήρης καμπύλη ἔχει τέσσαρας ἑστίας· τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων ΜΖ, ΜΖ′ μεγίστων κύκλων εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸν *μέγαν ἄξονα* ΑΓΑ′ (τόξον μ. κύκλου) τῆς καμπύλης. Εἶναι λοιπὸν αὕτη μία *σφαιρική*, κατὰ τὸν Fuss, *ἔλλειψις*, καθὼς καὶ ἡ συμμετρικὴ αὐτῆς $A_1B_1A'_1B'_1$.

Ἡ ἰδία καμπύλη δύναται νὰ ὀνομασθῇ ἐπίσης καὶ *σφαιρικὴ ὑπερβολή*. Ἐπειδὴ θεωροῦντες καὶ τὰ δύο μέρη αὐτῆς καὶ τὰς ἑστίας Z, Z_1', παρατηροῦμεν ὅτι δύναται αὕτη νὰ θεωρηθῇ ὡς τόπος τῶν σημείων Μ, δι' ἃ ἡ διαφορὰ τῶν σφαιρικῶν ἀποστάσεων MZ_1' — ΜΖ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς τὸ τόξον $A\Delta A'_1$ — ὡς ἀμέσως ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται.

Σφαιρικὴ παραβολή. Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ μέγας ἄξων ΑΓΑ′ εἶναι ἴσος πρὸς τέταρτον περιφερείας μ. κύκλου, δηλ. ὅταν $2a = 90^o$, ἡ τομὴ τῶν δύο ἐπιφανειῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁ τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα αἱ σφαιρικαὶ ἀποστάσεις των ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ καὶ ἀπὸ τῆς περιφερείας $\Theta H \Theta_1$, καθέτου ἐπὶ τὴν ΟΖ′, εἶναι ἴσαι. Πράγματι, θὰ εἶναι τότε:

$$\widehat{HMZ'} = \text{τέταρτον περιφ μ. κύκλου} = \widehat{A\Gamma A'} = \widehat{MZ'} + \widehat{MZ}$$

καὶ ἑπομένως

$$\widehat{MZ} = \widehat{MH}.$$

Αἱ σφαιρικαὶ *διευθετοῦσαι* τῆς *παραβολῆς* αὐτῆς εἶναι αἱ δύο περιφέρειαι μ. κύκλων, αἱ ὁριζόμεναι διὰ τῶν τόξων

$$\widehat{A\Theta} = \widehat{AZ} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{A'\Theta'} = \widehat{A'Z'}.$$

Παρατήρησις. Διάφοροι ἀναλογίαι καὶ συλλογισμοὶ μᾶς ὁδηγοῦν εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς *σφαιρικῆς κωνικῆς τομῆς* ὡς τοῦ τόπου τῶν σημείων Μ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τῶν ὁποίων ὁ λόγος μ τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ σταθεροῦ σημείου Ζ αὐτῆς καὶ ἀπὸ σταθερᾶς περιφερείας μ. κύκλου $\Theta H \Theta_1$, εἶναι ἀμετάβλητος.

Διὰ $\mu < 1$, ἡ γωνία $2a$ τοῦ κώνου εἶναι μικροτέρα μιᾶς ὀρθῆς καὶ ἡ καμπύλη ἔχει τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα μιᾶς ἐπιπέδου ἐλλείψεως πρὸς τὰς διευθετούσας καὶ ἑστίας αὐτῆς.

Διὰ $\mu > 1$, $2a >$ μιᾶς ὀρθῆς καὶ ἡ καμπύλη ἔχει, ἀναλόγως, τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα μιᾶς ἐπιπέδου ὑπερβολῆς πρὸς τὰς διευθετούσας καὶ ἑστίας αὐτῆς.

Διὰ $\mu = 1$, ἡ γωνία $2a$ εἶναι ἴση πρὸς μίαν ὀρθὴν καὶ ἡ ἀντίστοιχος καμπύλη εἶναι ἡ *σφαιρικὴ παραβολή*.

Αἱ ἑστιακαὶ ἰδιότητες εἶναι αἱ αὐταὶ καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις. Οὕτω λ. χ., ὁ μέγιστος κύκλος, ὁ ἐφαπτόμενος τῆς καμπύλης εἰς σημεῖον Μ αὐτῆς, σχηματίζει ἴσας γωνίας πρὸς τὰ ἑστιακὰ τόξα εἰς τὸ σημεῖον αὐτό, ὁ δὲ κάθετος μέγιστος κύκλος εἰς τὸ Μ ἐπὶ τὴν καμπύλην διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν τόξων τούτων. Ὁ τόπος τῶν καμπύλων προβολῶν τῶν ἑστιῶν ἐπὶ τοὺς ἐφαπτομένους με-

γίστους κύκλους εἶναι ὁ *πρωτεύων κύκλος* τῆς καμπύλης, μὲ διάμετρον $\widehat{AA'}$ κλπ. Ὁ τόπος τῶν συμμετρικῶν τῶν προβολῶν τῶν ἑστιῶν ἐπὶ τοὺς ἰδίους ἐφαπτομένους μ. κύκλους εἶναι ἄλλος κύκλος, δυνάμενος νὰ ὀνομασθῇ *διευθύνων κύκλος* τῆς σφαιρ. ἐλλείψεως ἢ τῆς ὑπερβολῆς· διὰ τὴν σφαιρ. παραβολήν, ὁ κύκλος οὗτος συμπίπτει πρὸς τὴν διευθύνουσαν περιφέρειαν ($\Theta H \Theta_1$).

Αἱ σφαιρικαὶ ἀποστάσεις, περὶ ὧν γίνεται λόγος ἀνωτέρω, νοοῦνται ἐπὶ τόξων μεγίστων κύκλων. Ὁ *πρωτεύων κύκλος*, μὲ διάμετρον AA', εἶναι παράλληλος τῆς σφαίρας κύκλος· ὁμοίως, οἱ *διευθύνοντες κύκλοι*, ὅταν $2a \neq$ μιᾶς ὀρθῆς, εἶναι μικροὶ κύκλοι τῆς σφαίρας.

Διερεύνησις. Ἐὰν $\beta = 0$, ἡ κωνικὴ ἀνάγεται εἰς τὸν μέγαν αὐτῆς ἄξονα $\widehat{A\Gamma A'}$ καὶ αἱ ἑστίαι της εἶναι τὰ σημεῖα A καὶ A'.

Διὰ $\beta < \alpha$, ἡ διάταξις τοῦ σχήματος εἶναι ὡς ἐν τῇ μελέτῃ ταύτῃ (σχ. 1413).

Διὰ $\beta = \alpha$, ὁ κῶνος ἀποβαίνει ἐκ περιστροφῆς, ἡ τομὴ ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἴσων καὶ παραλλήλων κύκλων, αἱ δὲ ἑστίαι ἑκάστου μέρους εἶναι τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ'.

Ἡ ὅλη καμπύλη διατηρεῖ πάλιν τὰς ἑστιακὰς ἰδιότητας τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς. Πράγματι, τὰ σημεῖα αὐτῆς ἔχουν τὴν ἰδιότητα ὅπως ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ (ἢ Γ') καὶ ἀπὸ τοῦ μεγ. κύκλου ΔΔ' διατηρεῖται σταθερός.

Προβολαὶ τῆς σφαιρικῆς κωνικῆς τομῆς. Ἐπειδὴ ὁ κῶνος δευτέρου βαθμοῦ καὶ ἡ σφαῖρα ἔχουν τὰ αὐτὰ πρωτεύοντα ἐπίπεδα, ἡ τομή των προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου XOY κατὰ ἔλλειψιν. Ἐπὶ δὲ τοῦ XOZ κατὰ τόξα τῆς αὐτῆς ἐλλείψεως [144], ἐχούσης κέντρον O καὶ διὰ τὴν ὁποίαν αἱ προβολαὶ τῶν B καὶ B'_1 εἶναι τὰ ἄκρα τοῦ μικροῦ ἄξονος, ἐνῶ τὰ σημεῖα A, A', A_1, A'_1 εἶναι *σημεῖα παύσεως* τοῦ πραγματικοῦ μέρους αὐτῆς.

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου YOZ, ἡ *σφαιρικὴ ἔλλειψις* προβάλλεται κατὰ δύο ὑπερβολικὰ τόξα. Αἱ προβολαὶ τῶν A, A' συμπίπτουν εἰς τὴν μίαν τῶν κορυφῶν τῆς καμπύλης.

Ἐλλειπτικὸς κύλινδρος. Ἐπειδὴ ἡ προβολὴ τῆς σφαιρικῆς κωνικῆς τομῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον XOY εἶναι, ὡς εἴδομεν, ἔλλειψις, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὁ ὀρθὸς ἐλλειπτικὸς κύλινδρος, ὁ ἔχων τὴν προβολὴν ταύτην διὰ ὁδηγόν, τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ τὴν ἰδίαν καμπύλην $ABA'B' - A_1B_1A'_1B'_1$· σημειωτέον ὅμως ὅτι αἱ ἑστίαι τῆς σφαιρικῆς καμπύλης δὲν προβάλλονται κατὰ τὰς ἑστίας τῆς ὀρθῆς τομῆς - ὁδηγοῦ τοῦ κυλίνδρου.

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν διὰ τὰς προβολὰς ἐπὶ τῶν XOZ καὶ YOZ ἐπιπέδων. Διὰ τῆς ἰδίας σφαιρικῆς καμπύλης διέρχεται καὶ ἓν ἐλλειψοειδὲς ἢ ὑπερβολοειδές.

Ἡ τομὴ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ μονοχώνου ὑπερβολοειδοῦς

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

ἐμελετήθη ὑπὸ τοῦ Magnus. Ὡς ειδικὴν περίπτωσιν τοῦ ὑπερβολοειδοῦς τούτου ἐθεώρησε τὸν κῶνον, τὸν ἔχοντα τὰς ἰδίας ἑστιακὰς γραμμὰς μετὰ τοῦ ὑπερβολοειδοῦς.

---

144. Σημ. μετ. Ἐπειδὴ ὑπετέθη $\alpha > \beta$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ ΛΕΞΙΚΟΝ

Εὐθεῖαι — Σημεῖα — Καμπύλαι — Πολύγωνα

Εὐθεῖα γραμμή

Παράγρ.

Ἄξων ὁμολογίας (Poncelet): Τόπος τῶν σημείων τομῆς τῶν ὁμολόγων εὐθειῶν δύο ἀντιστοίχων σχημάτων. 1249.

Ἄξων ὁμοιοθεσίας: Εὐθεῖαι ὁμόλογοι καὶ συμπίπτουσαι δύο ὁμοίων σχημάτων 212.

Ἄξων (ριζικός) (Gaultier de Tours): Τόπος τῶν σημείων τῶν ἐχόντων ἴσας δυνάμεις πρὸς δύο περιφερείας. 1265 α.

Cévienne (A. Poulain): Εὐθεῖα συνδέουσα μίαν κορυφὴν τριγώνου μετὰ τυχόντος σημείου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Λέγεται ἐπίσης καὶ *γωνιώδης διατέμνουσα* (J. Neuberg) 167α. καὶ 913.

Εὐθεῖα τοῦ d'Alembert: Εὐθεῖα ἐφ' ἧς τρία κέντρα ὁμοιότητος τριῶν περιφερειῶν. 293 α.

Εὐθεῖα (ἡ ἐπ' ἄπειρον): Ἡ εἰς ἄπειρον χορδὴ δύο περιφερειῶν. 1265 α.

Εὐθεῖα τοῦ Νεύτωνος (ἢ τοῦ Gauss): Ἐφ' ἧς τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ἑνὸς πλήρους τετραπλεύρου. 1233 σ

Εὐθεῖα τοῦ Pascal: Ἐφ' ἧς τὰ κοινὰ σημεῖα τομῶν τῶν τριῶν ζευγῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς ἐγγεγραμμένου εἰς κων. τομὴν ἑξαγώνου. 293 β, 293 θ καὶ 1237 α.

Εὐθεῖα τοῦ Simson: Ἐφ' ἧς οἱ πόδες τῶν καθέτων, τῶν ἀγομένων ἐκ σημείου τῆς περιγεγραμμένης εἰς τρίγωνον περιφερείας ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. 22, 762 - 767, 1212 α, 1234, 1276 β καὶ 1277 β.

Εὐθεῖα τῶν μέσων (Chasles): Τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, ἅτινα συνδέουν, ἀνὰ δύο, σημεῖα κείμενα ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας καὶ ἴσον ἀπέχοντα ἀπὸ δύο σταθερῶν σημείων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν. 771 ι, 1091 α, καὶ 1358 α.

Εὐθεῖα τοῦ Euler: Ἡ συνδέουσα τὸ ὀρθόκεντρον μετὰ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τρίγωνον. 28, 293 καὶ 1120 α.

Ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης εὑρίσκονται καὶ τὰ σημεῖα τοῦ *Franke*. 1242 ο.

Εὐθεῖα τοῦ Housel: Ἡ συνδέουσα το κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τρίγωνον κύκλου μετὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ *μέσον* τρίγωνον τοῦ δοθέντος. 1123.

Εὐθεῖα τοῦ Wallace (μᾶλλον γνωστὴ ὡς ἡ τοῦ *Simson*). Διὰ τὸ ἱστορικόν, βλέπε δύο σημειώματα τοῦ *Archibald* εἰς *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, τομ. XXVIII (1909 — 1910). 23 α.

Εὐθεῖαι ἀντιπαράλληλοι (Arnaud) ἢ *ἀντικλινεῖς* πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. 28, 3) καὶ 471.

Παράγρ.

Εὐθεῖαι ἰσογώνιοι (J. Neuberg): Ζεῦγος εὐθειῶν διὰ τῆς κορυφῆς γωνίας ἀγομένων καὶ συμμετρικῶς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας κειμένων. 646 καὶ 1118.

Εὐθεῖαι ἰσοτομικαί (De Longchamps): Ζεῦγος εὐθειῶν διὰ κορυφῆς τριγώνου ἀγομένων καὶ δύο *ἰσοτομικῶν* (βλ. κατωτέρω) σημείων ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Λέγονται ἐπίσης καὶ *ἀντίστροφοι εὐθεῖαι*. 765 α, 1231 α καὶ 1242 δ.

Εὐθεῖα τοῦ Φίλωνος: Τὸ βραχύτερον εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν γωνίας περιεχόμενον καὶ διὰ σημείου ἐντὸς τῆς γωνίας κειμένου διερχόμενον. 1615 α.

Ἀντιπαράλληλοι διάμεσοι: Βλέπε *Συμμετροδιάμεσοι*. 899 α.

Διάμεσοι τετραπλεύρου: Αἱ ἑνοῦσαι εὐθεῖαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου ἢ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ. 548 α.

Σημειοσειρά (Cremona): Σύνολον σημείων ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. 1150 ε καὶ 1298 α.

Συμμετροδιάμεσος (d'Ocagne): Ἡ συμμετρικὴ τῆς διαμέσου τριγώνου εὐθεῖα πρὸς τὴν διχοτόμον ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς. 66, 148, 899, 1102, 1603 καὶ 2068 δ.

Σημεῖα

Κέντρον τῶν μέσων ἀποστάσεων ἑνὸς συνόλου σημείων. 463 καὶ 463 α.

Κέντρον ἢ πόλος ἀντιστροφῆς: 217.

Κέντρα (ἰσογώνια): Τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν κύκλων τοῦ *Torricelli*, ἑνὸς τριγώνου, δηλ. τῶν περιγεγραμμένων εἰς τὰ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κατασκευαζόμενα ἰσόπλευρα τρίγωνα τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται καὶ τὰ τρία ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ἢ καὶ τὰ τρία πρὸς ὃ μέρος τοῦ ἐπιπέδου (ὡς πρὸς ἑκάστην πλευρὰν) εὑρίσκεται καὶ τὸ τρίγωνον. 755.

Κέντρα ἰσοδυναμικὰ (Neuberg): Τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν τριῶν κύκλων τοῦ Ἀπολλωνίου ἑνὸς τριγώνου. 1546 ε.

Κέντρον ὁμοιοθεσίας δύο ὁμοιοθέτων σχημάτων: 212.

Κέντρον ὁμοιότητος: 1146 καὶ 1527.

Κέντρον ὁμολογίας (Poncelet): Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων διὰ δύο ἀντιστοίχων σημείων δύο ὁμολόγων σχημάτων. 1249.

Σημεῖον τοῦ Brianchon: Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων ἑνὸς περιγεγραμμένου εἰς κωνικὴν τομὴν ἑξαπλεύρου. 293 θ καὶ 1237 α.

Σημεῖον τοῦ Brune (G. Lemaire): Σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τετραπλεύρου τοιοῦτον, ὥστε αἱ συνδέουσαι αὐτὸ εὐθεῖαι μετὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου διαιροῦν αὐτὸ εἰς τέσσαρα ἄλλα ἰσοδύναμα. 1574.

Σημεῖον τοῦ Feuerbach: Σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων τριγώνου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ ἑνὸς τῶν περιγεγραμμένων εἰς αὐτὸ κύκλων. 238 β καὶ 1341.

Σημεῖον τοῦ Franke: Κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν τὰς κορυφὰς τριγώνου μετὰ τῶν σημείων Δ', Ε', Ζ', τῶν διαιρούντων τὰς μεσοκαθέτους ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ ἐπὶ τὰς πλευράς του κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον. 1242 ο.

Σημεῖον τοῦ Frégier (Cazamian): Τὸ σταθερὸν σημεῖον, δι' οὗ διέρχονται αἱ χορδαὶ κων. τομῆς, αἱ φαινόμεναι ἐκ σημείου Μ αὐτῆς ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν. 2183 ζ.

Παράγρ.

αἱ ἕξ αὗται περιφέρειαι νὰ εἶναι συμμετρικαὶ ἀνὰ δύο πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. 1099.

Σημεῖα ἰσογώνια (*Neuberg*): Δύο σημεῖα Μ, Μ' εἰς τὸ ἐπίπεδον τριγώνου ΑΒΓ, διὰ τὰ ὁποῖα αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, ΒΜ, ΓΜ εἶναι ἰσογώνιοι τῶν ΑΜ', ΒΜ', ΓΜ' ἀντιστοίχως. 1344 α.

Σημεῖα ἰσοκυκλικά. Βλέπε: *Ἀντιστροφὴ συμμετρική*.

Σημεῖα ἰσοτομικὰ (*Longchamps*): Ζεῦγος σημείων ἐπὶ πλευρᾶς τριγώνου καὶ συμμετρικῶν πρὸς τὸ μέσον αὐτῆς. Βλέπε καὶ *ἀντίστροφα σημεῖα* τοῦ *Longchamps*. 1231 α καὶ 1242 δ.

Σημεῖα κυκλικὰ ἐπ' ἄπειρον: Τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ἐπ' ἄπειρον εὐθείας καὶ τυχούσης περιφερείας. 1265 α.

Σημεῖα ὁμοκυκλικὰ ἢ *συγκυκλικά*: Σημεῖα ἀνήκοντα εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν. 292 ν, 293 δ, 294 καὶ 699.

Σημεῖα ὁριακὰ τοῦ Poncelet: Τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν περιφερειῶν, αἵτινες τέμνουν ὀρθογωνίως δύο δοθείσας περιφερείας. 232 καὶ 1268.

Κύκλοι

Κύκλος τοῦ Euler ἢ *τῶν ἐννέα σημείων*: Ὁ διερχόμενος διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τριγώνου, τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν καὶ τῶν μέσων τῶν ἑνούντων τὸ ὀρθόκεντρον μετὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου τμημάτων. 27, 293 ε, 718, 721 α, 1262, 1341 καὶ 1342.

Κύκλος τοῦ Fuhrmann: Ἡ μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα τὸ συνδέον τὸ ὀρθόκεντρον μετὰ τοῦ σημείου τοῦ Nagel τοῦ τριγώνου (Math., 1890, σ. 105 καὶ J. M. E., 1891, σ. 57). 1100 α.

Κύκλος τοῦ Miquel ἑνὸς τετραπλεύρου: Ἡ διὰ τῶν κέντρων τῶν περιγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὰ τέσσαρα τρίγωνα τοῦ (πλήρους) τετραπλεύρου. 711, 711 β καὶ 712 β.

Κύκλος τοῦ Monge. Βλέπε *ὀρθοπτικὸς* κύκλος κων. τομῆς.

Κύκλος τοῦ Poncelet: Ὁ τόπος τῆς κορυφῆς σταθερᾶς γωνίας, τῆς ὁποίας μία πλευρὰ διέρχεται διὰ τῆς μιᾶς ἑστίας ἐλλείψεως ἐνῷ ἡ ἄλλη ἐφάπτεται τῆς καμπύλης. 2176,3)

Κύκλος τοῦ Terquem: Ὁ διερχόμενος διὰ τῶν ποδῶν Α', Β', Γ', τριῶν *céviennes* διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο' καὶ τέμνων τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς τρία ἄλλα σημεῖα, πόδας τριῶν ἄλλων *céviennes* διερχομένων ἐπίσης διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο''. 1251.

Κύκλος ὁμοιότητος ἢ *τῶν ἀναλόγων ἀποστάσεων*: Ὁ γραφόμενος μὲ διάμετρον ΕΕ', ὅπου Ε καὶ Ε' τὸ ἐσωτερικὸν καὶ ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιότητος δύο περιφερειῶν. 1150 ξ.

Κύκλος τῶν ἴσων ῥοπῶν ἢ *τῶν ὀκτὼ σημείων*: Κύκλος διερχόμενος διὰ τῶν κορυφῶν τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου, ἰσοδυνάμων πρὸς τὸ τρίτον τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ καὶ κειμένων πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου. Διέρχεται ἐπίσης διὰ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας καὶ τοῦ κ. βάρους τοῦ τριγώνου. 293 ζ.

Κύκλος ὀρθοκεντροειδὴς (*Tucker*): Ὁ γραφόμενος ἐπὶ διαμέτρου ΘΗ (Θ κ. βάρους, Η ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου *Math.*, 1890, σ. 166 καὶ 1893, σ. 33). 1100 α.

Κύκλος ὀρθοπτικὸς ἐλλείψεως (*Bessel*) ἢ *τοῦ Monge*: Τόπος τῶν κορυφῶν τῶν περιγεγραμμένων εἰς τὴν καμπύλην ὀρ

Παράγρ.

Κωνικαὶ τομαί

σῶν τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας μετὰ τοῦ κέντρου τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας ἢ τοῦ κέντρου μιᾶς τῶν παρεγγεγραμμένων εἰς τὸ τρίγωνον περιφερειῶν. Ἡ ὑπερβολὴ τοῦ Feuerbach ἀνήκει εἰς τὴν ὁμάδα ταύτην ὑπερβολῶν.

Ἄλλαι καμπύλαι

Ἀστροειδής: Ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν σταθεροῦ μήκους τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα γράφουν δύο εὐθείας καθέτους. — Ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι ἐπίσης περιβάλλουσα καὶ τῶν ἐλλείψεων μὲ σταθερὰς διευθύνσεις ἀξόνων καὶ μὲ ἄθροισμα μηκῶν αὐτῶν $\alpha + \beta = k$ σταθ. 702 α, 793 α καὶ 801 α.

Καμπύλη τρίτου βαθμοῦ τῶν σημείων Ω τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τριγώνου εἶναι πόδες τριῶν céviennes διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου P. 1246 α.

Καμπύλη τοῦ Cassini: Τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο σταθερῶν σημείων εἶναι σταθερόν· ειδικαὶ μορφαὶ τῆς καμπύλης ταύτης εἶναι ἡ *ᾠοειδὴς τοῦ Cassini* καὶ ὁ *λημνίσκος τοῦ Bernoulli*. 79.

Κογχοειδὴς τοῦ Νικομήδους. 501 καὶ 1243 μ.

Κοχλιοειδής: Τὸ ἀντίστροφον σχῆμα τῆς *τετραγωνιζούσης τοῦ Δεινοστράτους*, ἢ ὁ τόπος τῶν ἄκρων M, N κυκλικοῦ τόξου σταθεροῦ μήκους ἐφαπτομένου εἰς τὸ σταθερὸν μέσον τοῦ O δοθείσης εὐθείας. 2068 κ.

Lituus: Τόπος τοῦ ἄκρου N κ. τόξου MON, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς OM εἶναι σταθερά, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀντιστοίχου κυκλ. τομέως σταθερὸν ἐνῶ ἡ γωνία MON μεταβλητή. 2068 κ.

Λοξοδρομία: Σφαιρικὴ καμπύλη τέμνουσα οἰκογένειαν μεσημβρινῶν τῆς σφαίρας κατὰ σταθερὰν γωνίαν. 248, 3.

Ρόδαξ τετράφυλλος. 793 α.

Στροφοειδής. 1242 μ.

Ὑποκυκλοειδὴς μὲ τρία σημεῖα ἀνακάμψεως ἢ *ὑποκυκλοειδὴς τοῦ Steiner*: Ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν τοῦ Simson διὰ σταθερὸν τρίγωνον καὶ μεταβλητὸν τὸ ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας σημεῖον. 293 γ.

Τρίγωνα — Πολύγωνα

Τρίγωνον συμπληρωματικὸν ἢ *μέσον*: Τὸ τρίγωνον τῶν μέσων τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου. 432, 434 α καὶ 733.

Τρίγωνον ἀντισυμπληρωματικόν: Τὸ τρίγωνον τῶν ἐκ τῶν κορυφῶν τριγώνου παραλλήλων πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς. 434 α.

Τρίγωνον ἐπαφῶν: Τὸ μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν τριγώνου μετὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου. 1177 α.

Τρίγωνον ὀρθικὸν ἢ *ὀρθοκεντρικόν*: Τὸ μὲ κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὕψῶν τριγώνου. 292 ι καὶ ν, 664 α καὶ 1052.

Τρίγωνον ποδικὸν (pedal): Τὸ ἔχον κορυφὰς τοὺς πόδας τριῶν céviennes διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ *ὀρθικὸν* λ. χ. τρίγωνον εἶναι τὸ ποδικὸν τρίγωνον τῶν ὕψῶν, τὸ *μέσον* τὸ ποδικὸν τῶν διαμέσων. 1242 ζ.

Τρίγωνον ψευδοϊσοσκελές: Τὸ ἔχον δύο διχοτόμους (ἐξωτερικὰς) ἴσας καὶ μὴ ὂν ἰσοσκελές. 480 α.

Παράγρ.

Τρίγωνον ἐφαπτομενικόν: Τὸ μὲ πλευρὰς τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τρίγωνον καὶ εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ. 1177 α.

Τρίγωνα ὀρθολογικά: Τὰ τοιαῦτα, ὥστε αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν ἑκάστου κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ἑτέρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. 757 α.

Τρίγωνα παραλληλογικά: Ἀναλόγων ἰδιοτήτων πρὸς τὰ προηγούμενα. 757 α.

Ἀντιπαραλληλόγραμμον: Ἀρθρωτὸν σύστημα ἐκ τέσσάρων στελεχῶν, ἀντιστοίχων τῶν διαγωνίων καὶ μὴ παραλλήλων πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου. 537 καὶ 1202.

Ψευδοτετράγωνον: Ὀρθοδιαγώνιον τετράπλευρον μὲ ἴσας διαγωνίους. 1198 α.

Ὀρθοκεντροειδὲς τετράπλευρον: Τετρὰς σημείων ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τῶν τριῶν ἄλλων. Λέγεται ἐπίσης ἡ τετρὰς αὕτη καὶ *ὀρθοκεντρικὴ ὁμὰς* σημείων. 292 ν καὶ 2183 δ.

Ἁρμονικὸν τετράπλευρον: Ἐγγράψιμον τετράπλευρον μὲ ἴσα γινόμενα ἀπέναντι πλευρῶν. 227.

Ὀρθοδιαγώνιον τετράπλευρον: Τὸ μὲ καθέτους ἐπ' ἀλλήλας διαγωνίους. 1198 α.

Ῥομβοειδές: Ὀρθοδιαγώνιον τετράπλευρον ἔχον ἄξονα συμμετρίας μίαν τῶν διαγωνίων του. 1198 α.

Πεντάγραμμον τοῦ Miquel. 737 β.

Ἑξάγωνον τοῦ Brianchon: Ἑξάγωνον περιγεγραμμένον εἰς κων. τομὴν καὶ τοῦ ὁποίου ἑπομένως αἱ διαγώνιοι διερχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. 248 καὶ 2121.

Ἑξάγραμμον μυστικὸν ἢ τοῦ Pascal: Ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κωνικὴν τομὴν καὶ τοῦ ὁποίου ἑπομένως αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τέμνονται ἀνὰ δύο κατὰ τρία σημεῖα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς κείμενα. 248, 1117 γ, 1251 γ, καὶ 2120.

Σχήματα συμπληρωματικὰ καὶ ὁμόλογικὰ κατὰ τὸν Poncelet. 75, 85 β καὶ 177 β.

Σχήματα ἀντίστροφα. 217.

Σχῆμα τοῦ Vecten: Τὸ σχῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἐξ ἑνὸς τριγώνου καὶ τῶν ἐπὶ τῶν πλευρῶν του κατασκευαζομένων τετραγώνων. Τὰ τετράγωνα ταῦτα εὑρίσκονται καὶ τὰ τρία ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ἢ καὶ τὰ τρία πρὸς ὃ μέρος τοῦ ἐπιπέδου εὑρίσκεται καὶ τὸ τρίγωνον. 1773 μ.

Σχήματα ὁμοιόθετα. 206 α καὶ 1130.

Ἰσοεδρικὸν τετράεδρον: Τὸ ἔχον ἴσας ἕδρας καὶ ἑπομένως ἀντικειμένας ἀκμὰς ἴσας ἀνὰ δύο.

Ὀρθογώνιον [ἢ ὀρθοκεντρικὸν] τετράεδρον: Τὸ μὲ καθέτους ἐπ' ἀλλήλας ἀπέναντι ἀκμάς. 72 καὶ 1838.

Κωνοειδῆ, Δομοειδῆ, Ἰσοδομοειμῆ. 1979 δ.

Κυλινδρικὸς ὄνυξ, Μοναστηριακὸς θόλος κλπ. 1979 γ.

Διάφοροι τύποι — Ἀντιστροφεῖς

Τύπος τοῦ Carnot: Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπὸ τῶν πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῆς περιγεγραμμένης καὶ ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον περιφερείας:

$$\delta' + \delta'' + \delta''' = R + \rho.$$

Παράγρ.

Τύπος τοῦ Simpson, διὰ τὸν ὑπολογισμὸν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν καὶ ὄγκων. 1864, 3)

Τύπος τοῦ Gregory, πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ π διὰ τῶν ἐμβαδῶν ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων. 1748, καὶ 1773 γ.

Τύπος τοῦ Legendre, πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ π διὰ τῶν ἀκτίνων καὶ ἀποστημάτων κανονικῶν πολυγώνων σταθεροῦ ἐμβαδοῦ ἀλλὰ τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν συνεχῶς διπλασιάζεται. 1750 καὶ 1773 δ.

Τύπος τοῦ Saurin, πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ π, κατὰ τὸν Ἀρχιμήδη, τῇ βοηθείᾳ τῶν περιμέτρων ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων.

Τύποι τοῦ Schwab ἢ τοῦ Descartes. 1773 α.

Τύπος τοῦ Sarrus: $V = \frac{h}{6}(B + 4M + B')$. 1862.

Σχέσις τοῦ Euler, διὰ τὸ τρίγωνον: $\delta^2 = R^2 - 2R\rho$ 1182, 1183.

Σχέσις τοῦ Durrande, διὰ τὸ τετράεδρον:

$$\delta^2 = (R - \rho)^2 - 4\rho^2.$$ 1929 α

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΙΣΤΟΡΙΚΑ

Προβλήματα.

Θεωρήματα

Παράγρ.

Θεώρημα τοῦ Fuss: Ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων, μὲ σταθερὰν βάσιν καὶ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἴσον πρὸς ἡμιπεριφέρειαν μεγίστου κύκλου, εἶναι περιφέρεια μεγ. κύκλου. 149 καὶ 1966.

Θεώρημα τοῦ Gergonne: Ἓν σφαιρικὸν τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον ὅταν τὰ ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴσα. 1965.

Θεώρημα τοῦ Gua de Malves: Εἰς τρισορθογώνιον τετράεδρον, τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι τῆς τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας ἕδρας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν ἄλλων ἑδρῶν. 1877.

Θεώρημα τοῦ Guéneau d'Aumont: Εἰς πᾶν ἐγγράψιμον σφαιρικὸν τετράπλευρον, τὰ ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν εἶναι ἴσα. 150, 248 καὶ 1967.

Θεωρήματα τοῦ Guldin, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ ὄγκου σχήματος ἐκ περιστροφῆς. 51 α, 400 α καὶ 1585 α.

Θεώρημα τοῦ Hamilton: Δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ὀρθόκεντρον Η καὶ τὰ τρίγωνα ΑΗΒ, ΒΗΓ, ΓΗΑ ἔχουν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν τῶν ἐννέα σημείων. 292 λ, 2922 ν καὶ 1341 γ.

Θεώρημα τοῦ Kariya (1904): Αἱ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ μετὰ τῶν σημείων Δ', Ε', Ζ', ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ἐπαφῆς μετὰ τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ κέντρου τούτου κειμένων διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. 1242 ξ.

Θεώρημα τοῦ Lafitte: Ἐὰν ἓν τρίγωνον μένῃ περιγεγραμμένον εἰς ἄλλο καὶ ὅμοιον ἑαυτῷ, τὰ ὁμόλογα σημεῖα (κατὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ τριγώνου) γράφουν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν. 1282 α.

Θεώρημα τοῦ La Hire: Τυχὸν σημεῖον περιφερείας (π) κυλιομένης ἄνευ ὀλισθήσεως ἐπὶ περιφερείας (Π) διπλασίας ἀκτῖνος καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς, γράφει διάμετρον τῆς (Π). 1285.

Θεώρημα τοῦ Lambert: Ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον τριῶν ἐφαπτομένων παραβολῆς διέρχεται διὰ τῆς ἑστίας. 2141 καὶ 2166.

Θεωρήματα τοῦ Lemaire ἐπὶ των μηνίσκων τοῦ Ἱπποκράτους κλπ. 1768 α.

Θεώρημα τοῦ Lexell: Ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων μὲ βάσιν καὶ ἐμβαδὸν σταθερὰ εἶναι περιφέρεια. 1969.

Θεώρημα τοῦ Lhuilier: Τὸ πολύγωνον τῶν προβολῶν σημείου Ρ ἐπὶ τῶν πλευρῶν κανονικοῦ πολυγώνου ἔχει ἐμβαδὸν σταθερὸν ὅταν τὸ σημεῖον Ρ κινῆται ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. 1773 κ.

Θεωρήματα τοῦ Maclaurin: 1) Διὰ τὸν ὄγκον σφαιρικοῦ τμήματος συναρτήσει τοῦ ὕψους καὶ τῆς μέσης τομῆς τοῦ τμήματος. 1932.

2) Ἐπὶ τῶν ὁμοιοθέτων καὶ ὁμοκέντρων ἐλλείψεων. 2098.

Θεωρήματα τοῦ Mannheim: 1) Δίδονται γωνία ΧΟΥ καὶ ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτὴν περιφέρεια (Ι). Ἐὰν ΑΒ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς (Ι), ἡ περιγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον ΑΟΒ περιφέρεια ἐφάπτεται σταθερᾶς περιφερείας. 1340 α.

2) Διὰ τὴν γραφὴν ἐλλείψεως. 2236.

Παράγρ.

Θεώρημα τοῦ Viviani: Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σημείου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κανονικοῦ ν - γώνου κειμένου ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι ν - πλάσιον τοῦ ἀποστήματος τοῦ πολυγώνου. 1592.

Θεώρημα τοῦ Wallace. Βλέπε *θεώρημα τοῦ Simson*.

Θεώρημα Ἰαπωνικόν: Εἰς ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων περιφερειῶν εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ. 710 β καὶ 750 α.

Θεώρημα (διατυπωθὲν ὑπὸ τοῦ Brocard) τοῦ Bobillier: Ἔστω ΑΒΓ τρίγωνον καὶ Ο τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του. Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἰς τὸ σημεῖον Ο συναντοῦν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ κατὰ τρία σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. 1342 ξ.

Προβλήματα ὁδηγοῦντα εἰς κατασκευάς μὴ γεωμετρικάς.

Παράγρ.

Ἡ λύσις τῶν ἑπομένων προβλημάτων ἀπαιτεῖ κατασκευάς τὰς ὁποίας μὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν διὰ τῆς χρήσεως τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου μόνον· ἐπειδή, ὡς γνωστόν, δὲν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μήκη ἄλλα ἀπὸ ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ῥίζαι μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ ἢ μιᾶς διτετραγώνου. Ἐν τούτοις, ἓν πρόβλημα, ἡ λύσις τοῦ ὁποίου ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται ὅτι ὁδηγεῖ εἰς κατασκευάς ῥιζῶν ἐξισώσεως βαθμοῦ μεγαλυτέρου τῶν ἀνωτέρω, δύναται νὰ λυθῇ γεωμετρικῶς, ἐὰν καθίσταται δυνατὴ ἡ ἀνάλυσις τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἰς ἄλλας βαθμοῦ δευτέρου πρὸς τὸ ἄγνωστον μῆκος· τοῦτο λ.χ. συμβαίνει διὰ τὸ *πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου*: *Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τριῶν ἄλλων δοθεισῶν* καὶ τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται ὀκτὼ λύσεις.

Τὸ *πρόβλημα τοῦ Huygens* (§ 1674 γ) ἄγει εἰς ἐξίσωσιν τετάρτου βαθμοῦ· εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ ἀχθῶμεν εἰς ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ, παρατηροῦντες ὅτι τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν ἀγωγὴν κοινῆς ἐφαπτομένης πρὸς δύο ὑπερβολὰς ἐχούσας κοινὴν ἀσύμπτωτον.

Τὸ μᾶλλον ἀξιοσημείωτον παράδειγμα ὑποβιβασμοῦ τοῦ βαθμοῦ τῆς ἐπιλυούσης πρόβλημα ἐξισώσεως ἐδόθη ὑπὸ τοῦ Gauss. Ἐπειδὴ ἠδυνήθη, διὰ συνεχοῦς ὑποβιβασμοῦ τοῦ βαθμοῦ τῶν ἐπιλυουσῶν ἐξισώσεων, νὰ ἐγγράψῃ εἰς περιφέρειαν κανονικὸν δεκαεπτάγωνον.

Εἰς τὰ ἑπόμενα παραθέτομεν μερικὰ προβλήματα τῆς παρούσης Συλλογῆς Ἀσκήσεων καὶ τὰ ὁποῖα δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν χρησιμοποιοῦντες τὸν κανόνα μόνον καὶ διαβήτην.

Ἐκ σημείου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν δοθείσης γωνίας κειμένου νὰ ἀχθῇ τὸ μικρότερον εὐθύγραμμον τμῆμα ἐκ τῶν περατουμένων εἰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας. 168 καὶ 1615.

Νὰ διαιρεθῇ γωνία εἰς τρία ἴσα μέρη. 501, Σημ.

Διὰ δοθέντος σημείου, νὰ ἀχθῇ κοινὴ τέμνουσα δύο περιφερειῶν τοιαύτη, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ὁριζομένων χορδῶν νὰ εἶναι δοθὲν μῆκος *(πρόβλημα τοῦ Lez)*. Τετάρτου βαθμοῦ. 880 α.

Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἀποτέμνουσα ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν περιφερειῶν χορδὰς δοθέντων μηκῶν λ, μ, ν. 881 α.

Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τοῦ τριγώνου τῶν ποδῶν τῶν διχοτόμων ἢ συμμετροδιαμέσων αὐτοῦ. 1242 ι καὶ 1523 γ.

Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Δ, κοινὸν τριῶν céviennes ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὰ μήκη ΔΑ', ΔΒ', ΔΓ' νὰ εἶναι ἴσα. 1242 μ.

Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδονται:

α) Τὰ σημεῖα Ι, Η καὶ G (Euler). 1520 γ.

β) Τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τῶν κορυφῶν πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς. (Ἑβδόμου βαθμοῦ). 1523 γ.

γ) Οἱ πόδες τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων. (Τετάρτου βαθμοῦ). 1523 γ.

Παράγρ.

δ) Οἱ πόδες τῶν συμμετροδιαμέσων αὐτοῦ. (Δωδεκάτου βαθμοῦ). 1523 γ.

ε) Τρεῖς διχοτόμοι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. (Δεκάτου τετάρτου βαθμοῦ). 1523 ε.

στ) Αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας ἀπὸ τῶν πλευρῶν. 1523 ε.

ζ) Αἱ ἀποστάσεις τοῦ ὀρθοκέντρου Η ἀπὸ τῶν τριῶν κορυφῶν. (Τρίτου βαθμοῦ). 1523 ε.

η) Μία διάμεσος, ἓν ὕψος καὶ μία διχοτόμος ἐκ διαφόρων κορυφῶν ἀγόμενα. (Ἕκτου βαθμοῦ). 1523 ζ.

Διὰ σημείου ἐντὸς δοθείσης γωνίας κειμένου νὰ ἀχθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα περατούμενον εἰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας καὶ δοθέντος μήκους. (Πάππος, τετάρτου βαθμοῦ). 1538.

Τὸ πρόβλημα τοῦ ἐλλειπτικοῦ σφαιριστηρίου (*Duporcq*). 1546, Σημ.

Πρόβλημα τοῦ Bobillier: Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς τρία ἰσοδύναμα δισορθογώνια τετράπλευρα. Λύεται γεωμετρικῶς μόνον διὰ ἰσοσκελὲς τρίγωνον. 1624 α.

Πρόβλημα τοῦ Lez: Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς τρία δισορθογώνια τετράπλευρα, ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν λ, μ, ν. Λύεται διὰ τῶν τομῶν δύο ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν. (Τετάρτου βαθμοῦ) 1624 α καὶ 1674.

Πρόβλημα τοῦ Leibniz: Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη διὰ δύο ὀρθογωνίων εὐθειῶν. (Ὀγδόου βαθμοῦ). 1624 α καὶ 1674 δ.

Πρόβλημα τοῦ Νεύτωνος: Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρος περιφερείας ἐκ τῶν χορδῶν τριῶν διαδοχικῶν τόξων αὐτῆς ἐχόντων ἄθροισμα τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας ἢ νὰ κατασκευασθῇ τὸ μέγιστον τετράπλευρον, ἐκ τῶν ἐχόντων τρεῖς πλευρὰς δεδομένας. 1712 β.

Νὰ γραφῇ τὸ μέγιστον τραπέζιον εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα. 1719, 3).

Νὰ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου δοθεῖσα τρίεδος στερεὰ γωνία κατὰ δοθὲν τρίγωνον. (Τετάρτου βαθμοῦ, κατὰ τὸν Lagrange). 1901 γ.

Πρόβλημα τοῦ Gergonne. Δοθέντων τριῶν σημείων Α, Β, Γ ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π) κειμένων, νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ (Π) ὥστε τὸ ἄθροισμα ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον.

Ἄνευ λύσεως μέχρι τοῦδε (1910 - 1911). 1901 γ.